

金属成形工艺与 分析

〔美〕B. 艾维超 著

王学文 等译 王学文 钮国俊 校

国防工业出版社

金属成形工艺与分析

〔美〕 B.艾维超 著

王学文 等译

王学文 钮国俊 校

国防工业出版社

内 容 提 要

本书共两篇。第一篇包括第一章至第六章,主要阐述了金属成型的基础理论;第二篇里第七章至第十二章叙述了轴对称状态下的锻粗、常规挤压、静液挤压、拉拔、管材减径扩径等工艺,第十三章至第十五章介绍了平面应变状态下的锻造和轧制工艺,还讨论了金属流动特性。书中主要应用了上限法,重点在工艺过程的分析计算。每章末附有习题。

本书可用作高等学校金属塑性成形专业的教学参考书或研究生的选修教材,亦可供从事这一专业的工程技术人员阅读。

METAL FORMING, PROCESSES AND ANALYSIS

1979

金属成形工艺与分析

〔美〕 B. 艾维超 著

王学文 等译

王学文 钮国俊 校

责任编辑 唐朝英

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印刷

787×1092 1/16 印张22¹/₄ 516千字

1988年9月第一版 1988年9月第一次印刷 印数: 0,001— 3,330册

ISBN7-118-00179-1/TG18 定价: 10.00元

译 序

本书系根据B. Avitzur所著《Metal Forming: Processes and Analysis》1979年修订第二版译出。著者为美国里海大学(Lehigh University)教授,曾于1981年夏应邀来上海交通大学讲学一个月。讲学内容大部分取自本书。

著者近二十多年来,一直研究极限分析法在金属成形工艺中的应用问题,造诣颇深。如1980年发表的《Metal Forming: The Application of Limit Analysis》一书,就是阐述这一问题的专著,并且就其体例来说,是本书的延续,与本书组成相互引证的姊妹篇。

著者这次来华讲学,引起了我国金属塑性加工学术界的关注和兴趣。事后,有关高等院校及一些从事金属塑性成形的科技人员纷纷向我校索阅资料。但著者仅带来一书原版书,赠给上海交通大学。我们几个人遂不嫌笔拙,译出了全文,希冀在国内推广应用这一新的极限分析法方面起些微薄作用。

全书共两篇十五章。第一篇阐述金属成型的基础理论,第二篇分为轴对称状态和平面应变状态两部分,分别介绍锻造、挤压、拉拔及轧制等工艺,而以上限法贯穿全书。众所周知,极限分析中的上限法,是目前确定各项工艺变形功率与变形力以及选择加工设备的一种相当精确而有效的方法。本书可用作高等学校金属塑性成形专业师生的教学参考书,也可供从事这一工作的工程技术人员阅读。

下列同志承担本书的译校工作。王学文译第一篇各章;肖文斌译第二篇的第七章;张鸿光译第八章和第十章;李绍林译第九章;俞子骥译第十一章;张质良译第十二章和第十三章;王以华译第十四章;余大伟译第十五章。顾懋适初校了部分章节。全稿译出后,经王学文和钮国俊校阅了全文,并订正了原书中的个别错误处。由于译者水平有限,恐仍有谬误不妥之处,谨请读者批评指正。

译 者

原 序

本书系在过去几年内，为几所大专院校冶金系、机械系及工业工程系的研究生讲授金属成形课程时所写讲义的基础上扩充而成的。在体例上可作为金属成形工艺分析方法的教科书。书中介绍了工程解法的进展。由于重点放在解析方法上，故仅选列了有代表性的工艺过程。本书亦可供从事金属成形的在职工程师和科研人员阅读。书中未涉及设计细节、工厂实习及经济学等内容，而集中阐述了工件性能和工艺可行性等问题。然而，也简要地说明了关于流动特性、产品质量及力对机械设计的影响。

前六章专门讨论基本原理，后面各章分成轴对称状态和平面应变状态两部分来讨论特种成形加工。本书不作为学习塑性力学的理论之用，故只在第一章至第六章中将与后面内容有关的一部分塑性力学理论作了扼要引述。

为了使广大读者能够理解第一章至第六章所介绍的内容，要求有个最低限度的前提，即预先具备代数学、三角学、微分学以及一些动力学知识，而这些课程是所有工程学科的第一年和第二年学习计划中都包含的。连续介质力学在这里并不需要。我们引用了张量符号，因为张量符号可使诸如平衡方程一类的方程式容易记忆。没有用到张量计算，然而非常详尽地给出了全部推导演算。只研究了密席斯材料及粘滞的不可压缩液体，而没有必要去叙述固体的更为一般的性能，因为书中介绍的各种工程分析都是适用于密席斯材料的。阐明了实际材料中的应变硬化和应变速率效应的计算方法。论述了粘滞流动，以便在出现液动润滑作用的工艺过程中能应用。为了避免用到张量分析，对上限和下限定理只作引述，不予证明。

计算金属成形工艺用的解析法，书中列出了分离体法（或切块法）和极限分析法。分离体法早在1925年由卡门（见第十五章参考文献〔12〕）提出，而且自那时起就已被广泛应用。金属成形工艺的极限分析法相对来说比较新。上限解法仅在最近才获得有效应用，而下限解法却用得很少（见第七章和第十三章）。极限分析法在其它工程领域，例如结构设计和热传导，已证明极为有用。作者确信极限分析法在解决金属成形问题中的作用将会日益增大，这一信念明显地贯穿全书。

滑移线法已被成功地用来解决平面应变状态一类的问题。目前所采用的是滑移线图解法。此法成熟地用于第一章至第六章，参考文献表中所列出的文献〔3〕、〔24〕、〔29〕及其他许多文献[●]。由于篇幅有限，本书未涉及滑移线法。如前所述，探讨仅限于理想塑性材料，因为有意义的工程解法目前只适用于这些材料。然而，借助平均等效流动应力，可使解析解有效地应用于实际材料。书中阐述了这些内容。

极限分析法用于密席斯材料，是与“增量”应力-应变定律有关的。用于极限分析的摩擦特征，可由不变摩擦因子来描述。工件与凹模间接触面上的切应力是一个已知常数。假定摩擦按照库仑定律或流体动力定律作用时，则应用极限分析法则可求得工程解。

● 见第六章末参考文献表。——原注

但是，这种解已经不再是上限解或下限解，而只是一种近似解了。

根据作者本人使用这本教材的经验，发现要把所介绍的全部内容包括在一门课程内未必合乎需要，而且也不可能做到。在为机械工程系或冶金工程系研究生班开设的3学时课程[●]中，只能在课堂上讲授大约三分之二的內容。第一章至第六章约需18个学时。如果时间不够，则可略去屈雷斯加屈服准则和屈服表面的內容。至于第七章的內容，其中实心圆盘墩粗的上限解和下限解是必要的，而空心圆盘和分离体切块法则可任选。分离体切块法可放在学习挤压和轧制时再介绍。按能量法进行计算时，要用到库仑摩擦系数、不变摩擦因子和液动润滑三种假设，这一方法可限制在对通过锥形模流动问题的研究。其他工艺方法可按极限分析法来计算，只用到不变摩擦的假设。

以前学过弹性力学和塑性力学的学生，尽可把前六章当作复习来读。对他们来说，3个学时已足够涉猎这六章的全部内容，还可指定他们阅读一些有关著作和新发表的论文。

作者谨向在过去六年筹写本书期间曾给予多方面帮助的许多人士表示感谢。由于不可能提及所有人的姓名，我希望本书的出版将会使他们感到欣慰。这本著作是在J. F. 李勃西教授的指导下，于里海大学冶金及材料科学系完成的。

B. 艾维超

● 原文如此，3学时课程一般是指每周3学时，但作者未写明讲授周数。——译注

目 录

第一篇 基本原理

第一章 应力状态..... 2	3.4 无限小应变与位移.....26
1.1 引言..... 2	3.5 有限主应变.....28
1.2 应力分量..... 4	习题.....30
1.3 斜面上的应力矢量..... 4	第四章 应力-应变与应力-应变速
1.4 平衡微分方程式..... 5	率定律.....31
1.5 应力张量的对称性..... 7	4.1 固体应力-应变关系.....31
1.6 主应力与应力主轴..... 8	4.2 拉伸试验.....32
1.7 平均应力与应力偏量..... 9	4.3 密席斯应力-应变速率定律.....34
1.8 最大切应力.....10	4.4 粘滞流动.....35
习题.....11	习题.....36
第二章 屈服准则.....15	第五章 功率的上限.....37
2.1 引言.....15	5.1 应变能.....37
2.2 密席斯屈服准则.....15	5.2 运动学许可速度场与速度间断.....41
2.3 屈雷斯加屈服准则.....17	5.3 摩擦与摩擦损耗.....42
2.4 屈服准则比较.....17	5.4 上限定理.....44
2.5 屈服表面.....18	习题.....45
习题.....19	第六章 功率的下限.....47
第三章 应变与应变速率.....21	6.1 静力学许可应力场与应力场间断.....47
3.1 应变速率与速度.....21	6.2 下限定理.....48
3.2 主应变速率及其轴.....24	6.3 精确解.....48
3.3 不可压缩性.....26	第一篇参考文献.....48

第二篇 制造工艺

(A) 轴对称状态

第七章 圆盘镦粗.....52	7.10 实心圆盘镦粗的下限解.....93
7.1 引言.....52	7.11 附录.....101
7.2 圆柱坐标系中的应变速率与平衡	参考文献.....106
方程.....52	习题.....106
7.3 实心圆盘的无鼓形径向流动.....53	第八章 通过锥形模的金属流动.....108
7.4 空心圆盘.....55	8.1 引言.....108
7.5 考虑鼓形的实心圆盘.....70	8.2 球坐标的应变速率与平衡方程.....108
7.6 实心圆盘的分离体平衡解法.....77	8.3 上限法.....109
7.7 功率与能量.....84	8.4 平衡法.....123
7.8 连续区由速度间断面分开.....84	8.5 应用库仑摩擦的分离体平衡法.....125
7.9 可变摩擦.....91	8.6 应用库仑摩擦的能量法.....127

8.7 液动润滑下的能量法	129	10.5 间接挤压(稳定状态)	186
8.8 畸变的网格图	132	10.6 直接挤压与间接挤压,行程終了 及概要	189
8.9 应变速率与应变	137	10.7 冲挤	193
8.10 应变硬化材料	141	10.8 附录	201
8.11 应变速率敏感性	141	参考文献	205
8.12 讨论	141	习题	206
8.13 附录	149		
参考文献	150	第十一章 静液挤压	208
习题	152	11.1 引言	208
第九章 线材和棒材的拉拔及开模 挤压	153	11.2 分析	210
9.1 引言	153	11.3 讨论	214
9.2 拉拔应力	155	11.4 压力下金属成形	222
9.3 最佳锥角	158	11.5 成形过程中静水压对后续强度和 韧性的影响	224
9.4 最大缩减率	159	参考文献	227
9.5 开模挤压	160	习题	228
9.6 摩擦的测量	164	第十二章 管材减径与扩径	229
9.7 讨论	163	12.1 引言	229
参考文献	173	12.2 球形速度场	231
习题	174	12.3 壁厚研究	239
第十章 挤压	175	12.4 游动芯头	246
10.1 引言	175	12.5 附录	247
10.2 球形速度场	178	参考文献	249
10.3 单元圆柱变形区	179	习题	250
10.4 直接挤压(稳定状态)	180		

(B) 平面应变状态

第十三章 板条锻造	251	习题	307
13.1 引言	251	第十五章 带材轧制	308
13.2 上限	251	15.1 引言	308
13.3 下限解	264	15.2 压力分布和轧辊分离力	309
13.4 讨论和结论	271	15.3 极限厚度和极限压下量	314
13.5 附录	275	15.4 功率要求和轧辊扭矩	316
参考文献	278	15.5 前滑和中性点位置	330
习题	278	15.6 最大允许压下率和最小需要压 下率	330
第十四章 通过斜面的流动	280	15.7 最小需要摩擦及摩擦值测定	335
14.1 引言	280	15.8 空载轧辊控制	337
14.2 速度场、速度间断及应变速率	281	15.9 尺寸控制和轧机预应力	339
14.3 上限法	282	15.10 附录	341
14.4 流动特性	290	参考文献	344
14.5 讨论	300	习题	346
14.6 附录	303	符号表	346
参考文献	306		

第一篇 基本原理

第一章 应力状态

1.1 引言

如图 1.1 所示，一个物体在其边界上受外力作用而处于平衡状态。在无体力（如惯性力和重力）情况下，作用于物体上的外力合力和合力矩为零。设物体内部有一个假想面 s ，去掉该面一边的材料，而以作用于该面上的力来代替，使物体留下部分仍处于平衡。此时该假想面一边的材料作用于另一边材料的这些力将被显示出来。

当假想面 s 以下的物体底部被去掉后，则顶部上剩下的一些外力失去平衡，并产生一个合力 F 。为了保持物体上部的平衡，在 s 面上必须有作用力。这些作用力产生一个合力 R ，它与 F 大小相等而方向相反（合力矩也一定平衡）。 R 力的方向及值，决定于 F 力的方向及值。

F 力随各个外力而定。例如，若移去了 F_2 力， F 力以及 R 力的方向和大小就都将改变。而且，如果假想面旋转到 s' 面的位置，则外力的合力将变为 F' ，其反作用力为 R' 。由此可见， R 力的大小和方向取决于假想面的倾角，同时取决于外力。

内力分布于 s 面上。设该假想面的一块小面积 δs 内有一点 P 。在 δs 面上作用着一个力 δf 。则这个假想面上 P 点的应力（单位面积上的力）就是力 δf 除以 δs （当 δs 趋近于零时）。

$$\sigma = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta s} = \frac{df}{ds} \quad (1.1)$$

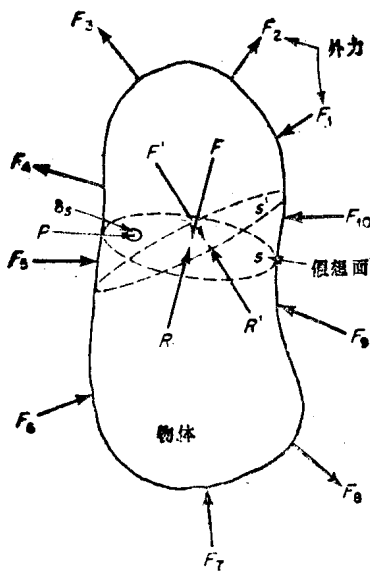


图 1.1 物体在外力作用下处于平衡状态

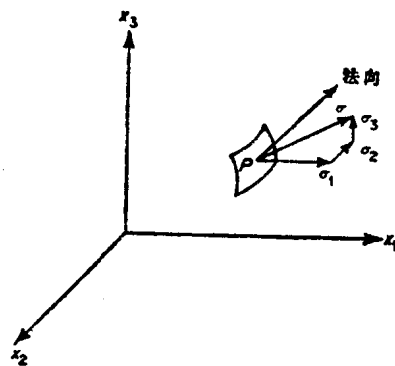


图 1.2 应力分量

应力对该面有一个任意交角, 可将它分解为平行于直角坐标系坐标轴的三个分量(见图 1.2)。三个应力分量为 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 , 它们被称为 s 面上 P 点的应力矢量的分量。

显然, 正因为 R 是决定于面的倾角及外力的, 所以 P 点上的应力大小及方向也决定于面的倾角及外力。假定有另一个面通过 P 点, 则应力的大小及方向就会改变。三个分量 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 也将改变。 P 点的应力是 δs 面在该点倾角的一个函数。 δs 面的倾角由面的外法线方向确定。法向单位矢量 n 是在 P 点上垂直于面的一段单位长度的线 (从物体向外指)。它的分量为

$$\alpha_1 = \cos(n, x_1) \quad \alpha_2 = \cos(n, x_2) \quad \alpha_3 = \cos(n, x_3) \quad (1.2)$$

利用符号可写成

$$\alpha_i = \cos(n, x_i)$$

此处 $i = 1, 2, 3$ 。

(1.2) 式中的 (n, x_1) 角是法线与 x_1 轴之间的夹角, (n, x_2) 角是法线与 x_2 轴之间的夹角, 依此类推。法向单位矢量的分量 $(\alpha_1, \alpha_2$ 和 $\alpha_3)$ 称为这个面的方向余弦。

应力矢量取决于其空间位置以及由应力作用面法线的方向余弦定出的倾角。当物体内每一点在任一斜面上的应力分量确定时, 则应力状态或应力场即完全决定。

在图 1.2 中, 应力被分解成平行于参考坐标系轴的三个分量。将应力分解为垂直于表面的法向分量 N 及平行于表面的切向分量 T 往往较为方便。应力的法向分量和切向分量为

$$\left. \begin{aligned} N &= \sigma_1 \alpha_1 + \sigma_2 \alpha_2 + \sigma_3 \alpha_3 \equiv \sigma_i \alpha_i \\ T &= (\sigma^2 - N^2)^{1/2} = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - N^2)^{1/2} \equiv (\sigma_i \sigma_i - N^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} (1.3)$$

此处 $i = 1, 2, 3$, 而重复的下标表示在该符号上相加求和 (见图 1.3)。

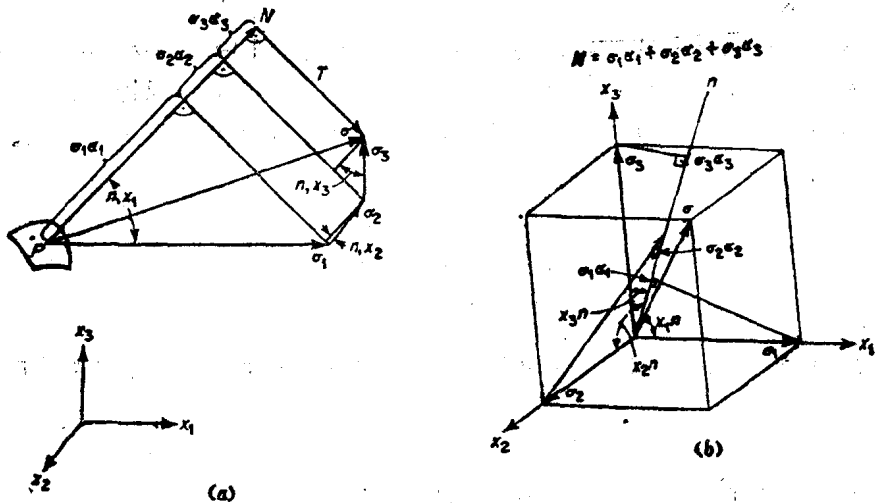


图 1.3

(a) 法向应力分量和切向应力分量; (b) N 的分量; 应力分量为 σ_1, σ_2 和 σ_3 ; 应力分量的投影为 $\sigma_1 \alpha_1, \sigma_2 \alpha_2, \sigma_3 \alpha_3$ 。

1.2 应力分量

研究一个边界平行于 x_2x_3 , x_3x_1 和 x_1x_2 平面的无限小立方体 d_{x_1} , d_{x_2} , d_{x_3} , 如图 1.4 所示。作用在与 x_2x_3 平面平行的面上的应力, 可分解为一个正应力分量 σ_{11} (在 x_1 方向) 及两个切应力分量 σ_{12} 和 σ_{13} (在 x_2 和 x_3 方向)。在平行于 x_3x_1 平面上的面上的应力, 可分解为一个正应力分量 σ_{22} 及两个切应力分量 σ_{21} 和 σ_{23} 。在垂直于 x_3 方向的面上的应力, 可分解为正应力分量 σ_{33} 及切应力分量 σ_{31} 和 σ_{32} 。

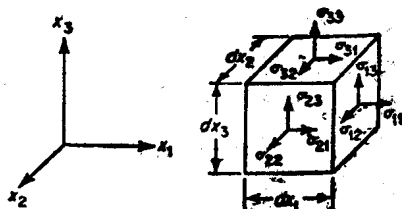


图1.4 应力张量的分量

当立方体各边 d_{x_i} 趋近于零时, 立方体汇聚成一点, 该点的应力叫做张量 σ_{ij} , 此处 i 和 j 可取从 1 ~ 3 的所有各值。

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

矩阵的对角元素 (σ_{11} , σ_{22} 和 σ_{33}) 为正应力分量, 而其余元素为切应力分量或纯切应力。正应力分量自表面向外指 (拉应力) 定为正, 自表面向内指 (压应力) 则定为负。如果正的正应力分量是指在正 (负) 的坐标方向, 则切应力分量在正 (负) 的坐标方向为正。

1.3 斜面上的应力矢量

式 (1.4) 描述了物体内一点应力张量的九个分量。在与直角坐标系三个轴相垂直的三个平面上, 每一面都有三个应力分量。可见当这九个分量已知时, 则通过 P 点的任一面上的应力矢量可定出。

前已指出, 一点 P 上的应力是它所作用面的倾角的一个函数。令 P 点为直角坐标系的原点, 而斜面 $A_1A_2A_3$ 有着方向余弦 $\alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 当其面积趋近于零时, 可将面上的应力 $\sigma_i = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 定出, 那么它就是斜面上 P 点的应力 (见图 1.5)。设面积 $A_1A_2A_3$ 为 s , 因此,

$$\left. \begin{aligned} \text{面积 } A_2PA_3 &= s_1 = s\alpha_1 \\ \text{面积 } A_1PA_3 &= s_2 = s\alpha_2 \\ \text{面积 } A_1PA_2 &= s_3 = s\alpha_3 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

作用于四面体 $A_1A_2A_3P$ 上所有力之和为零。将每个力分解为在 x_1 , x_2 和 x_3 方向的分量, 这个条件为

$$\Sigma F_1 = \Sigma F_2 = \Sigma F_3 = 0 \quad (1.5)$$

在不计体力的情况下, 将 x_1 方向所有的力加起来得到

$$\Sigma F_1 = 0$$

$$\sigma_1 s - \sigma_{11} s \alpha_1 - \sigma_{21} s \alpha_2 - \sigma_{31} s \alpha_3 = 0$$

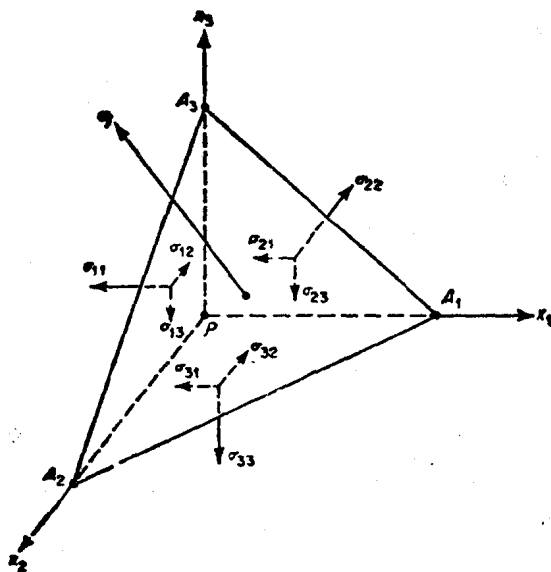


图1.5 斜面上的应力

所以,
$$\sigma_1 = \sigma_{11}\alpha_1 + \sigma_{21}\alpha_2 + \sigma_{31}\alpha_3 \equiv \sigma_{i1}\alpha_i \quad (b)$$

在 (b) 式中, x_1 方向的应力分量乘以应力作用面的面积而得到每个面上的力。同样情况下, $\Sigma F_2 = 0$ 给出

$$\sigma_2 = \sigma_{12}\alpha_1 + \sigma_{22}\alpha_2 + \sigma_{32}\alpha_3 \equiv \sigma_{i2}\alpha_i \quad (c)$$

以及 $\Sigma F_3 = 0$ 给出

$$\sigma_3 = \sigma_{13}\alpha_1 + \sigma_{23}\alpha_2 + \sigma_{33}\alpha_3 \equiv \sigma_{i3}\alpha_i \quad (d)$$

于是在任一直角坐标系中, 如果应力张量 σ_{ij} 已知, 则对任一斜面任一点上的应力是完全可定的。将 (b), (c) 和 (d) 三式叠加, 可写出

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}\alpha_1 + \sigma_{21}\alpha_2 + \sigma_{31}\alpha_3 \\ \sigma_2 &= \sigma_{12}\alpha_1 + \sigma_{22}\alpha_2 + \sigma_{32}\alpha_3 \\ \sigma_3 &= \sigma_{13}\alpha_1 + \sigma_{23}\alpha_2 + \sigma_{33}\alpha_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

或

$$\sigma_i = \sigma_{ji}\alpha_j$$

假定该斜面处在作用着规定外的牵引力的边界上。分布在一块面积上的外力, 具有与应力相同的量纲形式, 并以单位面积上的力为衡量单位。在面上任一点, 物体牵引力按其方向, 可分解成平行于坐标系轴的三个分量。面上这个规定牵引力 T_i 的分量, 必须与边界上所有点 P 的应力分量 σ_i 相等。

1.4 平衡微分方程式

下面我们来推导在没有体力或体矩情况下的平衡微分方程式。对图 1.6 所示的边长为 dx_1 , dx_2 及 dx_3 的微分六面体加以研究。P 点 (x_1, x_2, x_3) 与坐标原点的距离为 x_1 , x_2 及 x_3 。在通过 P 点且与 x_2x_3 轴平行的面上, 各应力分量为 σ_{11} , σ_{12} , 及 σ_{13} 。在与 x_2x_3 平面平行而与原点的距离为 $x_1 + dx_1$ 的面上, 其正应力分量为

$$(\sigma_{11})_p + \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}\right)_p dx_1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2}\right)_p (dx_1)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \sigma_{11}}{\partial x_1^3}\right)_p (dx_1)^3 + \dots \quad (a)$$

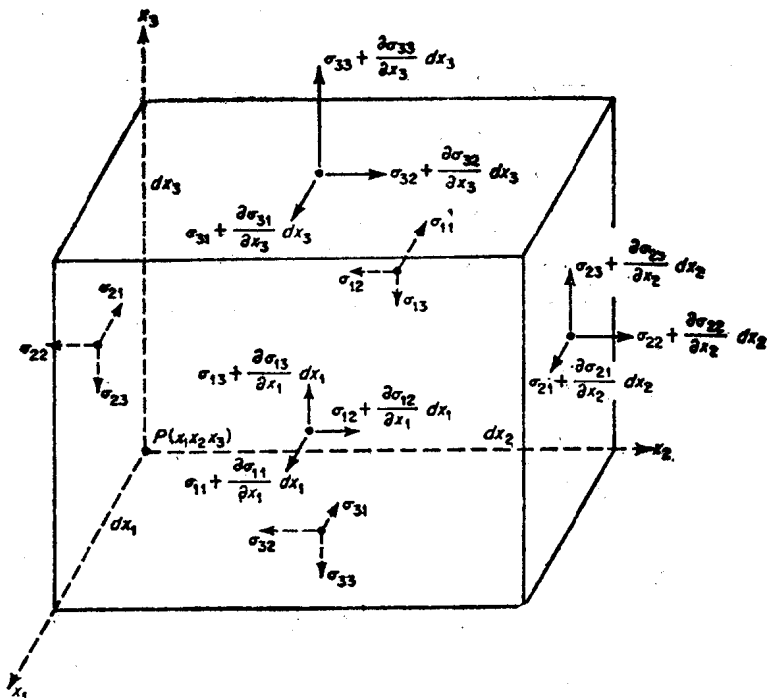


图1.6 作用于微分六面体上诸力的平衡

设应力及其导数在区间内连续。当六面体各边长趋近于零时，上式中包括长度二次方及高次方在内的所有各项之和，如与长度一次方项相比较，可忽略不计。

对均匀应力场（连续的应力及应力导数场）来说，表达式（a）可简化为

$$(\sigma_{11})_P + \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \right)_P dx_1 \quad (b)$$

同样，其它应力分量中含有六面体边长二次方或高次方的所有各项也可忽略不计。在与 x_2, x_3 轴平行而与原点相距为 $x_1 + dx_1$ 的面上，各应力分量为

$$\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1, \quad \sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1, \quad \sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} dx_1 \quad (c)$$

这里为简便起见，省略了下标 P 。在通过 P 点且垂直于 x_2 轴的平面上，各应力分量为 σ_{22} 、 σ_{23} 及 σ_{21} ；而在相距原点为 $x_2 + dx_2$ 的面上，各应力分量则为

$$\sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2, \quad \sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_2, \quad \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \quad (d)$$

除上面已讨论的应力以外，其余两个面上的应力都表示于图 1.6 中。对于处在平衡状态的微分六面体（无体力作用时），上述应力将不会产生合力。这个条件可用式(1.5)来说明，该式指出三个相互垂直方向中每个方向的合力为零。

$$\Sigma F_1 = \Sigma F_2 = \Sigma F_3 = 0 \quad (1.5)$$

给出的应力单位为单位面积上的力。将应力乘上它所作用的面积，以计算六面体任一侧上所受的力。按图 1.6 所示沿 x_1 方向作用的各力如下：

在垂直于 x_1 轴的两个面上

$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 - \sigma_{11} \right) dx_2 dx_3 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (e)$$

在垂直于 x_2 轴的两个面上

$$\left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 - \sigma_{21} \right) dx_1 dx_3 = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (f)$$

在垂直于 x_3 轴的两个面上

$$\left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 - \sigma_{31} \right) dx_1 dx_2 = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (g)$$

将沿 x_1 方向的力相加 ($\Sigma F_1 = 0$) 得出

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad (h)$$

所以

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0 \quad (i)$$

同理 $\Sigma F_2 = 0$ 可导出

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} = 0 \quad (j)$$

以及 $\Sigma F_3 = 0$ 可导出

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (k)$$

(i), (j) 和 (k) 三式构成了在没有体力情况下的三个平衡微分方程式 (1.7)。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_i} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_i} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_i} &= \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{aligned} \right\} (1.7)$$

或

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0$$

1.5 应力张量的对称性

对于图 1.6 所示的微分六面体来说, 要使它处于平衡, 不但在任一方向上力的总和必须等于零, 而且绕任一轴的力矩总和也必须等于零。当绕任意三根相互垂直轴的力矩之和等于零时, 如下式:

$$\Sigma M_1 = \Sigma M_2 = \Sigma M_3 = 0 \quad (1.8)$$

则各个力矩的计算是将各个应力乘上它们所作用的面积, 再乘上与绕之求和的轴之间的垂直距离。

绕 x_3 轴所有力矩相加 ($\Sigma M_3 = 0$) 给出下列结果:

对于垂直 x_1 轴的两个面

$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 - \sigma_{11} \right) (dx_2 dx_3) \frac{1}{2} dx_2 - \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) (dx_2 dx_3) dx_1 \quad (a)$$

对于垂直 x_2 轴的两个面

$$\left(\sigma_{22} - \sigma_{22} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 \right) (dx_1 dx_3) \frac{1}{2} dx_1 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) (dx_1 dx_3) dx_2 \quad (b)$$

对于垂直 x_3 轴的两个面

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 - \sigma_{31} \right) (dx_1 dx_2) - \frac{1}{2} dx_3 \\ & - \left(\sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} dx_3 - \sigma_{32} \right) (dx_1 dx_2) - \frac{1}{2} dx_3 \end{aligned} \quad (c)$$

(a), (b) 和 (c) 三式相加后等于零, 并除以 $dx_1 dx_2 dx_3$ 得

$$\begin{aligned} & \sigma_{12} - \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_2 - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_1 \right. \\ & \left. - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_2 - \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} dx_1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (d)$$

当六面体趋近一点时, 含有 dx_1 或 dx_2 的所有各项可被略去。(d) 式则变为

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (e)$$

计算 $\Sigma M_2 = 0$ 可得出

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} \quad (f)$$

计算 $\Sigma M_1 = 0$ 可得出

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (g)$$

由 (1.8) 式使合力矩等于零, 这就导出了如下的条件, 即在无体矩情况下, 由 (1.4) 式应力张量定义的切应力是对称的:

$$\left. \begin{aligned} & \sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ & \sigma_{ji} = \sigma_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

或

1.6 主应力与应力主轴

当一点的应力垂直于其作用面时, 此应力就称为主应力, 因此该面上必然无切应力作用。图 1.7 表示一个具有方向余弦 α_i ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) 的斜截面, 其中 P 点应力 σ 是个主应力。由 (1.6) 式得出

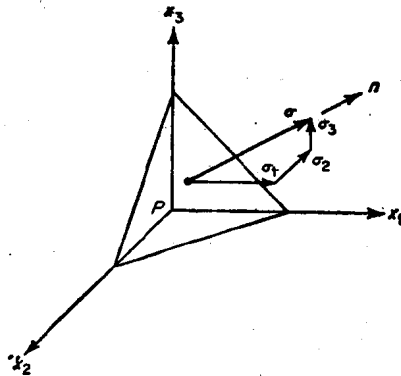


图1.7 主应力

$$\left. \begin{aligned} & \sigma_1 = \sigma \alpha_1 = \sigma_{11} \alpha_1 + \sigma_{21} \alpha_2 + \sigma_{31} \alpha_3 = \sigma_{i1} \alpha_i \\ & \sigma_2 = \sigma \alpha_2 = \sigma_{12} \alpha_1 + \sigma_{22} \alpha_2 + \sigma_{32} \alpha_3 = \sigma_{i2} \alpha_i \\ & \sigma_3 = \sigma \alpha_3 = \sigma_{13} \alpha_1 + \sigma_{23} \alpha_2 + \sigma_{33} \alpha_3 = \sigma_{i3} \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由此导出下式

$$\left. \begin{aligned} (\sigma - \sigma_{11})\alpha_1 - \sigma_{21}\alpha_2 - \sigma_{31}\alpha_3 &= 0 \\ -\sigma_{12}\alpha_1 + (\sigma - \sigma_{22})\alpha_2 - \sigma_{32}\alpha_3 &= 0 \\ -\sigma_{13}\alpha_1 - \sigma_{23}\alpha_2 + (\sigma - \sigma_{33})\alpha_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

这是 α_1 , α_2 和 α_3 的三个齐次线性方程式。这三个方程的行列式必须等于零才可得出非零解。展开行列式并回忆 (1.9) 式应力张量的对称性, 可得到

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma + J_3 = 0 \quad (1.10)$$

式中

$$J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii}$$

$$J_2 = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2$$

$$J_3 = -\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} + \sigma_{11}\sigma_{23}^2 + \sigma_{22}\sigma_{31}^2 + \sigma_{33}\sigma_{12}^2$$

这是一个 σ 的三阶方程, 它给出 σ 的三个实数解。这三个解就称为主应力, 并以 σ_1 , σ_2 及 σ_3 表示。当这些解代入 (b) 式并利用条件 $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, 可得到三组方向余弦 α_i , 每一组与一个主应力有关。与主应力相联系的方向称为应力主轴。习题 1.1 是一个计算例子。三个应力主轴是相互垂直的。当下标这样排列时, 便有

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (c)$$

可见任何面上的任一正应力必处在下列范围内

$$\sigma_1 \geq N \geq \sigma_3 \quad (d)$$

可确定任何应力状态下总存在三个相互垂直的面, 且这些面上的应力为法向应力。与这些面有关的坐标系轴称为应力主轴, 而这些应力为主应力。三个主应力中的最大主应力即是所研究这点上的最大正应力, 而主应力中的最小主应力即是该点上正应力的下限。

(1.10) 式的解 σ_1 , σ_2 和 σ_3 的值, 与描述 σ 的坐标系的选择无关。因此方程式中的系数 J_1 , J_2 和 J_3 , 与坐标系 x_1 , x_2 , x_3 的选择无关。所以这些项被称为应力不变量。

根据物理条件, 常常可以推测出诸主轴中一根主轴的方向。设主轴方向为 x_3 , 因此

$$\sigma_1 = \sigma_{33} \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (e)$$

应力的非零分量为 σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} 及 σ_{12} 。通过 (b) 式或 (1.10) 式可容易地得出主应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \\ \sigma_3 &= \sigma_{33} \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

(见习题 1.2)

1.7 平均应力与应力偏量

在 (1.10) 式中, 由正应力之和得出了应力第一不变量

$$J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii} \quad (a)$$

平均应力 (有时称为静水应力) 为