高等学校
电子信息类
规划教材

非线性控制系统分析与设计（第2版）

冯纯伯　费树岷　编著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
URL:http://www.phei.com.cn

高等学校电子信息类规划教材

非线性控制系统分析与设计

（第2版）

冯纯伯　费树岷　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

本书系"九五"大中专规划教材,为自动化专业类。本书从系统特性分析和综合设计两个方面阐述非线性控制系统的一般问题,探讨其分析方法及进行设计的工程途径。本书通过7章的论述,使读者对非线性系统有较深入的了解,并为今后研究非线性控制系统或处理非线性问题打下坚实的理论基础。本书附有一些应用实例。

本书适用于高等学校本科生。

图书在版编目(CIP)数据

非线性控制系统分析与设计/冯纯伯,费树岷编著.—新2版.—北京:电子工业出版社,1998.10

第1版由东南大学出版社出版

ISBN 7-5053-4714-4

Ⅰ.非… Ⅱ.①冯… ②费… Ⅲ.①非线性控制系统-系统分析-专业学校-教材②非线性控制系统-系统设计-专业学校-教材 Ⅳ.TP273

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第09940号

高等学校电子信息类规划教材

书　　名:**非线性控制系统分析与设计**

编 著 者:冯纯伯　费树岷

责任编辑:张荣琴

排版制作:电子工业出版社计算机排版室

印 刷 者:北京天宇星印刷厂

出版发行:电子工业出版社出版、发行　URL:http://www.phei.com.cn

北京市海淀区万寿路173信箱　邮编100036

经　　销:各地新华书店经销

开　　本:787×1092 1/16　印张:22.25　字数:584千字

版　　次:1998年9月第1版　1998年9月第1次印刷

书　　号:ISBN 7-5053-4714-4 / G·367

定　　价:26.00元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页、所附磁盘或光盘有问题者,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系调换。电话　68279077

出 版 说 明

为做好全国电子信息类专业“九五”教材的规划和出版工作，根据国家教委《关于“九五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》和《普通高等教育“九五”国家级重点教材立项、管理办法》，我们组织各有关高等学校、中等专业、出版社，各专业教学指导委员会，在总结前四轮规划教材编审、出版工作的基础上，根据当代电子信息科学技术的发展和面向21世纪教学内容和课程体系改革的要求，编制了《1996～2000年全国电子信息类专业教材编审出版规划》。

本轮规划教材是由个人申报，经各学校、出版社推荐，由各专业教学指导委员会评选，并由我部教材办商各专指委、出版社后，审核确定的。本轮规划教材的编制，注意了将教学改革力度较大、有创新精神、特色风格的教材和质量较高、教学适用性较好、需要修订的教材以及教学急需，尚无正式教材的选题优先列入规划。在重点规划本科、专科和中专教材的同时，选择了一批对学科发展具有重要意义，反映学科前沿的选修课、研究生课教材列入规划，以适应高层次专门人才培养的需要。

限于我们的水平和经验，这批教材的编审、出版工作还可能存在不少缺点和不足，希望使用教材的学校、教师、同学和广大读者积极提出批评和建议，以不断提高教材的编写、出版质量，共同为电子信息类专业教材建设服务。

原电子工业部教材办公室

前　　言

本教材第1版系按电子工业部的工科电子类专业教材1986～1990年编审出版规划，由高等学校《计算机与自动控制》专业教材编审委员会《自动控制》教材编审小组评选审定，并推荐出版，1997年经自动控制专业教学指导委员会评审，决定再版。

该教材由东南大学冯纯伯教授和费树岷副教授编著。上海交通大学席裕庚教授为责任编委，东北大学张嗣瀛教授为主审。

编著者从系统特性分析和综合设计两个方面阐述非线性控制系统的一般问题，探讨其分析方法及进行设计的工程途径，力图使读者对非线性控制系统有较深入的了解，以期为今后研究非线性控制系统或处理非线性问题打下较坚实的理论基础。本书的第1版中原只含5章，即：第1章引论，介绍非线性控制系统的研究对象、一般问题、处理方法和全书的基本内容。第2章李亚普诺夫稳定性，系统地介绍李亚普诺夫稳定性的基本定理，构造李亚普诺夫函数的方法。第3章输入输出特性分析，介绍泛函分析方法在分析非线性控制系统中的应用。第4章描述函数法及其应用，着重介绍如何应用描述函数法设计非线性控制器。第5章变结构控制，介绍变结构控制的理论，系统地介绍了单变量及多变量、线性和非线性系统的滑模控制的设计方法，附有一些应用实例。以上各章由冯纯伯编写，在第2版中略加修改增补。在本版中增加了两章，即第6章非线性系统微分几何理论和第7章非线性系统微分代数方法。以上两部分内容是近年来发展迅速并取得许多重要新成果的理论方法。在编写第1版时由于时间紧和全书篇幅有限，这部分内容未能收入。为弥补第1版的不足，这次补上。这两章由费树岷编写。以上各章内容均可独立，在教学中可根据需要选择合适的章节。

本书在编写过程中得到席裕庚、张嗣瀛两位教授许多帮助，并提出许多宝贵意见，对此我们表示衷心感谢。

由于编著者水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

冯纯伯、费树岷

1997年10月于东南大学

目　录

第1章 引　　论

§1.1 非线性控制系统概述

许多控制系统都具有非线性特性。例如随动系统的齿轮传动具有齿隙和干磨擦等，许多执行机构都不可能无限制地增加其输出功率，因此就存在饱和非线性特性。以上所举的例子中的非线性是由于系统的不完善而产生的，这种不完善实际上是不可避免的。有些非线性是系统动态特性本身所固有的。例如高速运动的机械手各关节之间有哥氏力的耦合，这种耦合是非线性的，如果要研究机械手高速运动的控制就必须考虑非线性耦合。电力系统中传输功率与各发电机之间相角差的正弦成正比，如果要研究电力系统中的大范围运动时，就必须考虑非线性特性的影响。还有一类对象本身虽然是线性的，但为了对它进行高质量的控制，常常在控制系统中有意识地引进非线性的控制规律。例如时间最短控制就要采用 *bang-bang* 控制，它是非线性的。严格说来，非线性是普遍存在的，非线性系统才是最一般的系统，线性系统只是其中的特殊例子。非线性特性千差万别，不可能有统一的普遍适用的处理办法。而线性系统则大为简单，可以用线性常微分方程来描述。解线性常微分方程已有成熟的方法，因此线性控制系统理论取得了很大的成就。对比之下非线性微分方程只有在个别情况下才有解析解。这给非线性控制系统的研究带来极大的困难。

非线性系统和线性系统之间的本质差别可概括为以下两点：

1. 对于线性系统重叠原理可以应用，对于非线性系统因为特性不是线性的，因此重叠原理不能应用。对于重叠原理可以应用的系统，分析大为简单，小信号和大信号作用下的结果应该一致。对于重叠原理不能应用的系统，分析大为复杂，大信号和小信号作用的结果可以大不相同。

2. 一般来说对于非线性系统不能求得完整的解(*Closed form solution*)，目前的数学工具还远远不够。因此一般只能对非线性系统的运动情况作一些估计，例如对系统的稳定性、动态品质等作一些估计。

我们知道线性控制系统中的运动只可能有几种情况：如衰减的或发散的振荡或不振荡运动，或临界的振荡等等。非线性系统中的运动要复杂得多，可以是振荡的或不振荡的过程，这种振荡严格说来不一定能用调和函数来表示；可以是稳定的或不稳定的，这种稳定可以是全局的，也可能是局部的；可以出现振荡的极限环，这种极限环可能有多个；还可能出现混沌(*Chaos*)现象，既非稳定的极限环，又非无限制的发散。总之，非线性系统中的现象要复杂得多。

由于许多控制系统中都有非线性，有些非线性对系统的运行是有害的，应设法克服它的有害影响。有些非线性是有益的，应在设计时予以考虑。因此从事控制工作的工程师和研究人员早就对非线性控制系统的研究予以很大的关注。多年来在这方面已经积累了许多成果。但由于非线性系统的复杂性，在这方面的研究工作有相当大的困难，因此研究成果还远不能满足实际需要，在这方面有待研究的问题还很多。近年来由于工程实际的需要以及人们对提高控制系统智能化程度的重视，研究工作者对非线性系统理论给予很大的关注，希望能够取得新的重要

进展。

前面提到非线性是普遍存在的，线性系统只是一个特例，但这决不能贬低线性系统理论的重要性。线性系统理论仍然是系统理论的基础。许多非线性系统的极限或临界情况是线性系统，许多非线性系统是由线性系统组合、引伸或改造而来。因此研究非线性系统理应首先要对线性系统理论有较深入的了解。事实上许多非线性系统的分析方法要借助于线性系统理论的成果。

§1.2 非线性控制系统的数学方程

对于非线性系统人们常常采用微分方程或非线性算子方程来描述，本节介绍非线性控制系统的微分方程描述方法。

相当广泛的一类非线性系统可用 n 阶常微分方程来描述，

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} = h\left[t, y(t), \dot{y}(t), \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}, u(t)\right], t \geqslant 0 \tag{1.2.1}$$

其中 $u(t)$ 为输入，$y(t)$ 为输出。若定义

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= \dot{y}(t), \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} \end{aligned}$$

则单一的(1.2.1)式可改写为 n 个一阶方程的方程组：

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) &= h[t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), u(t)]. \end{aligned}\right\} \tag{1.2.2}$$

如果定义向量 $\mathbf{x}(\cdot): R_+ \to R^n, \mathbf{f}: R_+ \times R^n \times R \to R^n$ 如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= [x_1(t), \cdots, x_n(t)]^T \\ \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, u) &= [x_2, x_3, \cdots, x_n, h(t, x_1, \cdots, x_n, u)]^T \end{aligned}$$

则(1.2.2)方程组可写成向量微分方程的形式：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[t, \mathbf{x}(t), u(t)], t \geqslant 0 \tag{1.2.3}$$

式中 $\mathbf{x}$ 为状态向量，x_1 至 x_n 为其状态变量。在上面的推导中设 $u(t)$ 为单变量，若系统中有多个输入，则式(1.2.3)的形式仍然可用，此时 $u(t)$ 为向量。

今后我们就用式(1.2.3)来描述一般非线性控制系统。

对于一个用式(1.2.3)描述的非线性控制系统，我们希望对于每一个输入 $u(t)$ 以下情况得以成立：

(1) 式(1.2.3)至少存在一个解(解的存在性)，

(2) 式(1.2.3)只存在一个解(解的唯一性)，

(3) 对于时间半轴 $[0,\infty)$ 上式(1.2.3)只存在一个解，

(4) 在 $[0,\infty)$ 轴上式(1.2.3)只存在一个解，而且这个解与初值 $\mathbf{x}(0)$ 存在连续变化的

关系。

以上是我们的期望，这些要求是相当强的，只有对 $\mathbf{f}$ 函数提出相当严格的要求才能实现。我们可以举出以下一些不符合上述要求的例子。

例 1 $\dot{x}(t)=\dfrac{1}{2x(t)},t\geqslant 0,x(0)=0$，此方程有以下两个解 $x_1(t)=t^{1/2},x_2(t)=-t^{1/2}$，这就是说上列条件(1)成立，但条件(2)不成立。

例 2 $\dot{x}(t)=1+x^2(t),t\geqslant 0,x(0)=0$，此方程在$[0,1)$区间有唯一解

$$x(t)=\mathrm{tg}t$$

但在$[0,\infty)$区间不存在连续可微的解 $x(t)$。这就是说上列条件(1)，(2)是满足的，但条件(3)不满足。

上面的例子和陈述说明式(1.2.3)解的存在性及唯一性是十分重要的。这一问题将在下节中讨论。

在上面的例子中系统可以有解析形式的解，这只是非常特殊的情况。一般情况下方程式的解即使存在也是表达不出来的，只能对它进行近似的估计或数值计算。

式(1.2.3)代表最一般化的非线性控制系统的方程。如果 $\mathbf{f}$ 函数与 t 无关，则称此系统为自治(驻定)的，否则称为非自治(非驻定)的。

如果 $u(t)=0$ 则

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}[t,\mathbf{x}(t)],\quad t\geqslant 0,\quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0 \tag{1.2.4}$$

代表系统的自由运动。

在许多控制系统中输入量 $u(t)$可以从函数 $\mathbf{f}$ 中分列出来，此时系统方程可写成以下形式：

$$\dot{\mathbf{x}}=A(t,\mathbf{x})+B(t,\mathbf{x})u(t)。 \tag{1.2.5}$$

称这样的系统是仿射的。它代表相当广泛的一类非线性系统，这类系统有其自身的特点。

对于系统(1.2.4)，若 $\mathbf{x}_0\in R^n$，并且

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0)=0,\quad \forall\, t\geqslant t_0$$

则称 $\mathbf{x}_0$ 是系统(1.2.4)的平衡点。如果 $\mathbf{x}_0$ 是 $t=t_0$ 时的平衡点，则 $\mathbf{x}_0$ 也是任一 $t_1\geqslant t_0$ 时的平衡点。对于自治系统当然就不必指出平衡点和时间的关系。对于非自治系统这就很重要了。如果 $\mathbf{x}_0\in R^n$ 是系统(1.2.4)在 $t=t_0$ 时的平衡点，则在 $t_1\geqslant t_0$ 时

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}[t,\mathbf{x}(t)],\quad t\geqslant t_1;\quad \mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}_0$$

将以 $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0,\forall\, t\geqslant t_1$ 为其唯一解。

对于线性系统平衡点总是唯一的，对于非线性系统情况则不同。于是我们给出以下定义：

如果在 t_0 时刻 $\mathbf{x}_0$ 是系统(1.2.4)的平衡点，且在 $\mathbf{x}_0$ 的邻域没有其他 $t=t_0$ 时刻的平衡点，则称 $\mathbf{x}_0$ 是孤立的平衡点。

§1.3 关于非线性常微分方程的解的存在性及唯一性

上节中提出对于非线性控制我们要求系统方程是有解的，解是唯一的，这一问题很重要。本节将不加证明地介绍这方面的一些基本知识。对于这些结果的讨论已超出本书的范围，因此不引入证明。有兴趣的读者可以参考有关教材，例如文献[2,3]。

我们讨论方程(1.2.4)的解的存在及唯一的条件。分两种情况：

1. 局部解情况

定理 1.3.1 如果式(1.2.4)中的 $\mathbf{f}$ 对 t 和 $\mathbf{x}$ 是连续的，若存在正常数 T,r,h,k，使得

(1) $\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})-\mathbf{f}(t,\mathbf{y})\|\leqslant k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|,\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in B,\ \forall\ t\in[0,T]$, (1.3.1)

其中 $B=\{\mathbf{x}\in R^n;\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leqslant r\}$代表 R^n 中的一个球，

(2) $\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0)\|\leqslant h,\forall\ t\in[0,T]$, (1.3.2)

则在满足以下条件的 δ 的区间$[0,\delta]$中式(1.2.4)有一个唯一解。δ 应满足的条件是

$$h\delta\exp(k\delta)\leqslant r \tag{1.3.3}$$

$$\delta\leqslant\min\left(T,\ \frac{\rho}{k},\ \frac{r}{h+hr}\right),\rho<1 \tag{1.3.4}$$

定理中所列式(1.3.1)称为 Lipschitz 条件，k 称为 Lipschitz 常数。式(1.3.1)表明只在局部区间满足 Lipschitz 条件，因此所讨论的解也是局部的。

由定理 1.3.1 可得以下推论：

推论 1.3.2 如果在$(0,\mathbf{x}_0)$的邻域 $\mathbf{f}$ 对 $\mathbf{x}$ 的偏导存在并连续，对 t 的单边的偏导存在并连续，则式(1.2.4)在相当小的区间$[0,\delta]$内存在唯一解。

2. 全局解情况

定理 1.3.3 如果在 $T\in[0,\infty)$区间中均存在有界常数 k_T 和 h_T，使得

(1) $\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})-\mathbf{f}(t,\mathbf{y})\|\leqslant k_T\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|,\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in R^n,\forall\ t\in[0,T]$ (1.3.5)

(2) $\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0)\|\leqslant h_T,\forall\ t\in[0,T]$ (1.3.6)

则式(1.2.4)在$[0,T],\forall\ T\in[0,\infty)$区间内存在唯一解。

这里式(1.3.5)称为全局 Lipschitz 条件。粗略地说，如果系统在全局范围内满足 Lipschitz 条件，则在全局范围内，在区间$[0,\infty)$内系统有唯一解。

定理 1.3.4 如果函数 $\mathbf{f}$ 满足定理 1.3.3 中所规定的条件，设 $\mathbf{x}(\cdot)$和 $\mathbf{y}(\cdot)$均满足式(1.2.4)，即

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}[t,\mathbf{x}(t)],\quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$$
$$\dot{\mathbf{y}}(t)=\mathbf{f}[t,\mathbf{y}(t)],\quad \mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0$$

则对每一 $\varepsilon>0$，存在相应的 $\delta(\varepsilon,T)>0$，只要

$$\|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0\|<\delta(\varepsilon,T),\quad \forall\ T\in[0,\infty)$$

则有

$$\|\mathbf{x}(\cdot)-\mathbf{y}(\cdot)\|<\varepsilon$$

§1.4 二阶系统自由运动的分析

前面概要地介绍了非线性系统，作为开始在这一节中我们概要地、定性地讨论二阶系统的自由运动的情况，目的是以二阶系统为例使读者对非线性系统中的自由运动有一个初步的印象。

二阶系统有其典型性，这是因为许多二阶系统都有其明确的物理背景；二阶系统的自由运动可以在一平面上表现出来，几何形象鲜明；以二阶线性系统为例，它的特征根可能是稳定的或不稳定的实根或复根，它的特征根的分布代表了可能的典型的方案，因此它的自由运动也有

典型意义。由此可见先研究一般二阶系统的自由运动，建立起一些形象的概念是有益的。

二阶系统的自由运动可表为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1[t,x_1(t),x_2(t)]\\ \dot{x}_2(t) &= f_2[t,x_1(t),x_2(t)]\end{aligned}\right\} \tag{1.4.1}$$

以 x_1 和 x_2 为坐标组成的平面称为状态平面，在该平面上画出的式(1.4.1)的图形称为状态平面轨迹。在特殊情况下当取 $\dot{x}_1(t)=x_2(t)$，此时绘出的图形称为相轨迹，它所在的平面称之为相平面。

为简单计我们只讨论驻定系统的情况，此时系统的一般方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1[x_1(t),x_2(t)]\\ \dot{x}_2(t) &= f_2[x_1(t),x_2(t)]\end{aligned}\right\} \tag{1.4.2}$$

根据上式对应于状态平面上的任一向量$[x_1,x_2]^T$ 有一个向量$[f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2)]^T$，这一向量的方向定义为

$$\theta_f(x) = \operatorname{arctg}\frac{f_2(x_1,x_2)}{f_1(x_1,x_2)} \tag{1.4.3}$$

根据式(1.4.2)，$\theta_f(x)$所表示的方向是系统(1.4.2)在 $\mathbf{x}$ 点的自由运动的方向，它表示系统轨迹在 $\mathbf{x}$ 点的切线方向。由此自然可以理解向量$[f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2)]^T=\mathbf{f}(\mathbf{x})$表示一个速度向量场。以上所述的概念显然可以推广到更高阶的系统。由此可见，研究系统的自由运动，实际上是研究其速度场的分布。这种几何概念对于研究非线性系统的运动是很有用的，因而近年来得到了很大的发展。因过于专门，限于篇幅，本书中不能详细讨论。

我们先讨论二阶线性系统的情况，设系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1.4.4}$$

为突出系统特征根对系统相轨迹的影响，我们采用线性变换，将 A 阵化为标准型。为此取

$$\mathbf{z}(t) = T^{-1}\mathbf{x}(t) \tag{1.4.5}$$

于是式(1.4.4)化为

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = T^{-1}AT\mathbf{z}(t),\mathbf{z}(0) = T^{-1}\mathbf{x}_0 \tag{1.4.6}$$

$T^{-1}AT$ 可能的形式不外乎以下几种：

1. 对　角　型

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$$

其中 λ_1 和 λ_2 均为实数，可能正或负，不一定不相等。

2. 若　当　型

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

λ 为重复的实根。

3. 共　轭　型

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$$

系统的特征根为 $\alpha+j\beta$ 和 $\alpha-j\beta$。

对于以上三种情况我们分别作运动轨迹图。

图 1.4.1 给出 $\lambda_2<\lambda_1<0$ 时 $\mathbf{z}$ 平面上的轨迹图。图形表明平衡点(原点)是稳定的，此点称为稳定的结点。如果 $\lambda_2>\lambda_1>0$，则图 1.4.1 所示轨线的箭头方向应改变，此时原点为不稳定结点。

图 1.4.2 给出 $\lambda_1<0<\lambda_2$ 时 $\mathbf{z}$ 平面上的轨迹。此时系统不稳，原点称为鞍点。如果 $\lambda_1>0>\lambda_2$，则图 1.4.2 的箭头要反向，此时鞍点仍然是不稳定的。

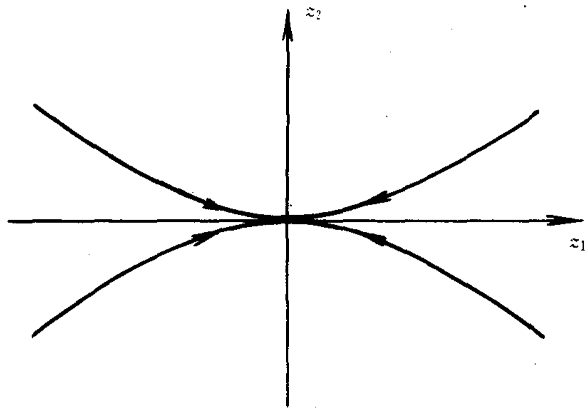

图 1.4.1

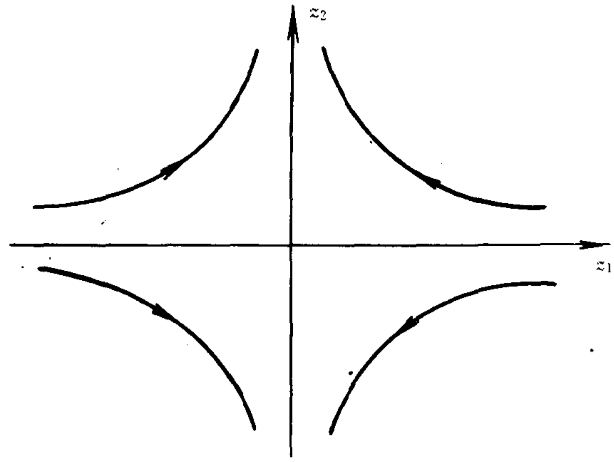

图 1.4.2

以上图 1.4.1 和 1.4.2 给出的是 $\mathbf{z}$ 平面上的轨迹图。由于 $\mathbf{z}$ 坐标和 $\mathbf{x}$ 坐标之间存在线性变换关系，坐标之间旋转了一个角度，因此在 $\mathbf{x}$ 坐标平面上轨迹也要旋转一个角度。图 1.4.1 和 1.4.2 所示的轨迹在 $\mathbf{x}$ 平面上的轨迹如图 1.4.3 和 1.4.4 所示。

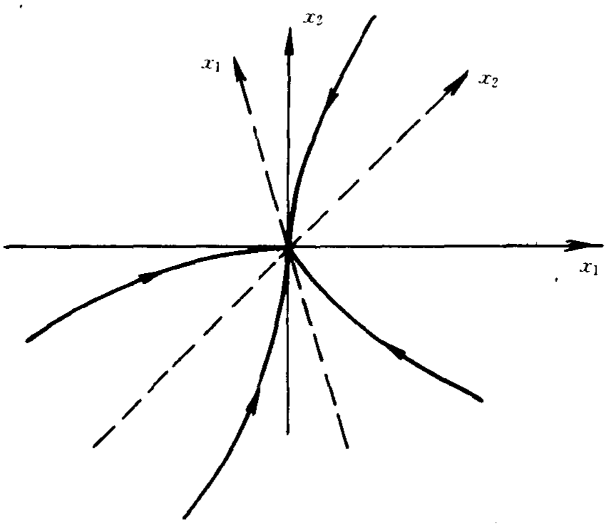

图 1.4.3

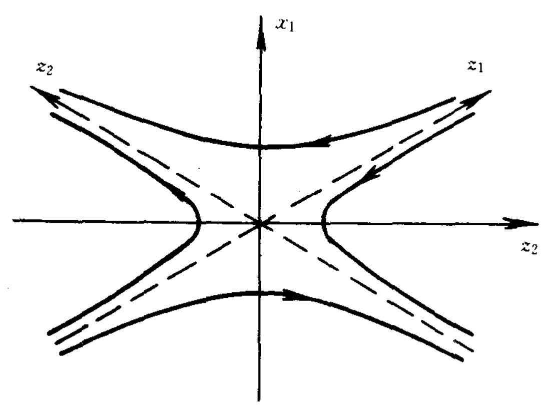

图 1.4.4

对于若当型其在 $\mathbf{z}$ 和 $\mathbf{x}$ 平面上的轨迹图形示于图 1.4.5 和 1.4.6。图中所示是 λ 为负的情况，系统稳定，因此结点是稳定的。如果 $\lambda>0$，则轨迹线上的箭头应反向。

对于共轭根的情况轨迹图形示于图 1.4.7 和 1.4.8。图 1.4.7 是不稳定的情况，此时原点

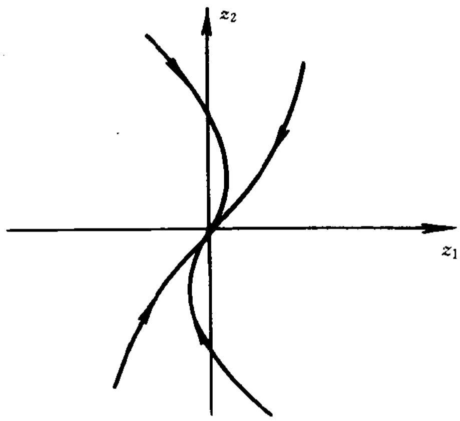

图 1.4.5

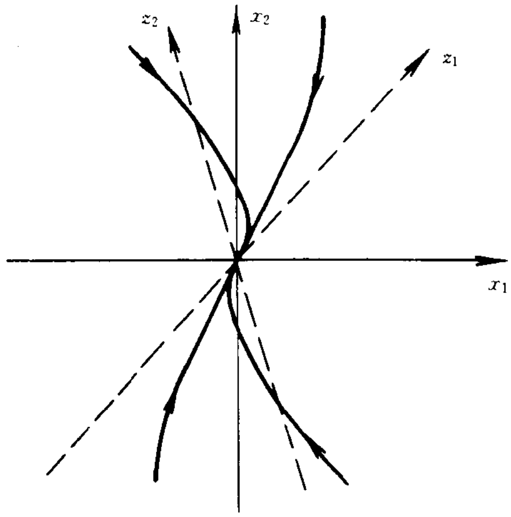

图 1.4.6

称为不稳定的焦点。图 1.4.8 是稳定的情况，此时原点称为稳定的焦点。

总结以上情况可以看出线性系统的平衡点可能是稳定或不稳定的结点，稳定或不稳定的焦点、鞍点。对于非线性系统情况要复杂得多，但若系统中的非线性不强，则在状态平面上的轨迹仍有可能和线性系统的轨迹有若干相近之处。一般来说非线性系统的轨迹图形可能很复杂。除以上所列举的结点、鞍点、焦点等以外，还可能出现极限环，不确定的振荡等等。

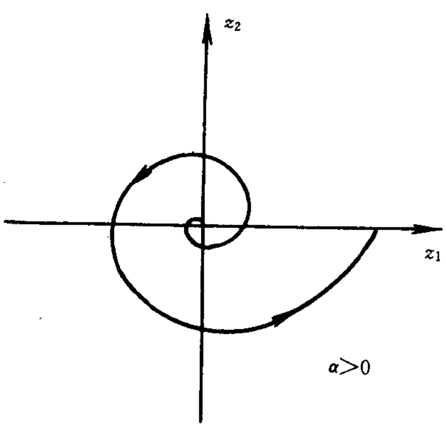

图 1.4.7

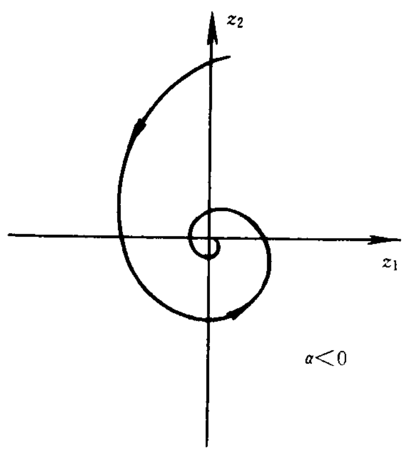

图 1.4.8

对于二阶非线性系统在状态平面上绘制其轨迹图形也是很有意义的，它形象地描绘出系统自由运动的情况，可得到一些定性甚至近似定量的结果。这里我们介绍用等倾法绘制非线性自由运动轨迹的方法。对于系统(1.4.2)取

$$S(x_1,x_2)=\frac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)}=C=const$$

对于某一选定的 C 在 x_1-x_2 平面上可得 $S(x_1,x_2)$ 曲线，在这曲线上系统轨迹的倾角相同，这样的等倾线可以充满 X 平面。若要研究从某一点出发的轨迹，可从该点出发作一小段的轨迹，此小段的倾角和所在点的等倾线所规定的倾角相同。这样一小段一小段地作下去就可得到全轨迹。作为例子图 1.4.9 给出 Van der Pol 方程的轨迹图形。Van der Pol 方程为

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2$$

图 1.4.9 给出的是 $\mu=1$ 的情况。图形表明存在稳定的极限环。形状特异(不是一个完整的圆)的极限环只在非线性系统中才有。

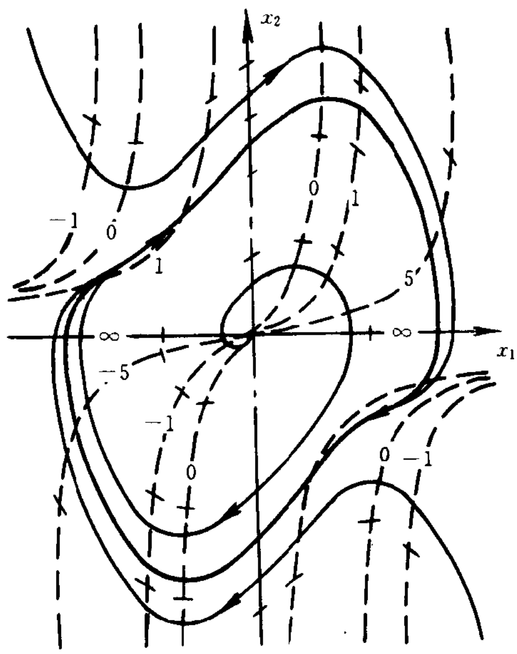

图 1.4.9

绘制相迹图的方法并非上面介绍的一种,这里不一一介绍。现在有了计算机,绘制相图并不是困难的事。

二阶系统是复杂系统中阶次最低的,它有代表性,本节的介绍使我们对系统自由运动的“形象”有一个初步的了解,有利于以后的深入讨论。

§1.5 本书的基本内容

非线性控制系统的理论涉及许多方面,而且许多问题都涉及相当专门的知识,因此不可能在一本书中讨论到非线性控制系统理论的一切方面。作者只能根据自己的理解,选择最基本的理论介绍给读者,希望所介绍的内容既反映了多年来在这方面已经取得的基本成果,也能反映近年来研究工作的新动向。

非线性控制系统千差万别,每一类非线性系统都具有很强的个性。若要具体解决问题,得到良好的结果,常常要对具体系统作深入的具体分析。但我们又不可能穷举各种系统的例子,因此在本书中只能以介绍方法为主。

根据工程实践的需要本书既注意非线性系统的分析,也注意非线性控制系统的综合设计。当然后者更是包罗万象,我们仍只能在一般方法上给予讨论。

对控制系统的一个最基本要求是系统稳定。我们将在第 2 章中讨论非线性系统的李亚普诺夫稳定性,介绍李亚普诺夫稳定性的定义,有关稳定性的基本定理,以及李亚普诺夫函数的构造方法。李亚普诺夫稳定性理论创立至今已有 100 年的历史,目前仍在发展中。掌握第 2 章中介绍的基本内容将使读者有能力开展涉及这方面的理论及应用的研究工作。

第 3 章为非线性系统的输入输出特性分析,介绍泛函分析方法在非线性系统中的应用。这

方面的理论成果得到了不少应用，例如在自适应控制系统的设计中得到了应用。

第 4 章介绍描述函数法。可以说描述函数法是最主要的工程近似方法。虽然它并没有严格的数学依据。但在许多情况下还是很有效的。本书不仅介绍描述函数法在分析非线性系统中的应用，也介绍如何以描述函数法为工具设计校正系统。

第 5 章介绍变结构控制系统理论。在变结构控制系统中，人们根据系统运行的状态进行分析和逻辑切换，改变控制器的结构和参数。这种控制系统具有较强的智能，有良好的性能，因此引起了广泛的重视。

第 6 章介绍非线性系统的微分几何理论。将微分几何理论用于非线性系统的分析和设计是近二十年来自控理论中的一大成就。这种方法特别适用于光滑非线性系统。这一章篇幅长一些，为了述说清楚并能包括这方面已取得的基本结果，使之自成体系，不得不增加些篇幅，用的数学知识也多一些，但只要循序渐进，读者仍能很好地掌握的。

第 7 章是非线性系统微分代数方法，这也是近年来非线性系统理论中发展起来的一个新的方向，已有不少成果，值得读者注意，故此予以介绍。

以上所列各章均独立形成体系，并不互相牵连。读者可以根据自己的需要和兴趣来阅读，可以不按上列的次序。

和线性系统相比，非线性系统一般都具有很强的个性，各类非线性系统大都有各自的特点，因此很难说一种分析方法可以普遍应用。本书中介绍了多种方法，目的是让读者根据需要来选择合适的方法。所介绍的也是一些最基本的方法。尚需指出，非线性系统理论涉及许多方面，有许多本质非线性的控制系统涉及许多专门问题，不可能在本书中都谈到。例如自适应控制系统、某些最优控制系统等都是本质非线性系统，关于它们的讨论，读者可以查阅有关专著。

习　题

1. 试讨论非线性系统和线性系统的本质区别。

2. 试作 Rayleigh 方程

$$\ddot{x}+\mu(-1+\dot{x}^2)\dot{x}+x=0(\mu>0)$$

的相图，并说明存在极限环。

3. 在平衡点附近将下列系统线性化，判断奇点的类型并画出其相图：

(1) $\dot{x}=4-4x^2-y^2$，

$\dot{y}=3xy$；

(2) $\dot{x}=-x+e^{-y}-1$，

$\dot{y}=1-e^{x+y}$。

4. 试作下列系统

$$\ddot{x}+\dot{x}-\frac{1}{4}\dot{x}|\dot{x}|+x=0$$

的相图，并估计可能存在的极限环的幅值。

5. 在以下系统中 $u(t)$ 表示输入，试分析 $u(t)$ 等于 1、2 和 4 时系统的响应。

(1) $\ddot{x}+\dot{x}+x=u(t)$

(2) $\ddot{x}+\dot{x}|\dot{x}|+x=u(t)$

6. 对于以下系统

$$\ddot{x}-(0.5-3\dot{x}^2)\dot{x}+x+x^2=0$$