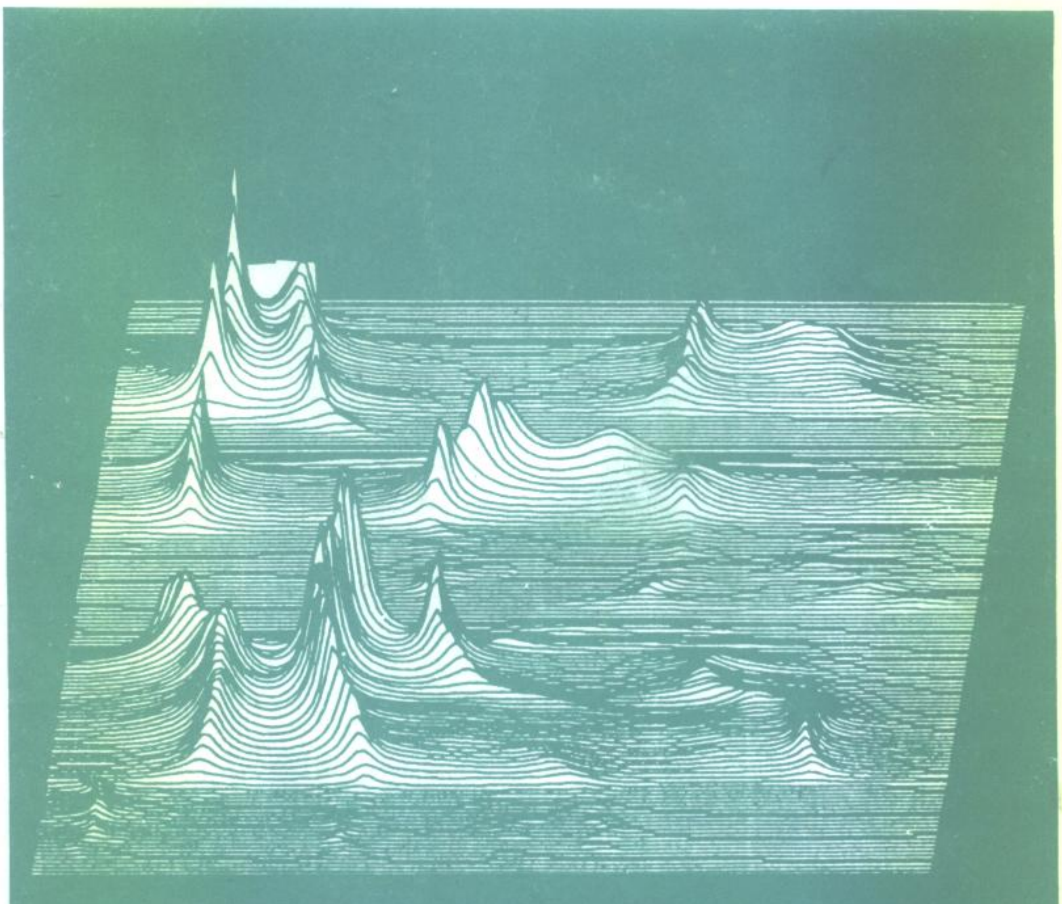
数字信号处理

俞下章　李志钧　金明录　编著



西北工业大学出版社

数 字 信 号 处 理

俞下章　李志钧　金明录　编著

西 北 工 业 大 学 出 版 社
2000 年 1 月　西安

(陕)新登字 009 号

【内容简介】本书是根据中国航空工业总公司教材编审室组织审定的教学大纲编写的。编著者在讲课讲义的基础上编写了这本教材。内容较丰富,取材也比较新颖,且附有大量习题、实例和部分计算机算法程序。

全书分六章论述。包括时域离散信号与系统、离散傅里叶变换、数字滤波器设计、离散随机信号分析与处理、有限字长效应和数字信号处理的应用范例。

本书概念论述清楚,推导详细,便于自学;在注意基本概念阐述的同时还注意编入一部分较新的内容。本书可作为工科大学本科学生和研究生学习数字信号处理课程的教材或参考书,亦可供从事信号处理的工程技术人员参考。

数 字 信 号 处 理
俞卞章 李志钧 金明录 编著
责任编辑 柴文强
责任校对 樊 力
*

(邮编:710072 西安市友谊西路 127 号 电话:8491147)
陕西省新华书店经销
空军导弹学院印刷厂印装
ISBN 7-5612-1068-X/TP·154
*
开本:787 毫米×1 092 毫米 1/16 印张:16.25 字数:395 千字
1994 年 1 月第 1 版 2000 年 1 月第 4 次印刷
印数:8 001—11 000 册 定价:19.00 元

前　言

本书是根据作者多年从事数字信号处理的教学和研究心得，在原有教学讲义基础上编写的。本书按一学期讲授60学时的内容进行编写。

第一章介绍了信号与系统的基本概念以及傅里叶变换和 Z 变换的基本知识，因此读者只要具备高等数学复变函数论的知识就可以自学这本教材。第二章重点是介绍离散傅里叶变换的概念和它的快速算法。第三章在论述数字滤波器设计前，以适当篇幅介绍了模拟滤波器的设计，其目的是为了让读者能全面了解信号滤波的物理概念，以利读者理解并设计各类数字滤波器。由于在实际工程中遇到随机信号的可能性远大于确知信号，因此在第四章中介绍了离散随机信号的分析。其中离散随机信号的线性预测滤波和功率谱估计应给予重视，因为它是当今数字信号处理的一种重要方法。第五章介绍了有关量化误差给数字信号处理带来的影响。第六章作为前几章知识应用范例，介绍了语音信号的处理和解卷积、系统辨识的方法。

读者应从第一章开始，就要仔细阅读在内容中提供的所有论证和推导，以及示范例题。为了学好这门课程，读者应通过每章后提供的习题来加深对教材内容的理解。当然，掌握本门课程的知识，最好通过计算机仿真实验。本书除在第二章提供了FFT程序外，其它有关数字滤波器设计、现代谱分析等FORTRAN程序，均因篇幅有限而未列入，有兴趣的读者可前来联系索取。

本书由西北工业大学俞卞章主编，沈阳航空学院金明录参加了第一章编写，第二、五章和第六章的第一节由南京航空航天大学李志钧编写，其余部分由俞卞章编写。由于编者水平有限，书中不妥和错误之处在所难免，欢迎批评指正。

本书全部原稿由彭学愚教授和陈鑫根教授作了精心审阅并提出了许多宝贵意见，在此谨致以衷心的感谢。

编著者

1993年12月

目　录

绪 论

在当今科学技术迅速发展的时代，大量数据和信息需要传递和处理。数字信号处理就是研究用数字的方法，正确快速地处理信号，提取各类信息的一门学科。它所涉及到的概念和技术，远可追溯到 17 和 18 世纪的数值计算；近可影响到诸如现代声学、语音通讯、声纳、雷达、遥感图像、地震、核科学，乃至生物医学工程等信号的研究。数字信号处理是一门应用科学，它自身有其独特的计算方法和理论。这些计算方法和理论的研究，不但有其悠久的历史，而且还存在着值得为之努力探索的未来。

数字信号处理是研究用离散的数字或符号序列来表示信号，并用数字硬件或计算机对这些离散序列进行有效处理的学科。它主要从事研究的内容有两个方面：一方面是滤除混杂在有用信号中的噪声和干扰，削弱采集信号中的多余成分，这就是数字滤波。另一方面是为了分离两个或多个按某种方式合并在一起的信号，也可能是希望增强一个信号中的某一分量，使之便于对它们进行分析和识别，这就是各类变换和算法。

过去信号处理主要是用模拟设备直接对模拟信号进行处理。但自从 50 年代以来，有些复杂信号的处理不得不采用数字计算机。例如某些地球物理数据和卫星遥感图像数据的处理。由于它们的数据量相当大，有时多达数百兆比特。因此，必须在现场通过传感器和模数转换器，先把信号数据记录在磁带、磁盘、乃至激光盘上，然后再输入大型数字计算机进行处理。像这种数据量相当多的信号，一般不是进行实时处理。例如几秒种内所采集到的近百兆的数据，往往需要几分钟，甚至几小时才能处理完。因此，数字信号处理必须研究某种快速算法以缩短信号处理的时间。

随着大规模集成电路问世，器件体积大为缩小；数字部件的成本下降；运算速度提高。这些成就促使数字信号处理技术在更为广泛的科技领域中得到应用。目前已能制成各种体积很小的数字信号处理芯片、FFT 芯片和数字滤波器，取样频率可高达几十兆赫。目前几乎所有的图像编码压缩系统和语音带宽压缩系统都倾向于全数字化。数字信号处理已成为现代化雷达和声纳，甚至医疗诊断仪器不可缺少的部分。除了专用数字信号处理硬件有所发展外，还出现了可编程的数字信号处理专用计算机，实现了对信号的实时处理和分析。数字信号处理的重要性仍在不断提高，其迅猛发展的势头丝毫没有减弱的迹像。可以预料，这门学科将来的发展可能比上述介绍的发展状态更令人注目。

作为一本教材，当然不可能讲述完上述所有内容，而只能讲述其中的基础知识，研究其中的基本规律。这些基础知识和基本规律将引导读者进入数字信号处理的广阔领域，将使读者有可能阅读和理解数字信号处理的文献资料，并为读者进一步深造，学习更高深的课程或应用技术提供足够的条件。

本书编写的内容如下：

在第一章中，介绍了离散时间信号和系统的基本概念以及分析信号和系统的基本数学工具傅氏变换和 Z 变换。在第二章中，讲述了有关信号的离散傅里叶变换（DFT）和 DFT 的快速算法（FFT），在本章中还介绍了 FFT 在实现快速线性卷积和 Chirp－Z 变换中的应用。在第三

章中，系统地论述了无限冲激响应（IIR）数字滤波器和有限冲激响应（FIR）数字滤波器的设计方法。其中既有通过变换公式逼近的经典设计方法，也有现代的计算机辅助设计方法。有关设计滤波器时需要考虑的量化误差所带来的有限字长效应，则在第五章中做了较详细的分析。在第四章中介绍了有关离散随机信号的基本知识以及线性数字系统对随机信号的响应，同时还介绍了最佳滤波、线性预测和功率谱估计方面的基本知识。这些内容仍然是当今数字信号处理正在进一步完善和创新的研究课题。为了使读者能对数字信号处理的应用有一个初步了解，我们在第六章中写了语音信号处理、解卷积和系统辨识方法。实际上这方面的内容还相当多，难度也相当大，因为它都超出了本教材所规定的教学大纲的要求，详细论述只好作罢。

第一章　离散时间信号、系统和 Z 变换[1]—[9]

§1-1　引　　言

我们正处在一个信息时代，随着信息的交换和传递，大量的信息需要处理，其中的大部分信息常常用信号作为载体，因此信息处理的直接对象是信号，这就是说，必须通过信号处理来提取信息。随着集成电路和计算机技术的发展，逐渐形成了一套有效的理论和处理方法，这就是数字信号处理技术。为使读者先有一个概略的了解，现通过下述一个例子来说明信号处理的大致过程。

假设有一个载有信息的、以时间 t 为变量的信号 $s(t)$，由于在传输过程中受到了某种加性噪声或干扰 $n(t)$ 的污染，致使观察到的信号变成了 $x(t)$，并表示为

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

现在的问题是对观测信号 $x(t)$ 作怎样的处理，使其处理结果 $y(t)$ 最接近原来的信号 $s(t)$。对这个问题的数字处理过程如图 1-1 所示。

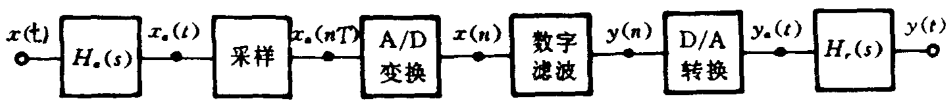


图 1-1　信号处理的典型过程

观测信号 $x(t)$ 首先要经过前置模拟滤波器 $H_a(s)$ 去掉一些带外成份和干扰，从而得到如图 1-2(b) 中的模拟信号 $x_a(t)$。然后以采样周期 T 对 $x_a(t)$ 进行采样，从而得到时域离散信号 $x_a(nT)$，如图 1-2(c)。与其相对应的 $x_a(t)$ 称为时域连续信号。时域离散信号 $x_a(nT)$ 还不能进行数字处理，因为其信号幅值是连续变化的。所以 $x_a(nT)$ 要经过模数转换器对幅值进行量化，从而得到时间和幅值都是离散的信号，即数字信号 $x(n)$，如图 1-2(d) 所示。其中 n 为整数变量。

图 1-1 中的数字滤波代表了数字信号处理的一种算法，它可以用数字器件实现，也可以通过计算机程序对输入数据 $x(n)$ 进行某种算法处理而得到输出 $y(n)$，如图 1-2(e)。处理后的数字信号 $y(n)$ 有时还需要经过 D/A 转换而恢复成模拟信号。但由于 D/A 转换后的信号 $y_a(t)$ 含有许多高频分量如图 1-2(f) 所示，因此还需要用一个模拟滤波器 $H_r(s)$ 去掉这些高频分量，从而得到处理后的平滑的时域连续信号 $y(t)$，如图 1-2(g)。

从上述例子中可以看出，信号从模拟形式变换到数字形式。处理完后，再从数字形式变回到模拟形式的过程中，出现了时域离散信号的概念，它究竟存在着那些特征？这是在学习数字信号处理知识时首先要弄明白的问题。

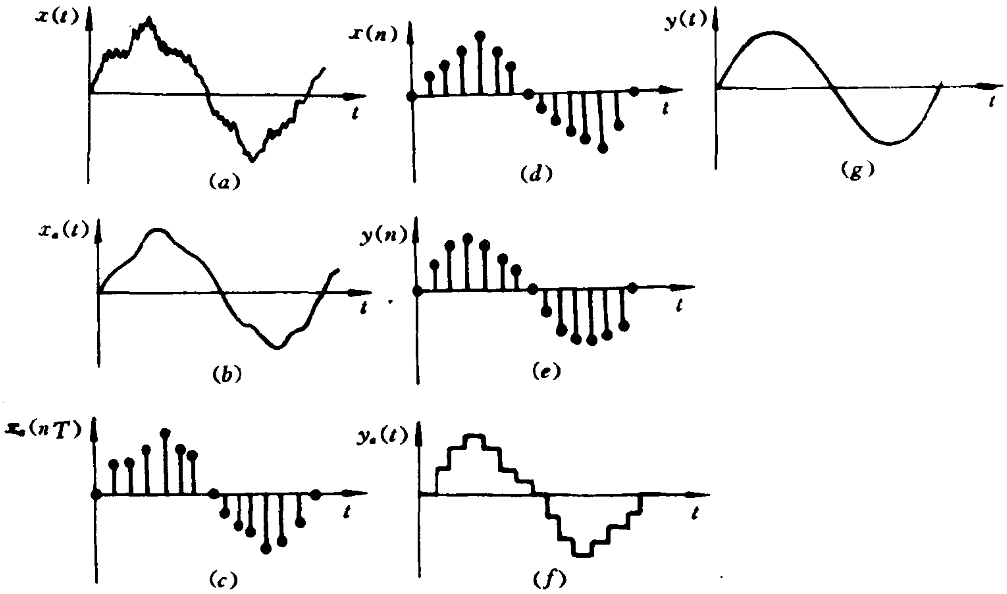


图 1-2　有关图 1-1 的各点波形

§1-2　时域离散信号——序列

图 1-2(c) 所表示的采样信号 $x_a(nT)$ 中以 nT 作为信号变量，表明该信号是在离散时间点 nT 上取值。但在信号处理过程中，信号数据总是先储存在存储器中，然后根据需要随时取用，甚至可以把它们的时间顺序颠来倒去。在很多情况下，信号处理是非实时的，也就是先将信号数据记录下来，然后用计算机或专用信号处理机进行处理和分析，因而 nT 并不代表具体的时刻，而只表明时域离散信号数据的前后顺序。另外，离散信号数据并非全是采样得来的，并且不一定以 nT 作为变量，也可以用表明前后顺序关系的 n 作为变量，这样的时域离散信号就变成了较抽象的“序列”。

1.2.1　序列的定义

序列定义　一个时域离散信号是自变量为整数 n 的函数，称之为序列。通常表示为

$$\{x(n)\} \qquad -\infty < n < \infty \tag{1-1}$$

其中 $x(n)$ 表示序列中第 n 个数，{　} 表示集合。或用图形表示成图 1-3 的形式。图中横坐标虽然画成了一条连续的直线，但 $x(n)$ 仅对于整数 n 才有定义，而当 n 不为整数时并不意味着 $x(n)$ 为零，而只是对 $x(n)$ 不作定义。

1.2.2　序列的基本形式

在信号处理中，有一些基本序列起着很重要的作用，它们是单位取样序列、单位阶跃序列、实指数序列、矩形序列和正弦序列。这些序列的解析表达式和图形表示如下：

1. 单位取样序列(图 1-4)

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\0 & n\neq 0\end{cases} \tag{1-2}$$

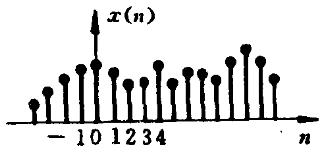


图 1-3 时域离散信号图形表示

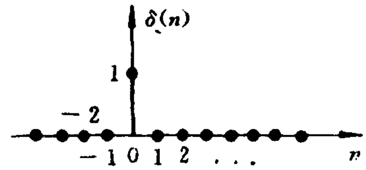


图 1-4

2. 单位阶跃序列(图 1-5)

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\0 & n<0\end{cases} \tag{1-3}$$

3. 实指数序列(图 1-6)

$$x(n)=a^n,\quad -\infty<n<\infty \tag{1-4}$$

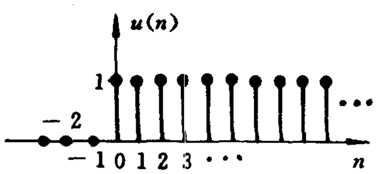


图 1-5

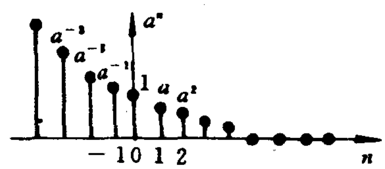


图 1-6

4. 矩形序列(图 1-7)

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\leqslant n\leqslant N-1\\0 & \text{其它 } n\end{cases} \tag{1-5}$$

5. 正弦序列(图 1-8)

$$x(n)=A\cdot\sin(n\omega)\qquad -\infty<n<\infty \tag{1-6}$$

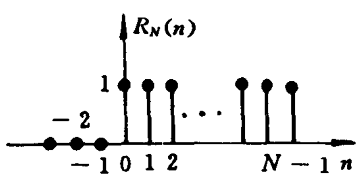


图 1-7

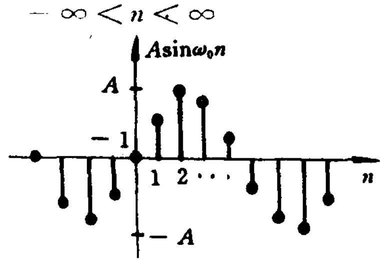


图 1-8

单位取样序列是最常用的基本序列,其作用类似于连续信号中的冲激函数 $\delta(t)$。唯一不同之处是单位取样序列是可以实现的。单位阶跃序列、实指数序列和矩形序列也相应的有其连续信号,然而正弦序列却有一些不同之处。

首先,只有当 $\omega/2\pi$ 为有理分数时,正弦序列才是周期序列。这是因为当 $\omega/2\pi=p/q$ 时有

$$\sin(n\omega)=\sin(n2\pi\omega/2\pi)=\sin(2\pi np/q)$$

因此,当 p,q 均为整数时,该正弦序列的周期为 q,即

$$\sin(\omega(n+q)) = \sin(2\pi p/q(n+q)) = \sin(n\omega)$$

反之，当 $\omega/2\pi$ 不是有理分数时，就没有周期性。习惯上称 ω 为数字角频率。对周期序列来说，它反映了正弦序列周期变化快慢的速率。如果正弦序列是从连续时间正弦信号 $\sin(\Omega t)$ 采样而得，即

$$\sin(\Omega t) = \sin(\Omega nT) = \sin(n\omega)$$

则有

$$\omega = \Omega T = \Omega/f_s \tag{1-7}$$

其中 ω 为数字角频率，Ω 为模拟角频率，T 为采样周期，f_s 为采样频率。

因此，数字角频率 ω 的单位是弧度，它等于模拟角频率 Ω(弧度／秒）的 T(秒）倍。以后我们在讨论问题时，Ω 表示的是模拟角频率，ω 表示的是数字角频率。

其次，当正弦序列的数字角频率在 $0 \leqslant \omega < 2\pi$ 区间内时，有

$$\sin(n(\omega + 2\pi k)) = \sin(n\omega)$$

并且在 $\pi < \omega < 2\pi$ 区间内和在 $0 \leqslant \omega' < \pi$ 区间内的正弦序列满足关系式

$$\sin(n\omega) = -\sin(n(2\pi - \omega)) = -\sin(n\omega')$$

因此，考虑正弦序列时，只考虑数字角频率 ω 在 $0 \leqslant \omega < \pi$ 范围内的值而不失一般性，但模拟角频率 Ω 将扩展到 ∞。

1.2.3 序列的基本运算

数字信号处理时，经常要对序列进行运算，序列的基本运算形式有：

1. 序列相加：　$\{x(n)\} + \{y(n)\}$，　即：$x(n) + y(n) = Z(n)$
2. 序列相乘：　$\{x(n)\} \cdot \{y(n)\}$，　即：$x(n) \cdot y(n) = Z(n)$
3. 序列的数乘：　$a \cdot \{x(n)\}$，　即：$a \cdot x(n) = Z(n)$
4. 序列的移位：　$\{x(n-n_0)\}$，　即：$x(n-n_0) = Z(n)$
5. 序列的反转：　$\{(x(-n)\}$，　即：$x(-n) = Z(n)$
6. 序列的卷积：　$\{x(n) * \{y(n)\}\}$，　即：$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot y(n-k) = Z(n)$

其中运算形式 6 将在以后的 1.3.4 中详细介绍。

利用上述序列的基本运算方法和单位取样的筛选特性，可以将一个任意序列 $x(n)$ 表示成单位取样序列的移位加权和。例如图 1－9 中的序列 $x(n)$ 可以表示为

$$x(n) = \cdots + x(-2)\delta(n+2) + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1)$$
$$+ x(2)\delta(n-2) + x(3)\delta(n-3) + x(4)\delta(n-4)\cdots$$

一般对于任意序列 $x(n)$ 的通式可以表示成

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k) \tag{1-8}$$

利用矩形序列 $R_N(n)$ 和乘法运算，可以截取一段任意序列 $x(n)$ 从 $n=0$ 到 $n=N-1$ 中的 N 个值，即用 $x(n) \cdot R_N(n)$ 来实现。其作用很像透过一个矩形窗口观测序列 $x(n)$ 的结果。因此也可将 $R_N(n)$ 称为矩形窗函数。图 1－10 说明了这种窗口作用。

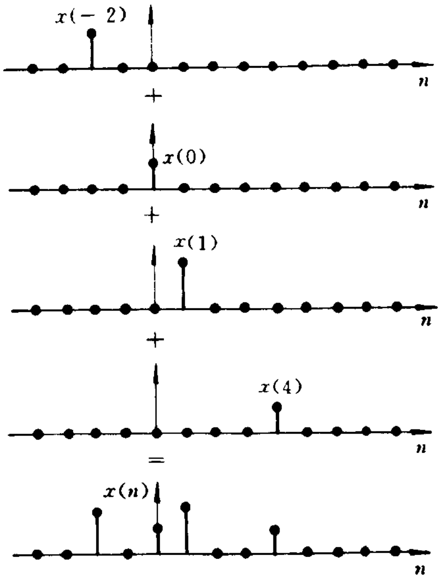


图 1－9　序列的加权表示

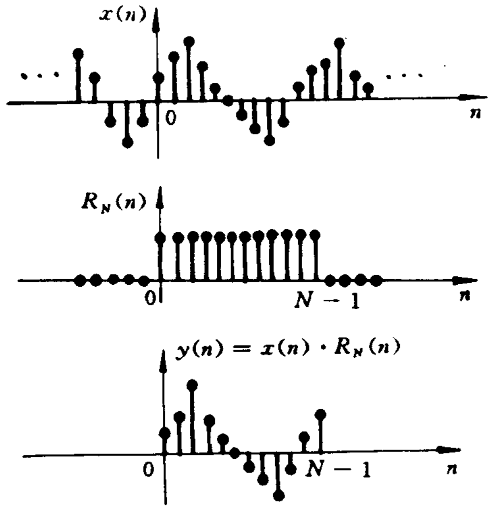


图 1－10　矩形序列的窗口作用

§1－3　时域离散系统

对时域离散信号的处理是通过时域离散系统来实现的，如图 1－11 所示。从数学上来看，这种处理就是把输入序列 $x(n)$ 根据要求变换成输出序列 $y(n)$。因此，一个时域离散系统可以认为是一种变换或算法。

1.3.1　时域离散系统的定义

一个时域离散系统是把一个输入序列 $x(n)$ 映射为另一个输出序列 $y(n)$ 的变换或算法，并表示为：

$$y(n) = T[x(n)] \tag{1-9}$$

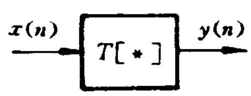


图 1－11　时域离散系统表示法

图中 $T[\,*\,]$ 表示某种变换或算法。有时为了方便，简称时域离散系统为离散系统。

对 $T[\,*\,]$ 加上不同的约束条件后，可以定义出各种时域离散系统。例如线性、非线性、时不变或时变等。其中离散线性时不变系统是最重要的基本系统。本书将重点讨论这类系统。

1.3.2　线性离散系统

定义：　一个时域离散系统，如满足下列条件，则称为线性离散系统。

如果：$y_1(n) = T[x_1(x)]$；　$y_2(n) = T[x_2(n)]$

则对于任意常数 a、b，满足

$$T[a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n)] = a \cdot T[x_1(n)] + b \cdot T[x_2(n)]$$

$$= a \cdot y_1(n) + b \cdot y_2(n) \tag{1-10a}$$

一般可表示成

$$T[\sum_{k=1}^{K} a_k x_k(n)] = \sum_{k=1}^{K} a_k y_k(n) \tag{1-10b}$$

系统在输入序列$x(n)$时的输出$y(n)$，常称之为系统响应。式(1-10b)表明，研究线性系统对某一叠加型复杂输入信号的响应时，可以分解成几个简单信号的输出叠加来研究。

1.3.3 时不变离散系统

定义 一个时域离散系统如果满足下述条件，则称为时不变离散系统，或称移不变离散系统。

如果：

$$y(n) = T[x(n)]$$

则对于任意整数k，满足

$$y(n-k) = T[x(n-k)] \tag{1-11}$$

时不变系统的运算关系$T[*]$不随时间而变化。因此，如果输入序列$x(n)$通过时不变系统后得到输出序列为$y(n)$，则$x(n)$移位k后的序列$x(n-k)$通过该系统的输出为$y(n-k)$，只带来响应的延时(即相同的移位)而已。

我们可以利用上述定义来判断一个离散系统是不是线性的或是否是时不变的。也可以找出一个特殊的输入序列来否定一个离散系统的线性或时不变性。下面的例子就说明了这个问题。

【例 1.1】 当输入序列为$x(n)$时，系统输出为

$$y(n) = T[x(n)] = nx(n)$$

试判定该系统的线性和时不变性。

解 (a) 判定线性

设：$y_1(n) = T[x_1(n)] = n \cdot x_1(n)$； $y_2(n) = T[x_2(n)] = nx_2(n)$

令：$x(n) = a_1 \cdot x_1(n) + a_2 \cdot x_2(n)$；

则：$y(n) = n \cdot [a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1[n \cdot x_1(n)] + a_2[n \cdot x_2(n)]$

$$= a_1 \cdot y_1(n) + a_2 \cdot y_2(n)$$

所以根据前述定义可确定该系统为线性系统。

(b) 判定时不变性

令：$x(n) = u(n)$，则输出 $y(n) = n \cdot u(n)$

若：输入延时两个采样周期而为$u(n-2)$

则：$y(n) = n \cdot u(n-2) = (n-2) \cdot u(n-2) + 2 \cdot u(n-2)$

$$= T[n \cdot u(n)]|_{n \to n-2} + 2 \cdot u(n-2)$$

所以根据定义可确定该系统不是时不变系统。

1.3.4 线性时不变离散系统

定义 如果一个离散系统同时满足前述之线性和时不变性，那么该系统就称之为线性时不变系统或线性移不变系统。

线性时不变系统是常见的很有用的系统，因为当知道了该系统对单位取样序列$\delta(n)$的响

应为$h(n)$（称为单位取样响应，有时也称之为单位冲激响应）后，即$h(n)=T[\delta(n)]$，则延时单位取样序列$\delta(n-k)$的响应就一定是$h(n-k)$，即$h(n-k)=T[\delta(n-k)]$。当我们按照式(1-8)用延时单位取样序列的加权和来表示任意序列$x(n)$时，即有

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$

根据式(1-10b)，线性时不变系统的输出应为

$$y(n)=T[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\cdot T[\delta(n-k)]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k) \tag{1-12}$$

式(1-12)通常称为卷积和，该式表明，线性时不变系统的输出序列$y(n)$是输入序列$x(n)$同系统单位取样响应$h(n)$的卷积，并用符号“∗”表示为$y(n)=x(n)*h(n)$。

如果对(1-12)式进行变量代换，令$r=n-k$，则可得

$$y(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n-r)\cdot h(r)=h(n)*x(n) \tag{1-13}$$

比较式(1-12)和(1-13)后可以看出，输入信号序列$x(n)$和离散系统单位取样响应序列$h(n)$的卷积过程与该两序列的先后次序无关，如将输入和单位取样响应序列相互调换，即以$h(n)$作为输入信号，而以$x(n)$作为系统单位取样响应，系统输出不变。即

$$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n) \tag{1-14}$$

1.3.5　离散卷积的计算

离散卷积是一种非常重要的计算，它在数字信号处理过程中起着举足轻重的作用。常常在已知系统的单位取样响应时，用它来计算相应的输入序列情况下的输出序列。因此，不仅要知道该运算的意义，而且还应熟练地掌握其运算技巧。由式(1-12)可以看出，卷积计算过程应包括序列的反转、移位、相乘、求和四个过程。下面来举一个例子来说明用图形法计算卷积的过程。

【例 1.2】　设一线性时不变系统的单位取样响应$h(n)$和输入序列$x(n)$，如图 1-12a 和 1-12d 所示，求系统的输出序列$y(n)$。

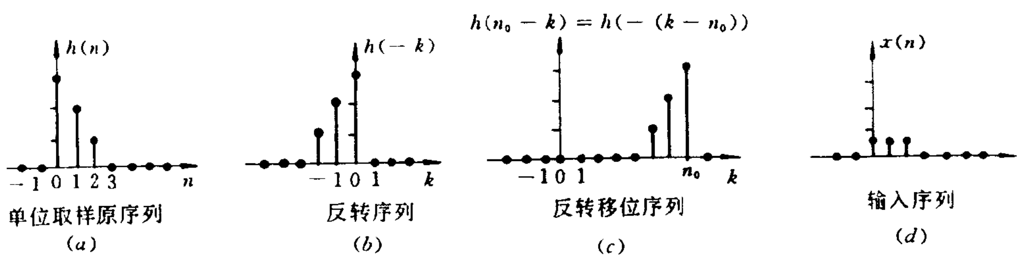


图 1-12　输入序列$x(n)$和系统单位取样序列$h(n)$

【解】　系统的输出按(1-12)式为$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$。

第一步：　根据$h(n)$序列得到其反转序列$h(-k)$，如图 1-12(b)。

第二步：　将$h(-k)$右移n个取样点而得到$h(n-k)$，如图 1-12(c)。

第三步：　将对应的序列值相乘而得到$x(k)\cdot h(n-k)$。

第四步： 将所有乘积值相加而得到 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$。

第五步： 按上述四步做完全部 $-\infty < n < \infty$ 而得到 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$

根据本例所给出的 $x(n)$ 和 $h(n)$ 可以看出，当 $n < 0$ 或 $n > 4$ 时，乘积 $x(k) \cdot h(n-k)$ 全为零，因此相应的 $y(n)$ 为零，对其它的 n 值，图 1-13 中给出了相应的输出 $y(n)$。

上例之图解法求卷积一般只适用于序列较短的情况。

【例 1.3】 设线性时不变系统的单位取样响应 $h(n) = a^n \cdot u(n)$，$0 < a < 1$，输入序列 $x(n) = u(n)$，求输出序列 $y(n)$。

【解】 根据离散卷积公式可求得

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(n-k) \cdot a^k u(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} u(n-k)a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

在上式运算中要注意运用阶跃序列的特性，即当 $k < 0$ 时 $u(k) = 0$；以及当 $k > n$ 时 $u(n-k) = 0$。

1.3.6 离散卷积运算规律

设有三个序列分别为 $v(n)$，$w(n)$ 和 $x(n)$。利用卷积和公式容易证明出下面的卷积运算基本规律。

1. 交换律

$$v(n) * w(n) = w(n) * v(n) \tag{1-15}$$

2. 结合律

$$v(n) * [w(n) * x(n)] = [v(n) * w(n)] * x(n) = v(n) * w(n) * x(n) \tag{1-16}$$

3. 分配律

$$x(n) * [v(n) + w(n)] = x(n) * v(n) + x(n) * w(n) \tag{1-17}$$

4. 与单位取样序列的卷积

$$x(n) * \delta(n) = x(n) \tag{1-18}$$

5. 与移位单位取样序列的卷积

$$x(n) * \delta(n-k) = x(n-k) \tag{1-19}$$

这些基本定律很有用。例如利用分配律可以求得并联系统的单位取样响应如图 1-14(b) 所示；利用结合律可以求得串联系统的单位取样响应如图 1-14(a) 所示。

§1-4 时域离散系统的稳定性和因果性

由前一节可以看到，时域离散系统的线性和时不变的约束条件使计算系统的响应变得方便，即可以通过卷积计算来得到系统的输出。但对实际更为重要的另外的约束条件是系统的稳定性和因果性。因为稳定性和因果性是保证系统的物理可实现的重要条件。下面将分别对系统的稳定性和因果性进行讨论。

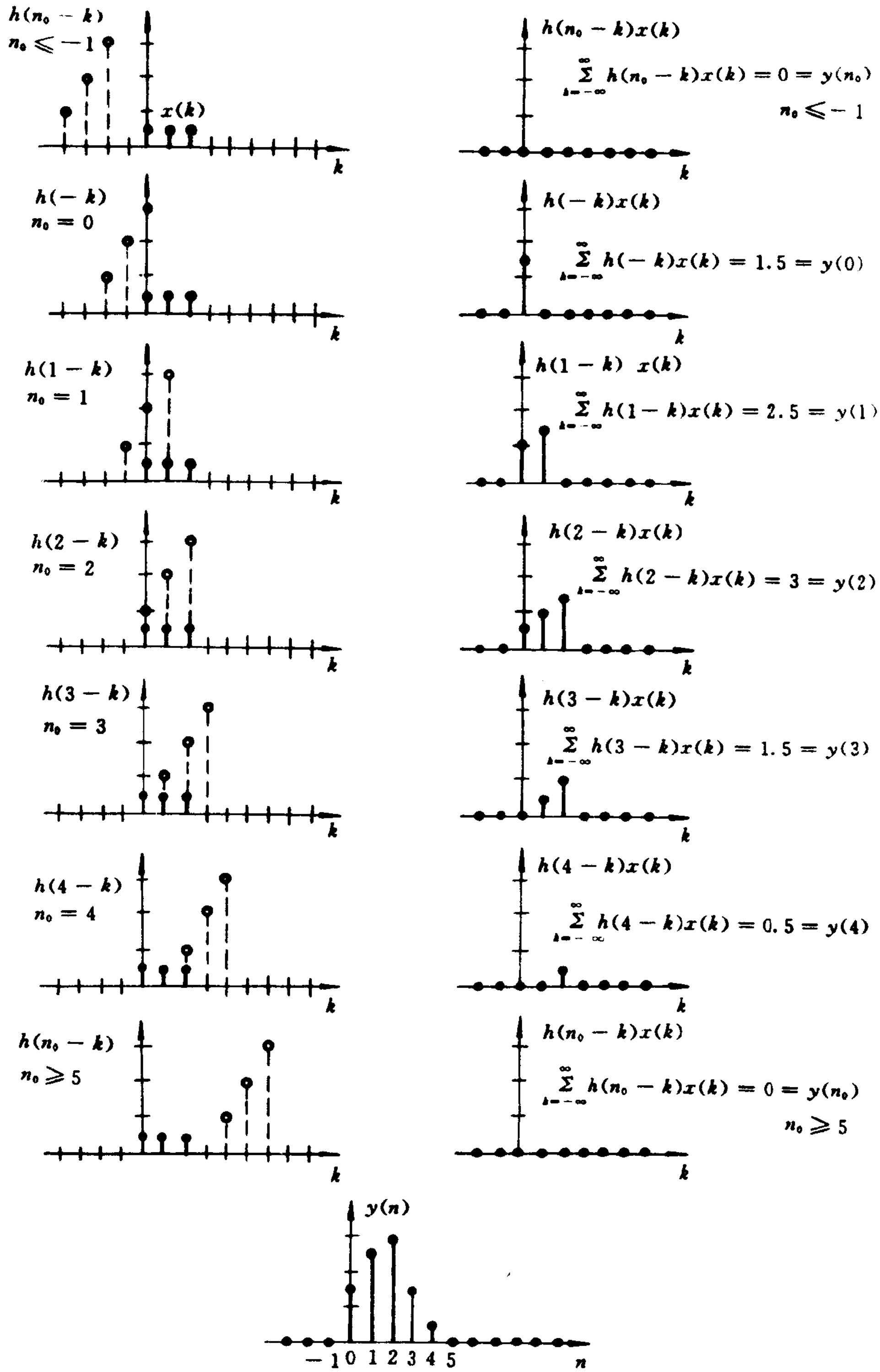


图 1-13　卷积计算的图解法