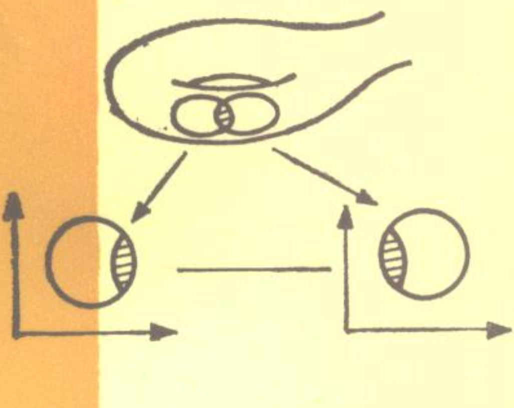
微分流形与黎曼几何

梅向明　贺龙光　著



北京师范学院出版社

微分流形与黎曼几何

梅向明　贺龙光

北京师范学院出版社
1987年·北京

内容提要

本书是高校数学系选修课教材和微分几何方向硕士研究生基础课教材。第一部分微分流形，主要介绍多元微积分、微分流形、流形上的积分、de Rham定理和Hodge定理；第二部分黎曼几何，主要介绍黎曼联络、黎曼曲率、测地线、李导数与Killing向量场，常曲率黎曼空间。

微分流形与黎曼几何

梅向明　贺龙光

北京师范学院出版社出版

（北京阜成门外花园村）

新华书店首都发行所发行　　国防工业出版社印刷厂印刷

开本850×1168 1/32　印张8.375　字数214千

1987年7月第1版　　1987年7月第1次印刷

印数　1—1500册

统一书号　7427·078　　定价　2.40元

目　　录

第一部分　微分流形

第二部分　黎曼几何

第一部分　微分流形

第一章　多元微积分

§1.1　向量空间

1.1.1　向量空间和它的对偶空间

1. 向量空间

实数域R上的**向量空间**是一个集合V，其中定义了运算：

加法：$V\times V\to V$，$(x,y)\mapsto x+y$，$\forall x,y\in V$

数乘：$R\times V\to V$，$(a,x)\mapsto ax$，$\forall a\in R$，$x\in V$它们满足以下公理：

（1）V对于加法构成一个交换群；

（2）对于$\forall a,b\in R$，$x\in V$，$(ab)x=a(bx)$；

（3）对于$\forall a,b\in R$，$x\in V$，$(a+b)x=ax+bx$；

（4）对于$\forall a\in R,x,y\in V$，$a(x+y)=ax+ay$；

（5）对于$\forall x\in V$，$1\cdot x=x$，$0\cdot x=0$。

V中的元素称为**向量**．对于$\forall x\in V$，它的逆元素是$(-1)x=-x$，我们还定义V中的减法为$x-y=x+(-y)=x+(-1)\cdot y$。

实例

（1）$V=n$维数空间$R^n=\{(x^1,\cdots,x^n)$：$x^i\in R\}$在其中我们分别定义加法和数乘法为：

设$x=(x^1,\cdots,x^n)$，$y=(y^1,\cdots,y^n)$

$$x+y=(x^1+y^1,\cdots,x^n+y^n)$$

对于$\forall a\in R$，$ax=(ax^1,\cdots,ax^n)$

容易证明：公理（1）～（5）成立。

（2）设A是一集合，X是一向量空间，

$$S=X^A=\{\text{映射 } f: A\to X\}$$

对于$\forall k\in R$，f、$g\in X^A$，我们定义X^A中的加法和数乘如下：

$$(f+g)(a)=f(a)+g(a),\ \forall a\in A$$

$$(kf)(a)=k\cdot f(a),\ \forall a\in A$$

则X^A是一个向量空间。

设V是一向量空间，V的子集$T\subset V$称为V的**向量子空间**，如果对于$\forall x, y\in T$和$a\in R$，我们有：$x+y\in T$和$ax\in T$。

2．线性映射

设A和B是两个集合，映射$f: A\to B$称为**一一**的，如果$f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$，对于$\forall a、b\in A$；称为**在上的**，如果对于$\forall b\in B$，存在$a\in A$使得$f(a)=b$。一一映射又称为**内射**，如果一个映射既是一一的，又是在上的，则称为**双内射**。

设V和T是两个向量空间，映射$f: V\to T$称为**同态**，如果对于$\forall x, y\in V$，$a\in R$，满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

$$f(ax)=af(x)$$

同态映射又称为**线性映射**。

$\mathrm{Ker} f=\{x\in V: f(x)=0\}$称为线性映射$f$的核；$\mathrm{Im} f=\{f(x): x\in V\}$称为$f$的象。容易证明：$\mathrm{Ker} f$和$\mathrm{Im} f$分别是$V$和$T$的向量子空间，下面的命题是显然的。

命题1　线性映射$f: V\to T$是一一的，当且仅当$\mathrm{Ker} f=0$；是在上的当且仅当$\mathrm{Im} f=T$；是同构的当且仅当$\mathrm{Ker} f=0$并且$\mathrm{Im} f=T$。

3．基和维数

设V是一向量空间，A是V的子集，如果对于A中任何有限集$x_1, \cdots x_n$，有

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0,\ a_i\in R$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

则称A为线性无关的。

如果V中存在线性无关集 $\{e_1, \cdots e_n\}$，使得对于$\forall\ x \in V$，可以找到一组实数 $\{a_1, \cdots a_n\}$

$$x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

则称向量空间V具有有限维数n，并且集 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 称为V的一组基。数组$\{a_1, \cdots, a_n\}$称为向量x关于基$\{e_1, \cdots, e_n\}$的坐标。

命题 2 如果V是有限维的，则V的每一组基中的元素的个数是相同的。

证明：设$\{e_1, \cdots, e_n\}$是V的一组基，$\{f_1, \cdots, f_n, \cdots, f_m\}$ 是V的另一组基。由于

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

则$\{f_1, \cdots, f_m\}$线性相关，与基的定义矛盾，所以$m = n$。‖

以下我们将只考虑有限维向量空间。设V是n维向量空间，固定V中一组基$\{e_1, \cdots, e_n\}$，对于$\forall\ x \in V$，它可以表示成

$$x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

这种表示法是唯一的，因为如果另有

$$x = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$$

则有 $(a_1 - b_1)e_1 + \cdots + (a_n - b_n)e_n = 0$；又因为$\{e_1, \cdots, e_n\}$是线性无关的，所以 $a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n$。因此，给出$n$维向量空间$V$的一组基$\{e_1, \cdots, e_n\}$，对于$\forall\ x \in V$，它对应于唯一一组有序实数，即$x$的坐标 $(a_1, \cdots, a_n)$，向量的坐标表示定义了映射

$$\varphi:\ V \to R^n, \quad x \mapsto (a_1, \cdots, a_n)$$

容易证明，这是向量空间V和R^n的同构。于是我们得到

命题 3 任何n维向量空间V同构于n维数空间 R^n。

4．向量空间的对偶空间

设V是n维向量空间，线性映射$f: V \to R$又称为线性函数。

考虑V上全体线性函数的集合

$$V^*=\{f: V\to R \mid f\text{ 是线性函数}\}$$

在其中定义加法和数乘如下：给出线性函数$f, g: V\to R$，定义

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad \forall x\in V$$
$$(a\cdot f)(x)=a\cdot f(x)\qquad \forall x\in V, a\in R$$

则V^*也是一向量空间，称为向量空间V的**对偶空间。**

命题 4 $\dim V^*=\dim V=n$

证明：设V的一组基是$\{e_1,\cdots,e_n\}$，定义映射φ：$V^*\to R^n$，$\varphi(f)=(f(e_1),\cdots,f(e_n))$

先证明这是一线性映射：

$$\varphi(f+g)=((f+g)(e_1),\cdots,(f+g)(e_n))$$
$$=(f(e_1),\cdots,f(e_n))+(g(e_1),\cdots,g(e_n))$$
$$\varphi(af)=(a\cdot f(e_1),\cdots,a\cdot f(e_n))$$
$$=a\cdot(f(e_1),\cdots,f(e_n))$$

再证明这个映射是双内射。任给$(a_1,\cdots,a_n)\in R^n$，定义映射f：$V\to R$为：$f(e_1)=a_1,\cdots,f(e_n)=a_n$即可，命题证毕.‖

给出V的一组基$\{e_1,\cdots,e_n\}$，考虑V^*的一组基$\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$，定义为

$$e_i^*(e_j)=\delta_{ij},\ (i, j=1, 2,\cdots, n)$$

容易证明$\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$是线性无关的，它们称为V^*中$\{e_1,\cdots,e_n\}$的**对偶基**.

命题 5 $V^{**}=(V^*)^*$自然同构于V.

证明：定义映射φ：$V\to V^{**}$如下：任给$x\in V$，定义

$$\varphi(x)(x^*)=x^*(x),\quad \text{对于}\forall x^*\in V^*$$

先证明φ是线性映射. 对于$\forall x, y\in V$和$a\in R$，

$$\varphi(x+y)(x^*)=x^*(x+y)=x^*(x)+x^*(y)$$
$$=\varphi(x)(x^*)+\varphi(y)(x^*)$$
$$=(\varphi(x)+\varphi(y))(x^*)$$
$$\varphi(a\cdot x)(x^*)=x^*(ax)=a\cdot x^*(x)=a\varphi(x)(x^*)$$

$$=(a\varphi(x))(x^*)$$

再证明φ是一一的，即$\mathrm{Ker}\varphi=0$。设$x\in\mathrm{Ker}\varphi$，则

$$\varphi(x)(x^*)=0,\quad\forall x^*\in V^*\Rightarrow x^*(x)=0,\quad\forall x^*\in V^*$$

$$\therefore x=0$$

最后证明φ是在上的。设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是V的一组基，$\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$是V^*中的对偶基，任给$\bar{x}\in V^{**}$，命$\bar{x}(e_i^*)=a_i$，取$x=a_1e_1+\cdots+a_ne_n\in V$，对于$\forall x^*\in V^*$，设$x^*=x_1e_1^*+\cdots+x_ne_n^*$

$$\begin{aligned}x^*(x)&=a_1x^*(e_1)+\cdots+a_nx^*(e_n)\\&=a_1x_1+\cdots+a_nx_n\\\bar{x}(x^*)&=x_1\bar{x}(e_1^*)+\cdots+x_n\bar{x}(e_n^*)\\&=x_1a_1+\cdots+x_na_n\end{aligned}$$

所以$x^*(x)=\bar{x}(x^*)$，因此$\varphi(x)=\bar{x}$。命题证毕。‖

1.1.2 向量空间的张量积

1. 向量空间的张量积

设n维向量空间V，以$\{e_1,\cdots,e_n\}$为基，m维向量空间W，以$\{f_1,\cdots,f_m\}$为基。现以mn个元素$\{e_i\otimes f_j|\ i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m\}$为基，通过线性组合构成向量空间，记成$V\otimes W$，其中的加法运算即是使分量对应相加，数乘运算即是分别乘以每个分量。显然这是mn维向量空间，而且有自然同构$V\otimes W\cong R^{mn}$。

对于任何向量$v=\sum\limits_{i=1}^{n}v_ie_i\in V$和$w=\sum\limits_{j=1}^{m}w_jf_j\in W$，定义它们的张量积为

$$v\otimes w=\sum_{i,j}v_iw_je_i\otimes f_j\in V\otimes W$$

因此，我们也把向量空间$V\otimes W$称为向量空间V和W的张量积。

2. (r,s)型张量

给出n维向量空间V，$\{e_1,\cdots,e_n\}$是V的一组基，V^*是V的对偶空间，它有对偶基$\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$。考虑张量积

$$V^r_s = \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r\text{个}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{s\text{个}}$$

它是一个n^{r+s}维向量空间，并有一组基底

$$\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^*_{j_1}\otimes\cdots\otimes e^*_{j_s}\}$$

其中 $i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s = 1, \cdots, n$

对于任何元素$T\in V^r_s$，它可以表示成

$$T = \sum_{i, j=1}^{n} T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^*_{j_1}\otimes\cdots\otimes e^*_{j_s}$$

特别地

$$V^1_0 = V,\quad V^0_1 = V^*$$

我们把V^r_s中的元素称为**r阶逆变、s阶协变张量**，简称（r，s）型**张量**．V中元素称为**逆变向量**，V^*中的元素称为**协变向量**．

V^*的元素是线性映射$V\to R$，V的元素可看成线性映射$V^*\to R$，类似地，V^r_s的元素可以看成多线性映射．设$T\in V^r_s$，则映射

$$T:\ \underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{r\text{个}}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{s\text{个}}\to R$$

定义为

$$T(v^*_1, \cdots, v^*_r, w_1, \cdots, w_s)$$

$$= \sum_{i, j=1}^{n} T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\, e_{i_1}(v^*_1)\cdots e_{i_r}(v^*_r)e^*_{j_1}(w_1)\cdots e^*_{j_s}(w_s)$$

它显然是多线性的．特别地

$$T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = T(e^*_{i_1}, \cdots, e^*_{i_r}, e_{j_1}, \cdots, e_{j_s})$$

如果另取V的一组基$\{f_1, \cdots, f_n\}$，在V^*中有对偶基$\{f^*_1, \cdots, f^*_n\}$，则有基变换公式

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a^j_i e_j,\qquad f^*_i = \sum_{j=1}^{n} b^i_j\cdot e^*_j,\qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

其中 $(b_j^i)^t=(a_i^j)^{-1}$. 设

$$T=\sum_{k,\ l=1}^{n} T'^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s} f_{k_1}\otimes\cdots\otimes f_{k_r}\otimes f^*_{l_1}\otimes\cdots\otimes f^*_{l_s}$$

则

$$T'^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}=T(f^*_{k_1},\cdots,f^*_{k_r},f_{l_1},\cdots,f_{l_s})$$

$$=\sum_{i,\ j=1}^{n} b^{k_1}_{i_1}\cdots b^{k_r}_{i_r} a^{j_1}_{l_1}\cdots a^{j_s}_{l_s} T(e^*_{i_1},\cdots,e^*_{i_r},e_{j_1},\cdots,e_{j_s})$$

于是我们得到张量的分量的坐标变换公式

$$T'^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}=\sum_{i,\ j=1}^{n} b^{k_1}_{i_1}\cdots b^{k_r}_{i_r} a^{j_1}_{l_1}\cdots a^{j_s}_{l_s} T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$$

特别地，设 $v\in V$，$w\in V^*$，命

$$v=\sum_i v^i e_i=\sum_k v'^k f_k$$

$$w=\sum_j w_j e^*_j=\sum_l w'_l f^*_l$$

则有逆变向量和协变向量的分量的坐标变换公式

$$v'^k=\sum_i b^k_i v^i,\quad w'_l=\sum_j a^j_l w_j$$

3. 向量空间 $L(E,F)$

设 E 和 F 分别是 n 维和 m 维的向量空间，全体线性映射 f：$E\to F$ 所构成的集合记成 $L(E,F)$，在其中引进加法和数乘如下：设 f,g：$E\to F$ 是线性映射，定义

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \forall x\in E$$

$$(a\cdot f)(x)=a\cdot f(x),\ \forall x\in E,\quad a\in R$$

则 $L(E,F)$ 是一向量空间。命 E^* 是 E 的对偶空间，则有同构

关系

$$L(E,F)\approx E^*\otimes F$$

证明：设E的一组基是$\{e_1,\cdots,e_n\}$，E^*中的对偶基是$\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$，F中一组基是$\{f_1,\cdots,f_m\}$，任给线性映射$f:E\to F$，命

$$f(e_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}f_j,\ (i=1,\cdots,n),\ 设f'=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}e_i^*\otimes f_j\in$$

$E^*\otimes F$，则φ：$f\mapsto f'$是$L(E,F)$到$E^*\otimes F$的同构。

因此$L(E,F)=E^*\otimes F$是mn维向量空间，它的一组基是$\{e_i^*\otimes f_j;\ i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m\}$。

1.1.3 欧氏空间和范数

1. 欧氏空间

设E是n维向量空间，定义双线性函数φ：$E\times E\to R$：

$$\varphi(ax_1+bx_2,y)=a\varphi(x_1,y)+b\varphi(x_2,y)$$

$$\varphi(x,ay_1+by_2)=a\varphi(x,y_1)+b\varphi(x,y_2)$$

其中$a,b\in R$，$x,x_1,x_2,y,y_1,y_2\in E$。如果这个双线性函数是对称和正定的，即

$$\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$$

$\varphi(x,x)\geqslant 0$，而且$\varphi(x,x)=0$当且仅当$x=0$，则$\varphi(x,y)$称为向量x和y的内积，记成(x,y)或$x\cdot y$，定义了内积的向量空间称为**欧氏空间**。

实例：n维数空间R^n是欧氏空间，其中可以定义欧氏内积如下：

设$x=(x^1,\cdots,x^n)$，$y=(y^1,\cdots,y^n)$，定义

$$x\cdot y=x^1y^1+\cdots+x^ny^n$$

命题 6 （Schwarz不等式） 对于欧氏空间E中任意向量x和y，我们有不等式

$$x\cdot y\leqslant\sqrt{(x,x)(y,y)}$$

证明：对于任何实数a，

$$0\leqslant(x-ay,\ x-ay)=(x,x)-2a(x,y)+a^2(y,y)$$

如果$y=0$,则不等式显然成立;如果$y\neq0$,命$a=\sqrt{(x,x)/(y,y)}$,则不等式也成立。‖

附记:要使Schwarz不等式中等号成立,必须有$y=ax$或$x=by$。

欧氏空间E中两向量x和y称为**正交的**,如果$x\cdot y=0$。E的子集A称为**标准正交的**,如果对于$\forall x\in A$,$x\cdot x=1$,对于$\forall x,y\in A$,$x\neq y$,$x\cdot y=0$,即A中不同的向量是正交的。

命题7 n维欧氏空间中有标准正交基。

证明:E中存在一组基$\{f_1,\cdots,f_n\}$。首先取

$$e_1=f_1/\sqrt{(f_1,f_1)}$$

然后用归纳法,假定在$\{f_1,\cdots,f_k\}$所张的E的子空间中标准正交基$\{e_1,\cdots,e_k\}$已作好,即

$$e_i\cdot e_j=\delta_{ij},\ (i,j=1,\cdots,k)$$

命

$$y_{k+1}=f_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}(f_{k+1},e_i)e_i$$

则y_{k+1}分别与$e_1,\cdots,e_k$正交,然后命

$$e_{k+1}=y_{k+1}/\sqrt{(y_{k+1},y_{k+1})}\ .‖$$

两个欧氏空间E和F称为**同构的**,如果存在向量空间同构

$$\varphi:\ E\to F$$

它保持内积不变,即对于$\forall x,y\in E$,$\varphi(x)\cdot\varphi(y)=x\cdot y$。

命题8 两个n维欧空间是同构的。

证明:设E和F是n维欧氏空间,分别取E和F的标准正交基$\{e_1,\cdots,e_n\}$和$\{f_1,\cdots,f_n\}$,定义线性映射$\varphi:E\to F$使得$\varphi(e_i)=f_i$,$(i=1,\cdots,n)$则φ是向量空间同构。命$x,y\in E$,$x=x^1e_1+\cdots+x^ne_n$,$y=y^1e_1+\cdots+y^ne_n$,则

$$\begin{aligned}\varphi(x)\cdot\varphi(y)&=\varphi(x^1e_1+\cdots+x^ne_n)\,\varphi(y^1e_1+\cdots+y^ne_n)\\&=(x^1f_1+\cdots+x^nf_n)(y^1f_1+\cdots+y^nf_n)\\&=x^1y^1+x^2y^2+\cdots+x^ny^n=x\cdot y\,\|\end{aligned}$$

2．范数

设V是n维向量空间，定义V上的正实值函数λ：$V\to R^+$使得对于$\forall\ x,\ y\in V$，

（a）$\lambda(x)\geqslant 0$，且如果$x\neq 0$，则$\lambda(x)>0$

（b）$\lambda(ax)=|a|\lambda(x)$，$\forall\ a\in R$

（c）$\lambda(x+y)\leqslant\lambda(x)+\lambda(y)$

则$\lambda(x)$称为向量x的**范数**，记成$|x|$或$\|x\|$，定义了范数的向量空间，称为**赋范向量空间**。

设E是n维欧氏空间，我们定义E上的正实值函数为：对于$\forall\ x\in E$

$$|x|=\sqrt{(x,\ x)}$$

容易看出，$|x|$是x的一种范数，称为欧氏范数，其中条件（c）得自Schwarz不等式

$$\begin{aligned}|x+y|^2&=(x+y)\cdot(x+y)=|x|^2+2(x,\ y)+|y|^2\\&\leqslant|x|^2+2|x||y|+|y|^2=(|x|+|y|)^2\end{aligned}$$

在赋范向量空间上我们可以定义任两向量x和y的距离：

$$d(x,\ y)=|x-y|$$

容易证明，这种定义的距离满足：

（a）$d(x,\ y)\geqslant 0$，而且$d(x,\ y)=0$当而仅当$x=y$

（b）$d(x,\ y)=d(y,\ x)$，（距离的对称性）

（c）$d(x,\ y)+d(y,\ z)\geqslant d(x,\ z)$，（三角不等式）。

特别地，对于n维数空间R^n，它的范数定义如下：命$x=(x^1,\cdots,x^n)$，则

$$|x|=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2}$$

3．对偶空间的范数

设V是n维赋范向量空间，V^*是V的对偶空间，定义V^*中范数如下：设$x^*\in V^*$，命

$$|x^*|=\sup\{|x^*(x)|:\ x\in V,\ |x|\leqslant 1\}<+\infty$$

命题 9 $|x^*|$是V^*中的一个范数。

证明：只须证明$|x^*|$满足范数的条件：

(a) 因为$|x^*(x)|\geqslant 0$，所以$|x^*|\geqslant 0$；如果$|x^*|=0$，则对于$\forall x\in V$，$x^*(x)=0\Rightarrow x^*=0$。

(b) $|(ax^*)(x)|=|a||x^*(x)|\Rightarrow|ax^*|=|a||x^*|$

(c) 对于任意x^*，$y^*\in V^*$，

$$\begin{aligned}|x^*+y^*|&=\sup\{|(x^*+y^*)(x)|:\ x\in V,\ |x|\leqslant 1\}\\&\leqslant\sup\{|x^*(x)|+|y^*(x)|:\ x\in V,|x|\leqslant 1\}\\&\leqslant\sup\{|x^*(x)|:\ x\in V,\ |x|\leqslant 1\}\\&\quad+\sup\{|y^*(x)|:\ x\in V,\ |x|\leqslant 1\}\\&=|x^*|+|y^*|.\ \|\end{aligned}$$

若映射φ：$V\to V^{**}$定义为$\varphi(x)(x^*)=x^*(x),\forall x\in V$，$x^*\in V^*$，则这个映射是保范的，即$|\varphi(x)|=|x|$。

如果E是n维欧氏空间，$\{e_1,\cdots,e_n\}$是E的标准正 交基，对于任何$x\in V$，$x=a_1e_1+\cdots+a_ne_n$，则有欧氏范数

$$|x|=\sqrt{(x,\ x)}=(a_1^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}$$

设E^*是E的对偶空间，$\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$是E^*中的对偶基，在E^*中定义内积，使得

$$e_i^*\cdot e_j^*=\delta_{ij},\ (i,j=1,\cdots,n)$$

则对于任意$x^*,y^*\in E^*$，我们有

$$\begin{aligned}x^*&=a_1e_1^*+\cdots+a_ne_n^*\\y^*&=b_1e_1^*+\cdots+b_ne_n^*\\x^*\cdot y^*&=a_1b_1+\cdots+a_nb_n\end{aligned}$$

E^*中的欧氏范数是

$$|x^*|=\sqrt{(x^*,\ x^*)}=(a_1^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}$$

命题10 n维欧氏空间E的对偶空间E^*也是n维欧氏

空间。

证明：只须证明上面定义的对偶空间E^*的范数与E^*的欧氏范数一致。为此，命$x=c_1e_1+\cdots+c_ne_n\in V$，$x^*=a_1e_1^*+\cdots+a_ne_n^*\in V^*$，则

$$x^*(x)=(a_1e_1^*+\cdots+a_ne_n^*)(c_1e_1+\cdots+c_ne_n)$$
$$=a_1c_1+\cdots+a_nc_n$$

根据Schwarz不等式

$$|x^*(x)|=\left|\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right)^{1/2}$$

取$|x|=1$，则$c_1^2+\cdots+c_n^2=1$，所以

$$|x^*|=\sup\{|x^*(x)|;\ x\in V,\ |x|\leqslant1\}\leqslant(a_1^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}$$

取适当的x使得$c_i=\lambda a_i$，其中$\lambda=1/(a_1^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}$，则Schwarz不等式变成等式，所以

$$|x^*|=(a_1^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}=\sqrt{x^*\cdot x^*}$$

因此对偶空间E^*的范数$|x^*|$就是E^*的欧氏范数，这说明E^*是欧氏空间。‖

附记 类似于对偶空间的情形，我们可以定义空间$L(E,F)$的范数。设E,F是赋范向量空间，对于任何线性映射$f:E\to F$，我们定义它的范数是

$$|f|=\sup\{|f(x)|;\ x\in E,\ |x|\leqslant1\}$$

当$F=R$时，这个范数重合于对偶空间的范数。

1.1.4 欧氏空间的子集

1. 开集和闭集

设E是n维欧氏空间，$\{e_1,\cdots,e_n\}$是E的一组标准正交基，对于$\forall x\in E$

$$x=x^1e_1+\cdots+x^ne_n$$
$$|x|=[(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2]^{1/2}$$

E中以x为中心$r>0$为半径的开实球是