胡征 樊昌信编著

沃尔什函数及其在通信中的应用

人民邮电出版社

沃尔什函数及其在通信中的应用

胡　征　樊昌信 编著

人民邮电出版社

内 容 提 要

本书讲述沃尔什函数的基本理论，以及其在电子技术，特别是通信技术中的应用；介绍了沃尔什函数的定义、性质及变换等方面的重要基础知识，以及近年来国内外有关研究成果，如利于天线小型化的沃尔什电磁波的辐射、可以区别目标为金属或非金属性质的沃尔什波传播理论、用沃尔什波形进行调制、复用和编码的信号设计方法、用沃尔什变换进行图象和语言处理，以及沃尔什函数在扩展频谱技术、电路设计等等方面的应用。本书取材新颖、内容丰富、深入浅出，适于电信工程技术人员、高等院校通信系教师和毕业生阅读。

沃尔什函数及其在通信中的应用

胡 征 樊昌信 编著

*

人 民 邮 电 出 版 社 出 版

北京东长安街27号

北 京 印 刷 一 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

*

开本：787×1092 1/32　　1980年6月第一版

印张：13 24/32　页数：220　1980年6月北京第一次印刷

字数：313 千字　　印数：1—5,000册

统一书号：15045·总2284-无662

定价：1.40元

前　言

沃尔什(Walsh)函数是一种非正弦的完备正交函数系。由于它仅有两个可能的取值：+1和−1，比较适于用来表达和处理数字信号，故在电子技术走向数字化和集成化的今天，它的应用颇为人们所重视。近十多年来，许多有关研究已经为这种函数在电子技术各个领域中的应用开辟了新的前景。

但是，沃尔什函数并不是什么新出现的事物。远在廿世纪初叶(1905年)，福尔(F. F. Fowle)为解决架空明线线路交叉以防止串话的过程中，就已经发现这种函数了。至1923年沃尔什(J. L. Walsh)又提出关于这种函数的完整数学理论，将沃尔什函数引入数学界。此后，约有四十年的时间，沃尔什函数在电子技术中没有得到大的发展与应用，以致在电子工程技术人员中对于这种函数一般都是陌生的。在电子技术中，半个世纪以来，三角函数系是广泛应用的一种最重要的数学工具。正弦波形是电子技术中最广泛应用的波形。

不过，这并不是一贯如此的自然规律。在电信技术中，最早应用的波形并不是正弦波形。在早期的有线电报通信中，采用机械开关（电键）产生矩形电流脉冲，用继电器一类电磁机械装置进行电报信号的再生或检测。赫芝（Hertz）使用指数函数对于偶极子辐射场得出了马克斯威尔方程的解，但他从未能产生出正弦波。他进行的电波传播实验是用我们今天称之为有色噪声进行的。

虽然人们较早已经知道使用线圈制作电感器，但是直到十九世纪末叶找到比莱顿瓶和金属球更实用的制作电容器的方法

以后，才能够做出分离不同频率的正弦波的实际谐振电路。至1915年才有使用线圈和电容器制作的低通和高通滤波器，从而为应用正弦波开辟了新的领域。一般说来，正弦函数在电信中的广泛应用，是和电容器、电感器这类线性非时变元件及其所组成的谐振电路密切相关的。后者与前者相适应或“匹配”，从而促进了前者的发展。

六十年代以来，数字技术发展特别迅速，除了电子计算机主要向数字电子计算机方向发展外，通信、雷达、仪表等等技术也在走向数字化。这个变化，使有源开关电路已经成为一种极其有用的线性时变元件，而取值离散的二值函数，与开关电路这类时变元件及由其组成的数字电路相适应或相“匹配”，其中有代表性的一种重要数学函数就是沃尔什函数。可以预期，数字技术的继续发展，必然会促进沃尔什函数在电信中的广泛应用与发展。

举例来说，傅里叶分析在电信技术中多年来占有重要地位。傅里叶分析主要用于将一时间信号分解为许多不同频率的正弦和余弦分量，从而使人们可以从频域来分析和处理信号。对于连续波形，这种分析是方便的。但是，对于矩形脉冲组成的数字波形，即使它能展开成傅里叶级数，这个级数的收敛也是慢的，或者说，要用相当多的项才能逼近原波形。在处理二维图象（例如，电视中的黑白棋盘格图形）的时候，傅里叶分析更显得不适应。在这些情况中，采用类似傅里叶级数的沃尔什级数就较为方便。又例如，与快速傅里叶变换(FFT)相仿，存在快速沃尔什变换(FWT)。由于后者仅涉及加减法运算，而前者还要进行复数乘法运算，故后者的运算有可能比前者更快。因此，在数字信号处理中，对处理的速度要求更高时，快速沃尔什变换就可能更为适用。

由于上述一些原因，近十几年来，研究沃尔什函数在电子技术中应用的人，和前四十年相比，大为增加。研究的领域涉及通信、雷达、图象处理、模式识别、计算机、声纳、光学系统、仪表、遥感、电子医学、地质勘探等等许多方面。这些研究还有待深入，目前仍然处于探索前进的阶段。

本书不拟全面论述沃尔什函数及其应用，只着重于介绍沃尔什函数的基本理论、它在通信技术中应用的可能性和各种应用的基本原理，并适当涉及它在其他重要领域的应用问题。为了便于广大通信工程技术人员的理解和阅读，在写法上着重于基本概念的建立和应用，而不去过分追求数学分析的严谨性。在内容取材上，我们注意尽量反映国内近年来在这方面的研究成果。

本书第一至六章是胡征执笔的，第七至十一章是樊昌信执笔的。我们之所以能够写出本书，反映一点在这方面的学习心得和研究体会，是与我院有关领导、教师、工人、学生的热情支持分不开的。借此机会，谨向他们表示感谢。特别是要向最初阶段就参加我们的研究工作的屈家淦、刘永华、文成义、刘德修、王仰厚同志，及经常为我们搜集与提供有关参考材料的金有巽、刘光明等同志表示感谢。

编者

1979年4月于西北电讯工程学院

目　录

第一章 预备知识

我们将后面各章要用到的、但又不便在用到时再介绍的那些内容，集中在这里首先谈一下。姑且叫做预备知识。由于这些内容是不同章节所需要的，难免显得零散，缺乏系统性。

1.1 正交函数系[1.1-1.2]

由实函数* $\varphi(0, t)$，$\varphi(1, t)$，$\cdots$所组成的函数系$\{\varphi(n, t)\}$，如果满足下列条件，则称为在区间 $t_a \leqslant t < t_b$ 是正交函数系：

$$\int_{t_a}^{t_b} \varphi(n,t)\cdot\varphi(m,t)dt = A_n\delta_{nm} \tag{1.1.1}$$

其中当 $n=m$ 时，$\delta_{nm}=1$；当 $n\neq m$ 时，$\delta_{nm}=0$；A_n 为常数，且不等于零。

如果 $A_n=1$，则此函数系不仅是正交的，而且是归一化的。合称为归一化正交函数系。

非归一化正交函数系总可以化为归一化正交函数系。例如，在(1.1.1)式中，如果 A_n 不等于 1，则 $\{\varphi(n,t)\}$ 为非归一化正交函数系，而$\{A_n^{-\frac{1}{2}}\varphi(n,t)\}$就是归一化正交函数系了。

正交函数系是线性独立的函数系的特殊情况。由 m 个函数所组成的函数系$\{\varphi(n,t)\}$，如果满足下列方程，则称为在区间 $t_a \leqslant t \leqslant t_b$ 是线性不独立的：

$$\sum_{n=0}^{m-1} c(n)\varphi(n,t) \equiv 0 \tag{1.1.2}$$

* 可以推广到复函数。

其中所有常数 $c(n)$不得全为零。

否则，称为线性独立。

从 m 个线性独立函数 $\{g(n,t)\}$，总可以化出 m 个正交函数 $\{\varphi(n,t)\}$。这一过程称为正交化。正交化的方法是：将 $\varphi(n,t)$写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi(0,t)=c_{00}g(0,t)\\
&\varphi(1,t)=c_{10}g(0,t)+c_{11}g(1,t)\\
&\varphi(2,t)=c_{20}g(0,t)+c_{21}g(1,t)+c_{22}g(2,t)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi(m-1,t)=c_{m-1,0}g(0,t)+\cdots+c_{m-1,m-1}g(m-1,t)
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.3}$$

将(1.1.3)式代入(1.1.1)式，就得到足够的方程，可以确定常数 c_{pq}。

例 1：$\varphi(0,t)=\sin t$，$\varphi(1,t)=\cos t$，

$$\varphi(2,t)=\sin(t+\alpha)$$

这三个函数是线性不独立的，因为

$$\varphi(0,t)\cos\alpha+\varphi(1,t)\sin\alpha-\varphi(2,t)\equiv 0$$

例 2：$g(0,t)=1, g(1,t)=t, g(2,t)=t^2$

这三个函数是线性独立的，因为

$$c(0)\cdot 1+c(1)\cdot t+c(2)t^2\not\equiv 0$$

除非 $c(0), c(1), c(2)$都为零。

下面我们从 $g(0,t)$，$g(1,t)$，$g(2,t)$，化出正交函数系 $\varphi(0,t)$，$\varphi(1,t)$，$\varphi(2,t)$[1,7]。为计算方便起见，设正交区间为 $0\leqslant t\leqslant 1$。

令
$$\left.\begin{aligned}\varphi(0,t)&=c_{00}g(0,t)\\ \varphi(1,t)&=c_{10}g(0,t)+c_{11}g(1,t)\\ \varphi(2,t)&=c_{20}g(0,t)+c_{21}g(1,t)+c_{22}g(2,t)\end{aligned}\right\}\tag{1.1.4}$$

将(1.1.4)式代入(1.1.1)式，且令 $A_n=1$，可得一组解为

$c_{00}=1, c_{10}=1, c_{11}=-2, c_{20}=\sqrt{5}$， $c_{21}=-6\sqrt{5}$，
$c_{22}=6\sqrt{5}$。

故所化出的归一化正交函数为

$$\varphi(0,t)=1$$
$$\varphi(1,t)=1-2t$$
$$\varphi(2,t)=\sqrt{5}-6\sqrt{5}\,t+6\sqrt{5}\,t^2。$$

正、余弦函数 $\sin 2\pi nt, \cos 2\pi nt, n=0,1,2\cdots$ 在区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 或 $-\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$ 组成正交函数系，且为完备的(意义详见下文)。$\sqrt{2}\sin 2\pi nt$，$\sqrt{2}\cos 2\pi nt$，$n=0,1,2,\cdots$，则组成完备的归一化正交函数系。

图 1.1.1 所示的互不重迭的迟延脉冲是正交函数系。其幅度乘以 $\sqrt{5}$ 就归一化了。在取样定理中，我们遇到的 $\frac{\sin x}{x}$ 函数系，也是正交函数系，如图 1.1.2 所示。

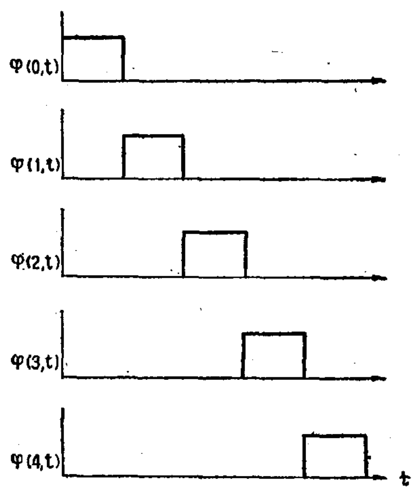

图 1.1.1 正交脉冲 $\varphi(n,t)$

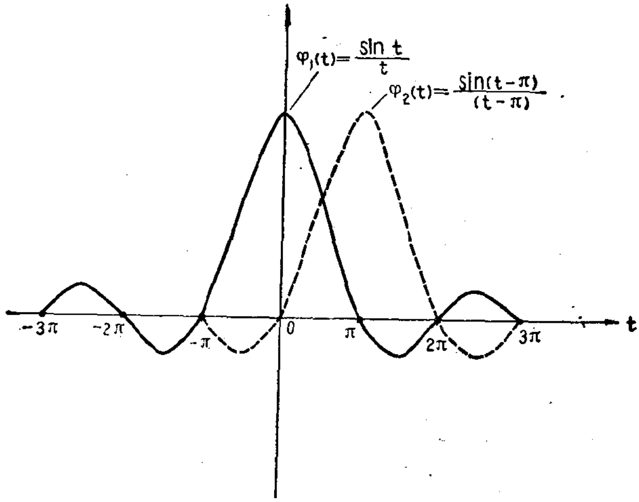

图 1.1.2 $\frac{\sin x}{x}$正交函数系

1.2 广义傅里叶级数

一个满足一定条件的函数，可以展开成完备的正交函数系的级数，一如可以展开成傅里叶级数一样。我们称这种展开式为广义傅里叶级数。本节我们只从形式上介绍这种展开的方法、意义和有关主要问题，不涉及纯数学问题，如展开的条件和收敛性等。

设函数 $f(t)$ 可以展开成完备的归一化正交函数系 $\{\varphi(n,t)\}$的级数：

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)\varphi(n,t) \tag{1.2.1}$$

将上式乘以 $\varphi(n,t)$，并在$\{\varphi(n,t)\}$ 的正交区间 $t_a \leqslant t \leqslant t_b$ 内积

分，我们可以得到系数 $a(n)$的值：

$$a(n)=\int_{t_a}^{t_b} f(t)\varphi(n,t)dt \tag{1.2.2}$$

(1.2.1)和(1.2.2)式是展开过程中所要用到的两个公式。我们注意到,(1.2.2)式与一般展开成傅里叶级数中求系数的公式，是十分相似的。

用(1.2.2)式去确定系数 $a(n)$,用(1.2.1)式的有限项去代表 $f(t)$，是否能够很好地代表 $f(t)$？我们说，在最小均方误差的准则下，这将是最好的代表。这里，当然我们指正交函数系$\{\varphi(n,t)\}$已经事先规定。假定另有一个更好地代表 $f(t)$ 的级数为$\sum\limits_{n=0}^{m-1} b(n)\varphi(n,t)$，则此级数与 $f(t)$ 的均方误差Q为

$$\begin{aligned}
Q&=\int_{t_a}^{t_b}\left[f(t)-\sum_{n=0}^{m-1} b(n)\varphi(n,t)\right]^2 dt\\
&=\int_{t_a}^{t_b} f^2(t)dt-2\sum_{n=0}^{m-1} b(n)\int_{t_a}^{t_b} f(t)\varphi(n,t)dt\\
&\quad+\int_{t_a}^{t_b}\left[\sum_{n=0}^{m-1} b(n)\varphi(n,t)\right]^2 dt\\
&=\int_{t_a}^{t_b} f^2(t)dt-2\sum_{n=0}^{m-1} b(n)a(n)+\sum_{n=0}^{m-1} b^2(n)\\
&=\int_{t_a}^{t_b} f^2(t)dt-\sum_{n=0}^{m-1} a^2(n)+\sum_{n=0}^{m-1}[b(n)-a(n)]^2
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

当 $b(n)=a(n)$ 时，上式右边第三项为零，亦即均方误差Q为最小，故我们的结论是正确的。

从 (1.2.3) 式，在 $b(n)=a(n)$ 的条件下，可得 贝 塞尔

(Bessel)不等式：

$$\sum_{n=0}^{m-1} a^2(n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a^2(n) \leqslant \int_{t_a}^{t_b} f^2(t)\,dt \qquad (1.2.4)$$

正交函数系$\{\varphi(n,t)\}$是完备的这句话，包含什么意思？它有何重要性？我们现在来回答这些问题。

设函数$f(t)$按(1.2.1)和(1.2.2)式展开成正交函数系$\{\varphi(n,t)\}$的级数。如果有限项展开式的均方误差Q，随着有限项m的增加而趋近于零，即

$$\lim_{m\to\infty}\int_{t_a}^{t_b}\left[f(t)-\sum_{n=0}^{m-1} a(n)\varphi(n,t)\right]^2 dt=0 \qquad (1.2.5)$$

那么，这个正交函数系$\{\varphi(n,t)\}$称为完备的。这时，贝塞尔不等式取等号，即

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^2(n)=\int_{t_a}^{t_b} f^2(t)\,dt \qquad (1.2.6)$$

(1.2.6)式称为完备定理，或帕什伐尔(Parseval)完理；也是一个正交函数系是否为完备的充要条件。它的物理意义是：设$f(t)$为加于1欧姆电阻上的电压，是时间的函数，则$f^2(t)$的积分为消耗在此电阻上的能量；又因为分量$a(n)\varphi(n,t)$的能量为$\int_{t_a}^{t_b} a^2(n)\varphi^2(n,t)\,dt=a^2(n)\int_{t_a}^{t_b}\varphi^2(n,t)\,dt=a^2(n)$，故根据(1.2.6)式，$f(t)$的能量等于展开式中各分量$a(n)\varphi(n,t)$的能量$a^2(n)$之和。换言之，对此电压，不管用时间函数来描述，还是用完备正交函数系的级数来描述，能量是相等的。

完备性的重要意义在于：只有当正交函数系是完备的，我们才能将一个满足一定条件的函数展开成此正交函数系的级数；否则是不能展开的。对于一个非完备的正交函数系，即使