数學譯叢

三十年來的蘇聯數學

(1917—1947)

用多項式近迫實變函數

C. M. 尼可里斯基 著

科學出版社

數 學 譯 叢

三十年來的蘇聯數學
(1917—1947)

用多項式近迫實變函數

C. M. 尼可里斯基 著
越 民 義 譯

科 學 出 版 社

內容摘要

本書譯自“三十年來的蘇聯數學”中的一部分．著者以報告的方式評述了自從十月革命以來蘇聯學者在多項式近迫問題上的巨大成就．書中對於 С.Н. 別恩希坦因的著作，對於各種近迫方法及其發展情况，對於若干重要的多項式，求積公式，矩量論等皆有扼要而全面的敍述．書末附有大量的參考文獻．

本書可供數學工作者及專門技術人員參考之用．

用多項式近迫實變函數

ПРИБЛИЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНАМИ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

原文載“三十年來的蘇聯數學”

МАТЕМАТИКА В СССР ЗА 30 ЛЕТ

Гостехиздат, 1948

原著者	С. М. 尼可里斯基
翻譯者	越民義
出版者	科學出版社 北京東四區羅兒胡同2號
印刷者	北京新華印刷廠
總經售	新華書店

書號:0202 1955年5月第一版
(譯)125 1955年5月第一次印刷
(京)0000—4,740 開本:787×1092 1/25
字數:49,000 印張:3 1/5

定價:(8)四角八分

目　　錄

用多項式近迫實變函數

C. M. 尼可里斯基

近代的函數近迫論[1]是在於運用至善近迫這一概念．設 n 爲給定的數，則當 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ 經過所有的 n 次多項式時，我們稱

$$\min_{P_n}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-P_n(x)|$$

爲在線節 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上利用 n 次多項式 $P_n(x)$ 來作的函數 $f(x)$ 的至善近迫，記作 $E_n(f)$．同樣，當 T_n 經過一切的 n 次三角多項式 $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 時，我們稱

$$\min_{T_n}\max_{x}|f(x)-T_n(x)|$$

是（在整個實軸上）利用 n 次三角多項式 T_n 來作的週期 2π 的函數 $f(x)$ 的至善近迫 $E_n^*(f)$[2]．

至善近迫這一概念還是由偉大的俄國數學家 П. Л. 切褒雪夫（П. Л. Чебышев）創始的．關於連續函數的至善近迫的重要定理底證明也是屬於他的，因此有切褒雪夫定理之稱．

在俄國，這一概念的進一步發展主要是在 Е. И. 左洛塔留夫（Е. И. Золотарёв）、А. Н. 柯爾金（А. Н. Коркин）及 А. А. 與 В. А. 馬爾柯夫（А. А. и В. А. Марков）兄弟的工作，他們大大地推進了

1） 這一概覽幾乎全部是對付在區間上實變函數的近迫問題．必須了解這裏的術語是在這一意義上使用着的．關於在複域上近迫的問題，請參考本叢書中 А. Ф. 別爾曼特與 А. И. 馬爾庫謝維奇的概覽．

2） 記號 $E_n(f)$ 與 $E_n^*(f)$ 在今後將一直保持此義．

(特別是)有關與零差異最小的多項式(及有理分式)問題的解.

就問題本身的提法而與П. Л. 切褒雪夫 的古典工作直接銜接的非常重要的問題是繼續在引起現代數學家們的注意, 但除此而外, 在本世紀初, 已經開始出現了新問題的提出, 這些問題引出了具有更大意義的新觀念. 在這時期, 由於新的函數論觀念, 特別是外爾斯特納斯(關於連續函數的近迫的)定理的影響, 在數學中開始有了提出多項式近迫問題的傾向, 在這裏, 作爲被近迫的函數的, 不是如像老問題所特有的那樣, 只是個別的函數, 而是屬於或大或小的函數類, 例如解析的, 可微分的, 滿足 Lipschitz 條件的等等的任意函數, 當時有人提議要說出關於這類函數的適當的近迫, 特別是至善近迫的可能一切. 就是這個圈子裏(Lebesque, Borel, de la Valleė Poussin)的第一篇著作, 卽闡明了當 $n\to\infty$ 時, 函數 $f(x)$ 的可微分性是影響着 $E_n(f)$ 下降的程度. 關於這種影響的性質問題所引起的問題, 在提出之後不久, 最後在 1910 — 1912 年間卽光榮地被我們的同胞 C.H. 別恩希坦因(C. H. Бернштейн)與傑克遜[1] 所解決.

在另外的結果中, C. H. 別恩希坦因根據函數至善近迫的情況而給解析函數下了一個重要的定義, 並以術語 $E_n(f)$ 表出, 而與函數有 r 次連續微分的必要條件相近. 他又得出了函數 $|x|$ 的至善近迫的漸近式, 用此解決了當時著名的窪雷布散問題. 傑克遜得出了一個至今仍用他的名字來稱呼的不等式, 精確地決

1) Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung. Diss. Göttingen (1911).

定了可微分並具有已與連續模的函數的 $E_n(f)$ 的階. C. H. 別恩希坦因所得到的結果具有特別重要的意義, 他在分析中某種重要的情形初次指出: 不僅是從函數的性質可以推出 $E_n(f)$ 的一定行為, 而且, 反過來, 就 $E_n(f)$ 的性質也可以重新建立起 f 的性質. 由此奠定了從新的觀點出發的函數分類基礎, 引導函數論走向新的方向, C. H. 別恩希坦因後來叫它做構造論.

C. H. 別恩希坦因與傑克遜的工作以及窪雷布散的一些結果就成為近代函數近迫論的基礎, 這種近迫論在革命之後的期間發展得突飛猛進.

必須注意, C. H. 別恩希坦因在函數近迫論的發展上, 特別是在這種理論在蘇聯的發展上所起的作用直到今天仍然居於主要的地位. 我們只須說出下面的事實就够了, 那就是在這種理論上所得到的重要結果的最重要部分是屬於他的, 其中有許多在我們當中以及在國外影響到數學的思想. 他在比較年青一代所起的直接影響特別明顯的表現在哈爾科夫 (Харьков) 數學學派的建立, 這個學派圍繞着與函數近迫相關的問題從事工作.

在莫斯科與列寧格勒, 對於至善近迫問題的興趣發生得要稍微晚一點——從卅年代開始. 在列寧格勒, C. H. 別恩希坦因遷居到那裏對此是大有幫助. 在莫斯科, 在這方面是應當歸功於 A. H. 科爾摩戈洛夫 (A. H. Колмогоров); 至善近迫之在莫斯科引起人們的興趣, 乃是由於早先在那裏培養富理級數的結果.

處於這種情况之下, 在函數的近迫論中自然會引起新問題的提出, 特別是泛函分析的觀念很快就滲透進去. 這類問題當中, 有一個關於所給定的函數類的至善線性近迫法的問題在以後將有更詳細的說明, 這個問題是在 A. H. 科爾摩戈洛夫的工作

中首先提出,並對其中一種重要的情形得到解決.

必須說明一下,近年來在實變函數近迫方面,莫斯科的一切科學活動,由於C. H. 別恩希坦因遷居於此,卽由他領導。

還須注意,用多項式來近迫函數的問題,在哈爾科夫數學學派影響之下,也在基輔〔H. M. 克雷洛夫(H. M. Крылов)〕及奧德薩〔M. Г. 克萊因(M. Г. Крейн)〕獨立地被研究着.

關於複變函數的近迫論[1],我們也有很大的進展〔M. B. 凱爾德什(M.B.Келдыш),M. A. 拉弗倫切也夫(M. A. Лаврентьев——莫斯科〕.

在結束本書緒言之際,請注意,函數近迫論在蘇聯發展的條件是很有利的,作爲十月社會主義革命的後果而產生的普遍科學熱潮促成了這種條件.

用多項式來近迫函數的理論屬於那種領域之內,關於它的發展,蘇聯在世界其他國家中是佔有主要的地位.

第1節　概述文獻與C.H. 別恩希坦因的專書

在開始有系統地來論述從十月社會主義革命到今天在蘇聯所得到的關於實變函數近迫問題的結果之先,我們想先請注意,關於這段時期的前半(到1932年),敍述通常都很簡短,因爲在前一篇文章[2]中已經闡明過了.我們來注意下面關於這個問題的最早期的文獻:C. H. 別恩希坦因的三篇報告—— 1) 1912年

1) 參考本叢刊中 A. Ф. 別爾曼特與馬爾庫謝維奇 (A. И. Маркушевич) 的著作.

2) H. K. Бари, A. A. Ляпунов, Д. E. Меньшов 與 Г. П. Толстов, 實變函數的度量論.

在劍橋第五屆國際數學會議的；2）1930年在哈爾科夫（Харьков）全蘇數學工作者會議的〔59〕或〔44〕；3）1945年蘇聯科學院紀念會上的〔83〕，C. H. 别恩希坦因〔69〕，B. Л. 岡洽洛夫（B.Л. Гончаров）與 M. A. 拉弗倫切也夫〔1〕及 B. Л. 岡洽洛夫的報告[1)]．

整個我們這篇報告是分成許多節，各節中包含着互相接近的問題和文獻．但是，由於其中所論問題的廣闊，有兩篇著作是超出這種分類的範圍．我們所指的是 C. H. 别恩希坦因的基本著作1）"Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle"（Paris，1926）〔10〕；及2）"單實變連續函數的至善近迫與多項式的極界性質"，卷一（1937）〔64〕．其中第一本，在1926年收入 E. Borel 主編的叢書中的，是由 C. H. 别恩希坦因所得的一系列構成近代至善近迫論基礎的結果的系統敍述[2)]．

第二篇文獻是第一篇文獻的改編，但其間却有所不同．第一篇包含着巨大的附錄．其中敍述着由 C. H. 别恩希坦因所建立的亞解析（квазианалитическая）函數論；這一附錄以及一些其他不多的章數在第二篇中沒有了，可是餘下各章的內容是更廣泛了，說明是更有系統了[3)]．

1）考看"П. Л. 切褒雪夫的科學遺著"．Математика 1 Изд. АН（1945）122—172．

2）關於這些文獻的有系統的報告，可參看 B. Л. 岡洽洛夫與 M. A. 拉弗倫切也夫〔1〕．

3）我們還要注意在外國出版的窪雷布散的創作 "Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle"，Paris（1919）及 D. Jackson的The theory of approximation, New York（1930）．

第2節 多項式敍列

2.1. 我們這篇報告從直接與外爾斯特拉斯定理相關的問題開始. 外爾斯特拉斯在關於給定的連續函數所作出的當 $n\to\infty$ 時均匀地趨於此函數的 n 次多項式提供了有效的表示之後, 證明了他的定理. 之後, 又知道了其他這類的有效表示; 例如菲葉(Fejér)三角和數和別恩希坦因多項式就屬於這一類, 這些在現時都成爲古典的了. 在報告的時期, 出現了許多不同的工作, 在這些工作中, 已知的近迫法受到了進一步的研究, 一些新的具有某種特性的這類方法被提了出來.

2.2. 在非週期的情形(用尋常的多項式來近迫), 別恩希坦因多項式

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{m}{n}\Big)C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

的研究特別引起注意.

Л. В. 坎托羅維奇(Л. В. Канторович) [10] 首先對於正則函數(regular function)研究了 $B_n(f,x)$ 在區間[0, 1]之外的收斂性; 他證明了若 $f(x)$ 在以 0 和 1 爲焦點的最大橢圓內爲正則, 則在其中, 當 $n\to\infty$ 時, $B_n(f,x)\to f(x)$, 他又對於那種情形, 卽在所說橢圓外部的點 x, $B_n(f,x)\to f(x)$, 也給了一個例子.

對於解析函數 $f(x)$, $B_n(f, x)$ 的收斂區域的深入而有系統的研究是由 С. Н. 別恩希坦因在他的論文[82] 和他的比較早期的工作[54, 58]中完成的. 就是, $B_n(f,x)$ 在點 x 的收斂性主要是決定於結線 F_x

$$\left|\Big(\frac{x-1}{z-1}\Big)^{1-z}\Big(\frac{x}{z}\Big)^{z}\right|=1$$

在 z 複平面上的位置．譬如說，設 $f(z)$ 在包含 F_x 及線節 $(0,1)$ 的區域內解析，則點 x 即在 $B_n(f,x)$ 的收斂域之內．另一方面，若 $f(z)$ 在 F_x 之內或 F_x 的上面有一極，則 x 就不能是 $B_n(f,x)$ 的收斂點．C. H. 別恩希坦因也從這種觀點去研究 $B_n(f,x)$ 經某種修改所得的多項式底收斂性．

И. Н. 赫羅多夫斯基(И. Н. Хлодовский)[3]曾證明，若 $f(x)$ 具有 p 次連續導數 $f^{(p)}(x)$，則對 $k=1,2,\cdots,p$，$B_n^{(k)}(f,x)$ 在線節[0, 1]上均勻收斂於 $f^{(k)}(x)$．

但是必須注意，用多項式 $B_n(f,x)$ 來近迫的階，甚至連它的漸近式，也僅與第二次導數 $f''(x)$ 的大小有關，有如以下 E. B. 伏羅諾夫斯卡婭(E. B. Вороновская)[2]（被 C. H. 別恩希坦因[48]所推廣了的）的結果所推出的那樣：若 $f''(x)$ 是連續函數，則

$$B_n(f,x)-f(x)=\frac{1}{2n}x(1-x)f''(x)+\frac{\varepsilon_n}{n},$$

在這裏，ε_n 關於 $x\epsilon[-1,+1]$ 均勻地趨於0.

Г. Р. 羅倫茨(Г. Р. Лоренц)[3]在有界變差函數 $f(x)$ 及其 $B_n(f,x)$ 之間找出了密切的關係．這就是他的結果：1)若 $f(x)$ 在[0, 1]上爲單調的，則 $B_n(f,x)$ 也具有此性質；2) 要想 $f(x)$ 在[0, 1]上是有界變差或絕對連續，則其充分和必要條件分別是

$$\operatorname*{var}_{0\leqslant x\leqslant 1} B_n(f,x)\leqslant M$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname*{var}_{0\leqslant x\leqslant 1}[f(x)-B_n(f,x)]=0,$$

此處 M 是一與 n 無關的常數.

И. Н. 赫羅多夫斯基[2, 4]研究了某種不連續函數的別恩希坦因多項式的收斂性．之後，Л.В. 坎托羅維奇[6, 7]在他的工

作中討論了形如

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(z)\,dz \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

的多項式及 $B_n(f,x)$的其他修改，利用它來研究比較一般的不連續函數類．他[11]也運用多項式 $B_n(f,x)$去研究用整係數多項式來作的函數的至善近迫．C. H. 別恩希坦因的工作[31]也從事於這一問題．其中對於各種重要的函數類(解析的，滿足 Lipschitz 條件的等等）得到了一系列的結果，這些結果給出了近迫的降低的階．

Г.Р.羅倫茨[2]對於$f\in(L^{(p)})$ $(p\geqslant 1)$證明了斯提爾切-蘭島(Stieltjes-Landau)多項式的收斂性(就$L^{(p)}$的意義而言[1]）．

E. Я. 列米日[10]提出了函數近迫在實際計算上的可行方法．

2.3. 還在本世紀的初葉，好像有個這樣的見解：認爲內插連續函數$f(x)$的拉格朗日多項式

$$P_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} Q_n^{(k)}(x)f(x_k)\,(P_n(f,x_k)=f(x_k)),\ k=0,1,\cdots,n$$

---

1) 所謂利用n次多項式P_n來作的在線節$[-1,+1]$上定義的函數$f(x)$依$L^{(p)}$的意義而言(或依度量$L^{(p)}$)的近迫，乃是指量

$$\left(\int_{-1}^{+1}|f(x)-P_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p\geqslant 1).$$

在一切可能的n次多項式$P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ 中，這量的極小值稱爲至善近迫$E_n(f)_{L(p)}$(當$p=1$,或作$E_n(f)_L$)．同樣可以藉助n次三角多項式$T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 來定義週期2π的函數 $f(x)$依$L^{(p)}$意義而言的近迫及其對應的依$L^{(p)}$意義而言的至善近迫$E_n^*(f)_{L(p)}$；在這種情形，線節$[-1,+1]$改成了線節$[0,2\pi]$，$P_n(x)$則改成了$T_n(x)$．

當內插點變密時，在線節$[-1,+1]$上收斂於$f(x)$．但是其後證明了〔法巴（Faber）〕，對於任意一列的點系，內插式的模M_n

$$M_n=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} M_n(x),\quad M_n(x)=\sum_{k=0}^{n}|Q_n^{(c)}(x)|$$

無限增大，由是可以推知：存在着連續函數$f(x)$，它的內插式不可能收斂，至少是不可能均匀收斂．

對於估計用內插多項式來作的近迫，不等式

$$|f(x)-P_n(f,x)|\leqslant(1+M_n(x))E_n(f)\qquad(2.3:1)$$

佔有重要的地位．由是，對於所給定的n，去知道那種使得常數M_n可能最小的內插點的分佈情形是非常重要；就是說，藉助於$P_n(f,x)$，在這種分佈之下，可以期待到$f(x)$的好的近迫．C.H.別恩希坦因〔40〕解决了這一困難的問題，他證明：對於線節$[-1,+1]$，M_n的極小值當$n\to\infty$時幾近地等於$\frac{2}{\pi}\ln n$，而對於由切褒雪夫多項式$\cos(n+1)\arc\cos x$的零點所作成的內插點則達到這個值（在週期性的情形，則對於等距離的內插點達到）．這一研究順便精化了法巴的結果，因爲其中順便證明了：無論怎樣小的線節$[a,b]\subset[-1,+1]$，$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}M_n(x)$皆是無狠，由是可以推知：存在着點$x$及函數$f\epsilon(C)$，使$f(x)-P_n(f,x)$發散．

由A.H.科爾摩戈洛夫〔15〕的結果，特別可以推出：在不等式(2.3:1)中出現的常數$1+M_n(x)$，就所有的連續函數來考慮，是精確的．

從與報告中的時期第一年有關的工作中，我們要注意H.M.克雷洛夫〔3，10〕及H.M.克雷洛夫和Я.Д.塔馬爾金（Я.Д.Тамаркин）〔2〕的工作，其中研究了某些內插式的收斂性，並對內插式的殘項得出了（H.M.克雷洛夫〔3〕）各種的表示式．

我們還來陳述一下И.В.澤諾夫（И.В.Ценов）〔2〕在這一

年所得到的結果：若在線節$[-1, +1]$上有不等式$|f^{(n+1)}(x)| < |\varphi^{(n+1)}(x)|$，則對於屬於此線節的任意$n+1$個內插點系，$f(x)$與所對應的拉格朗日內插多項式之差額比就$\varphi(x)$所構成的同樣差額要小．由是，作爲一系，我們可以得出C.H. 別恩希坦因的著名不等式$E_n(f) < E_n(\varphi)$，以及新的不等式

$$E_n(f)_{L(2)} < E_n(\varphi)_{L(2)}.$$

2.4．假若許可在m個點$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)}$ $(m=m(n))$內插函數$f(x)$的多項式$P_n(f, x)$具有大於m的次數n，則在已知條件之下，可以有均勻收斂

$$\lim_{n\to\infty} P_n(f, x) = f(x) \quad 對一切 f \in (C). \tag{2.4:1}$$

菲葉[1]（1916）曾經發現，這種現象將會對於（例如）$P_n(f, x)$ $(n=2m-1)$發生，這裏的$P_n(f, x)$在切褒雪夫多項式$\cos m \arccos x$的m個零點與$f(x)$一致，並在這些零點具有等於零的導數．

H. M. 克雷洛夫與 И. Я. 徐塔葉爾曼（И. Я. Штаерман）[1] 在假設：在切褒雪夫多項式的零點有等式$f(x)=P_n(f, x)$，且除此之外，在這些點，多項式$P_n(f, x)$具有最初三次等於零的導數，之下，證明了(2.4:1)的正確性．

在所引述的一切結果中，$\frac{n}{m} \geq 2$. C. H. 別恩希坦因[45]曾經證明：對於任何$\varepsilon > 0$，必可眞正的作出一列n次多項式$P_n(f, x)$，使在線節$[-1, +1]$中的$m=m(n)$個點有等式$P_n(f, x) = f(x)$，在這裏$\frac{n}{m} < 1+\varepsilon$，且對於一切$f \in (C)$，$P_n(f, x)$均勻地$\to f(x)$．

2.5．如果是週期（週期2π）函數的近迫，則最受注意的是傅立葉級數的各種求和法，它可以用式子

1) Fejér L, Interpolation. Gött. Nachr. (1916), 66—91.

$$\sigma_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K_n(t-x)f(t)dt,$$

$$\begin{matrix}a_k\\b_k\end{matrix}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\begin{matrix}\cos kt\\\sin kt\end{matrix}\,dt, \qquad (2.5:1)$$

$$K_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kt \quad (k=1,2,\cdots,n,\ n=1,2,\cdots),$$

統一起來，這裏的 $\lambda_k^{(n)}$ 是與 k 和 n 相關的係數，決定着近迫法，也可以用對應的內插型的和數

$$\tilde{\sigma}_n(f,x)=\frac{a_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(a_k^{(n)}\cos kx+b_k^{(n)}\sin kx)$$

$$=\frac{2}{m}\sum_{i=0}^{m}K_n(x-x_i^{(m)})f(x_i^{(m)}),$$

$$\left.\begin{matrix}a_k^{(n)}\\b_k^{(n)}\end{matrix}\right\}=\frac{2}{m}\sum_{i=0}^{m}\begin{matrix}\cos kx_i^{(m)}\\\sin kx_i^{(m)}\end{matrix}f(x_i^{(m)}),\quad x_i^{(m)}=\frac{2\pi i}{m+1}$$

$$(i=0,\pm1,\pm2,\cdots) \qquad (2.5:2)$$

統一起來．平常多半是討論 $m=2n$ 的情形，其次是 $m=n$，$2n-1$，$0(n)$ 的情形．

首先是就某一些一般性的週期函數類從其收斂的觀點來研究形如(2.5:1)的各種和數．其中我們要注意 C. H. 別恩希坦因[37]和 B. 羅戈辛斯基[1]所提出的非常優美的求和法

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{2}\left\{S_n\left(f;x-\frac{\pi}{2n+1}\right)+S_n\left(f;x+\frac{\pi}{2n+1}\right)\right\},$$

其對任何週期爲 2π 的連續函數(簡稱對一切 $f\in(C)$)皆收斂，並具有早先菲葉、傑克遜、以及窪雷布散的求和法的各種已知性質．

1) Rogosinski W., Math. Ann. 95(1925).

當 $\lambda_k^{(n)}=1$ 和 $m=2n$，和數(2.5:2) 是古典的拉格朗日內插三角多項式．對於別的 $\lambda_k^{(n)}$，對應於菲葉核($m=n-1$) 及傑克遜核($m=2n-1$)的特別形狀的和數 (2.5:2) 曾爲傑克遜[1] 所研究(1913—1914 年)，他證明了對 $f\epsilon(C)$ 時它的收斂性並得到了近迫的一些估值.

我們在這方面的研究首先是由 H. M. 克雷洛夫(1917—1922年)所喚起的，在他的工作[1, 6]中，他證明了與窪雷布散求和法相應的和數(2.5:2)($m=2n-1$)對於一切 $f\epsilon(C)$ 收斂，並得出了用此和數近迫滿足 Lipschitz 條件的函數的近迫估值．他得出了用與菲葉($m=n-1$)及傑克遜($m=2n-1$) 方法相對應的和數(2.5:2)去近迫的估值．我們還要指出與此問題相關的 H. M. 克雷洛夫與 Я. Д. 塔馬爾金[2]的工作.

С. Н. 別恩希坦因[51]曾經研究了和數(2.5:2)當 $\lambda_k^{(n)}=1$，m 爲任意數的情形；它們自然地作爲那種 n 次三角多項式而得出，這種三角多項式在點系 $x_i=\frac{2\pi i}{m+1}$ ($i=0, \pm1, \pm2, \cdots$) 上就二次平均的意義而言與 $f(x)$ 差別最小；在同一工作中，С. Н. 別恩希坦因證明了與菲葉方法[$m=2n$, $\lambda_k^{(n)}=\frac{n+1-k}{n+1}$, $f\epsilon(C)$]相對應的和數(2.5:2)的收斂性.關於這一問題，在他別的工作中，我們要指出[41, 42, 47].

在下面一系列的工作中：С. М. 羅辛斯基(С. М. Лозинский)[3-8, 10]，И. П. 納湯松(И. П. Натансон)[17, 19, 21, 23, 24]，Д. К. 法杰耶夫(Д. К. Фаддеев)[1]，Ф. И. 哈爾洗拉澤(Ф. И. Харшиладзе)[4, 6]，關於各種函數類的函數的這種或那種和數，就各種度

1) Jackson, D., The theory of approximation. New York(1930). 也參考Trans. Amer. Math. Soc., 14(1913), 453—461.

量$(C, L^{(p)}$，廣義的$L^{(p)})$[1]從其收斂的觀點被研究着．其中，一方面收斂性的事實被建立起來，另一方面還求出了對應的近迫降低的階．關於某一函數類中任一函數的"純"收斂性的研究是與所謂奇異積分理論的發展平行地進行的；所討論的那些函數近迫論與汎函分析觀念的密切聯繫卽使得這種情况實現．(Д.К.法杰耶夫[1]，И.П.納湯松[17]，С.М.羅辛斯基[5])．我們還須指出，若在和數(2.5:1)中，用任一數字級數的項去代替對應的傅立葉級數的項，則可以把這種和數看成是這一數字級數的求和法．別恩希坦因-羅戈辛斯基的和數(Ф.И.哈爾洗拉澤[6])和窪雷布散的和數（И.П.納湯松[24]）就是從這種觀念來研究的．

近來開始出現了一種傾向，卽不去研究個別特殊的和數，而去研究在關於$\lambda_k^{(n)}$的充分廣泛的假定下，形如(2.5:1)和(2.5:2)的任意和數．С.М.羅辛斯基[8，10]證明了一些一般性的命題，指出了和數(2.5:1)和(2.5:2)之間，以及對於某些函數類來說，它們的收斂性之間的精密聯繫．例如下面兩個命題是等値的：當$n\to\infty$時，1)對於所有的$f\in(C)$，$\sigma_n(f, x)\to f$，2)對於所有的$f\in(C)$，$\widetilde{\sigma_n}(f, x)\to f(x)$；若它們成立，則對於所有的$f\in(L^{(p)})$，有3) $\int_0^{2\pi} |f(x)-\sigma_n(f,x)|^p dx\to 0$.

С.М.尼可里斯基(С. М. Николиский)[7]證明了：若數$\lambda_k^{(n)}$對任何的n滿足凸性條件，則和數(2.5:1)對於所有的$f\in(C)$收斂的充分且必要的條件是存在一常數M，使得$|\lambda_k^{(n)}|\leqslant M$及

---

1) 在與這一範圍有關的外國工作中，我們僅指出馬爾辛格維奇（Mapcinkiewicz）的工作[Studia Math., 6(1936), 1—17].