

电磁场与电磁波

王玉仑 郭文彦 编

哈尔滨工业大学出版社



电 磁 场 与 电 磁 波

王玉仑 郭文彦 编

哈 尔 滨 工 业 大 学 出 版 社

DL49/14

电 磁 场 与 电 磁 波

王玉仑 郭文彦 编

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张 22.75 字数 521,000

1985年4月第1版 1985年4月第1次印刷

印数 1—7,000

书号 15341.15 定价 4.20元

前 言

“电磁场与电磁波”是在读者已具备了普通物理和工程数学等基本知识的基础上开设的一门无线电技术专业的基础课，其研究对象是电磁场与电磁波的基本属性、描述方法、运动规律、与物质的相互作用及其应用。要求读者通过本门课程的学习，能够系统地掌握电磁场与电磁波的基本概念、基本性质、基本规律以及求解电磁场问题的基本方法。

本课的特点是概念比较抽象、情况比较复杂、求解所用的数学工具较多。因此，编写本书时力求先交代情况，说明方法，总结规律，以便读者掌握要领，特别是在总结规律和交待求解方法上作了很大努力。在内容叙述上，遵循辩证唯物主义的认识论，从总结宏观电磁现象的基本实验规律出发，经过推广、提高，上升为普遍规律；同时也遵循辩证唯物主义的方法论，抓主要矛盾和矛盾的主要方面，对所讨论的问题，在不影响实质性问题的条件下，提出简化物理模型，进行分析和求解。

全书共分十二章。第一章系统阐述电磁现象的本质和基本规律，通过对库仑定律、毕奥—沙伐尔定律、法拉第电磁感应定律等基本实验定律的分析、概括和提高，得到反映电磁现象普遍规律的麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式。理论之所以重要，就在于它能指导实践，并在实践中发展。所以本书以后各章（除相对论一章外）均讨论电磁现象的普遍规律在各种具体情况下的求解和应用。第二、三、四章讨论了场量不随时间变化的稳恒电磁场的基本性质、各种求解方法及其应用。第五、六、七、八章在波动方程的基础上，讨论了正弦电磁波在无界空间、半无界空间、各向异性媒质以及有界空间内传播的基本规律。第九章介绍了电磁辐射的基本理论和辐射电磁场的基本计算方法。第十章介绍了带电粒子与场的相互作用。第十一章是狭义相对论基础，力图使读者能从相对论观点出发，进一步理解宏观电磁现象的本质。第十二章是电磁场理论专题，系统介绍电磁位函数理论及正弦电磁场的基本解法。

本书内容对无线电类各不同专业可根据需要取舍。

为了帮助读者掌握所学内容，并使读者对“场与波”在各方面的应用有一定了解，书中安排了一定数量的插图、例题、思考题与习题；书末附有习题答案；还附有坐标变换、立体角、矢量分析、并矢与张量、贝塞尔函数、勒让德函数及电磁学的单位等附录，以备参考。

本书均采用国际单位制（SI制）。

本书在编写过程中得到兄弟院校及校内许多同志的支持和帮助，吴殿恺、吴群同志对本书的初稿做了不少有益的工作，在此表示感谢。

本书承蒙洪晶教授、金有严付教授审阅，在此深表谢意。限于编者水平，书中错误和不当之处在所难免，希望读者批评指正。

编 者

目 录

第一章 宏观电磁现象的普遍规律	(1)
§ 1.1 静电场的基本性质	(1)
1. 库仑定律 2. 电场、电场强度 3. 真空中静电场的基本性质	
4. 电介质中静电场的基本性质 5. 静电场基本性质小结	
§ 1.2 稳定电场和稳定磁场的基本性质	(7)
1. 稳定电场、电流连续性方程 2. 磁场、磁感应强度	
3. 毕奥——沙伐尔定律 4. 真空中稳定磁场的基本性质	
5. 磁介质中稳定磁场的基本性质律 6. 稳定磁场基本性质小结	
§ 1.3 电磁感应定律和全电流定律	(14)
1. 电磁感应定律、涡旋电场 2. 位移电流、全电流定律	
§ 1.4 宏观电磁运动的基本方程	(17)
1. 麦克斯韦方程组 2. 麦克斯韦方程组的复数形式	
3. 真空中洛伦兹力公式	
§ 1.5 电磁场的边界条件	(23)
1. 场量法向分量的边界条件 2. 场量切向分量的边界条件	
§ 1.6 电磁场的能量和能流	(27)
1. 场能密度、能流密度矢量 2. 能量转化和守恒定律、坡印亭定理	
3. 场能密度 W 和能流密度矢量 $\vec{P}$ 的表达式 4. 坡印亭定理的复数形式	
5. 电磁能量的传输	
§ 1.7 时变电磁场中媒质的特性	(33)
1. 静态场与高频场中媒质特性的差异 2. 复介电常数及其含义	
3. 媒质的分类	
第二章 静电场	(40)
§ 2.1 静电场的特征、静电场方程	(40)
§ 2.2 静电场的标量位及其微分方程	(41)
1. 静电场的标量位 (电位) 2. 电位的微分方程 3. 电位的边界条件	
4. 直接积分法求电位	
§ 2.3 静电场的能量	(45)
1. 带电导体系的能量 2. 点电荷系的能量	
§ 2.4 电容	(47)
1. 电容器、电容 2. 多导体系统的部分电容	
第三章 稳定电场和稳定磁场	(54)
§ 3.1 稳定电磁场的特征及场方程	(54)
1. 稳定电场的场方程 2. 稳定磁场的场方程	

§ 3.2	矢量磁位与标量磁位	(55)
1.	矢量磁位 2. 标量磁位	
§ 3.3	稳定磁场的能量	(59)
§ 3.4	自感与互感的计算	(62)
1.	自感 2. 互感	
第四章	稳恒场的解法	(73)
§ 4.1	边值问题、唯一性定理	(73)
1.	边值问题 2. 格林公式 3. 边值问题解答的唯一性定理	
4.	唯一性定理的重要意义	
§ 4.2	分离变量法	(76)
1.	直角坐标中的分离变量法 2. 圆柱坐标中的分离变量法	
3.	球面坐标中的分离变量法	
§ 4.3	镜象法	(90)
1.	点电荷对导体平面的镜象 2. 点电荷对球形导体面的镜象	
3.	线电荷对柱形导体面的镜象 4. 两种不同介质中置有点电荷或线电荷时的镜象	
§ 4.4	复变函数法	(98)
1.	解析函数 2. 复位函数法 3. 保角变换法	
§ 4.5	数值解法综述	(107)
§ 4.6	有限差分法	(108)
1.	差分与差商 2. 连续场域的离散化处理、差分方程	
3.	边界条件的离散化处理 4. 边值问题变为线性代数方程组	
5.	线性差分方程组的解法	
第五章	电磁波的传播 (I) —— 无界均匀媒质中的均匀平面电磁波	(126)
§ 5.1	波动方程	(126)
1.	波动方程 2. 齐次亥姆霍兹方程	
§ 5.2	无界理想介质中的均匀平面电磁波	(128)
1.	齐次亥姆霍兹方程的解 2. 解的特点	
§ 5.3	无界有耗媒质中的均匀平面电磁波	(134)
1.	齐次亥姆霍兹方程的解 2. 解的特点	
§ 5.4	平面电磁波的偏振	(138)
1.	直线偏振波 2. 圆偏振波 3. 椭圆偏振波	
§ 5.5	相速、群速和能速	(142)
第六章	电磁波的传播 (II) —— 反射与折射	(148)
§ 6.1	电磁波在两种不同媒质分界面上反射和折射的基本规律	(148)
1.	反射定律和折射定律 2. 振幅关系 —— 费涅尔公式	
3.	反射系数和透射系数	
§ 6.2	电磁波垂直入射在两种理想介质分界面上的反射和透射	(152)

1. 场量表达式 2. 振幅分布 3. 功率流 4. 多层介质界面上的反射和透射	
§ 6.3 电磁波垂直入射在良导体界面上的反射和透射.....	(157)
1. 良导体界面上的费涅尔公式 2. 介质中的场量表达式、振幅分布	
3. 介质中的功率流 4. 导体中的场量表达式 5. 导体中的电流	
6. 导体中的功率流	
§ 6.4 电磁波斜入射在两种理想介质分界面上的反射和折射.....	(161)
1. 垂直偏振波的反射和折射 2. 平行偏振波的反射和折射	
3. 布鲁斯特角 4. 临界角和全反射	
§ 6.5 电磁波斜入射在导体界面上的反射和折射.....	(167)
1. 斯耐尔定律、费涅尔公式 2. 介质中的场量表达式	
3. 介质中波的特点 4. 导体中的场	
第七章 电磁波的传播 (Ⅲ) ——电磁波在各向异性媒质中的传播.....	(173)
§ 7.1 磁化等离子体中的等效参数.....	(173)
1. 电子的运动方程 2. 等效张量电导率 3. 等效张量介电常数	
§ 7.2 均匀平面电磁波在均匀磁化等离子体中的传播.....	(176)
1. 双折射效应 2. 偏振面的旋转——法拉弟旋转效应	
§ 7.3 磁化铁氧体中的张量磁导率.....	(184)
§ 7.4 均匀平面电磁波在均匀磁化铁氧体中的传播.....	(187)
1. 双折射效应 2. 偏振面的旋转——法拉弟旋转效应	
第八章 电磁波的传播 (Ⅳ) ——导行电磁波.....	(196)
§ 8.1 导行波的一般性质.....	(196)
1. 导行波的特征及其波动方程 2. 导行波的一般性质	
§ 8.2 矩形波导.....	(201)
1. 矩形波导中 TE 波的解 2. 矩形波导中 TM 波的解	
3. 矩形波导中 TE 、 TM 波的传播特性	
§ 8.3 矩形波导中的 TE_{10} 波.....	(205)
1. TE_{10} 波的场量表达式及其传播特性 2. 能量传输 3. 损耗与衰减	
§ 8.4 圆形波导.....	(209)
1. 圆形波导中 TE 波的解 2. 圆形波导中 TM 波的解	
3. 圆形波导中 TE 、 TM 波的传播特性	
§ 8.5 介质波导.....	(213)
1. 介质波导的导波原理和特点 2. 金属平板加介质片构成的波导	
3. 光纤波导	
§ 8.6 谐振腔.....	(216)
1. 矩形谐振腔的构成 2. 矩形谐振腔的谐振波长	
3. 矩形谐振腔中 TE_{101} 模式的场分布和谐振波长	

4. 矩形谐振腔的品质因数—— Q 值 5. 圆柱形谐振腔

第九章 电磁波的辐射	(223)
§ 9.1 电磁场的标量位、矢量位及其微分方程	(223)
§ 9.2 位方程的解——滞后位	(226)
§ 9.3 电偶极辐射	(229)
1. 电偶极辐射 2. 元天线的主要参量	
§ 9.4 半波天线	(234)
§ 9.5 天线阵	(237)
1. 两元阵 2. 均匀直线天线阵 3. 矩形分布的均匀平面阵	
§ 9.6 磁偶极辐射	(240)
1. 对偶性原理 2. 磁偶极辐射	
§ 9.7 电磁波的衍射	(246)
1. 克希霍夫公式 2. 电磁波的衍射	
§ 9.8 互易定理	(250)
第十章 带电粒子与电磁场的相互作用	(256)
§ 10.1 带电粒子在稳恒电磁场中的运动	(256)
1. 带电粒子在静电场中的运动 2. 带电粒子在稳定磁场中的运动	
3. 带电粒子在稳恒电磁场中的运动	
§ 10.2 带电粒子对外场的影响	(261)
§ 10.3 带电粒子波	(263)
1. 有源波动方程 2. 波数 k 的解及其分析	
第十一章 狭义相对论基础	(270)
§ 11.1 概述	(270)
§ 11.2 洛伦兹变换	(271)
1. 洛伦兹变换 2. 洛伦兹变换的推论	
3. 一级洛伦兹变换和伽利略变换	
§ 11.3 相对论理论的四维形式	(277)
1. 四维空间、洛伦兹变换的四维形式 2. 四维协变量、物理规律的协变性	
§ 11.4 电磁规律的协变性	(280)
1. 四维电流密度矢量、电荷守恒定律的协变性	
2. 四维矢量位、达朗伯方程的协变性	
3. 电磁场张量、麦克斯韦方程组的协变性	
4. 四维电流、四维矢量位及电磁场的变换式	
5. 场量的一级洛伦兹变换及伽利略变换	
§ 11.5 场量变换在研究真空中运动系统电磁场的应用	(286)
1. 场的不变量及电磁场的分类 2. 匀速运动的电荷所产生的电磁场	
3. 洛伦兹力的相对论解释 4. 动生电动势	

§ 11.6	电磁波的相位不变性及其重要结论	(293)
1.	相位不变性及 k 与 ω 的变换	
2.	多普勒效应	
3.	光行差问题的相对论解释	
第十二章	电磁场理论专题	(297)
§ 12.1	电磁场的位函数	(297)
1.	均匀媒质中的麦克斯韦方程组与波动方程	
2.	电磁场的位函数	
3.	规范条件与位函数的微分方程	
4.	赫兹电矢量 $\vec{\Pi}_e$ 与赫兹磁矢量 $\vec{\Pi}_m$	
5.	无源区位函数的独立分量数	
§ 12.2	齐次矢量亥姆霍兹方程的解	(304)
1.	标量亥姆霍兹方程的求解	
2.	矢量亥姆霍兹方程的求解	
§ 12.3	解非齐次亥姆霍兹方程的格林函数法	(307)
1.	点源非齐次标量亥姆霍兹方程	
2.	非齐次标量亥姆霍兹方程格林函数解的一般表达式	
3.	非齐次标量亥姆霍兹方程的格林函数解	
4.	均匀无界空间中索莫菲尔德辐射条件	
5.	均匀无界空间中非齐次亥姆霍兹方程的格林函数解	
6.	矩形区域中非齐次亥姆霍兹方程的格林函数解	
§ 12.4	任意时变电磁场问题的求解方法	(314)
附录 I	坐标变换	(318)
附录 II	立体角	(320)
附录 III	矢量分析	(321)
1.	梯度散度和旋度	
2.	矢量恒等式	
附录 IV	并矢和张量	(325)
1.	三维空间的正交变换	
2.	物理量按空间变换性质的分类	
3.	张量的部分代数运算	
4.	四维空间	
附录 V	贝塞尔函数	(331)
1.	第一类贝塞尔函数	
2.	第二类贝塞尔函数	
3.	第三类贝塞尔函数	
4.	贝塞尔函数的递推公式	
5.	贝塞尔函数的正交性	
6.	变态贝塞尔函数	
7.	球面贝塞尔函数	
附录 VI	勒让德函数	(336)
1.	勒让德函数	
2.	缔合勒让德函数	
3.	函数的正交性	
4.	递推公式	
附录 VII	电磁学的单位	(338)
习题答案		(340)

第一章 宏观电磁现象的普遍规律

本章的中心任务是根据熟知的实验定律，总结出一套对研究宏观电磁现象普遍适用的方程组，即麦克斯韦方程组。它是解决宏观电磁运动的基本出发点。学习本章时，应注意麦克斯韦方程组中的各个方程式与原来的实验定律之间的差异。既要懂得普遍规律的指导意义，又能根据具体条件，分析具体问题。

§ 1.1 静电场的基本性质

1. 库仑定律

库仑从实验中总结出，两个处在真空中的点电荷之间的相互作用力由下式表示：

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{R^2} \vec{a}_R \quad (1.1-1)$$

式中 q_1 、 q_2 分别代表两个点电荷所带的电量； $\vec{F}_{21}$ 代表 q_2 受 q_1 的作用力；

$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}$ ， $\vec{a}_R = \frac{\vec{R}}{R}$ 是由 q_1 指向 q_2

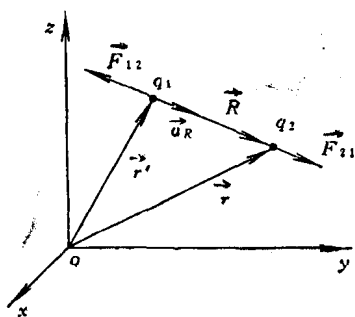


图 1.1-1

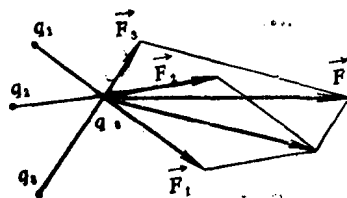


图 1.1-2

方向的单位矢量，如图 (1.1-1) 所示； ϵ_0 是真空介电常数 (又称真空电容率)，其值为 $\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{F/m}$ ，在一般计算中，可取 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{m/F}$ ； R 、 F 与 q 的单位分别为米、牛顿和库仑。

库仑力服从迭加原理：点电荷系 q_1 、 q_2 、 $\dots$ 、 q_n 同时作用在点电荷 q_0 上的合力 $\vec{F}$ 等于各点电荷单独作用在它上面的力的矢量和。即

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (1.1-2)$$

• 1 •

图 (1.1—2) 画出了 q_0 在三个点电荷作用下所受的合力。

2. 电场、电场强度

场是物质存在的特殊形式，在电荷周围的电场是客观实在的。电荷之间的相互作用力，其实质是各电荷电场的相互作用。伴随静止电荷而同时共存的电场称为静电场。

电场的属性之一，就是它对置于其中的电荷施以力的作用。描述这种属性的物理量是电场强度 $\vec{E}$ ，定义为：

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1.1-3)$$

式中 q_0 为试验电荷，要求它是线度小，带电量少的正电荷，即它的存在对场的影响可以忽略； $\vec{F}$ 为 q_0 所受的作用力。由定义可知，电场中某一点的电场强度，其数值和方向，与放在该点的单位正电荷所受的力相同。电场强度的单位为 V/m (或 N/C)。

对于电场中的每一点，都能定出一个电场强度 $\vec{E}$ 。因而一般说来， $\vec{E}$ 是电场中空间坐标的矢量函数，即：

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(\vec{r})$$

从数学上排，静电场的场强 $\vec{E}(\vec{r})$ 矢量构成一个矢量场。

根据库仑定律和场强的定义，参看图 (1.1—3)，可得在点电荷 q 形成的电场中，任意点 P 的场强为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2} \vec{a}_R \quad (1.1-4)$$

由库仑力的迭加原理 (1.1—2) 可得：

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 = \vec{F}_1/q_0 + \frac{\vec{F}_2}{q_0}$$

$$+ \dots + \vec{F}_n/q_0$$

或

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad (1.1-5)$$

可见电场强度也服从迭加原理。在点电荷系的电场中，任意点处的场强为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i^2} \vec{a}_{Ri} \quad (1.1-6)$$

当电荷连续分布时，设电荷体密度为 $\rho(\vec{r}')$ ，则

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x', y', z') \frac{\vec{R}}{R^3} d\tau' \quad (1.1-7)$$

式中，坐标 (x, y, z) 代表场点的坐标；坐标 (x', y', z') 代表源的坐标、 $R = |\vec{r} - \vec{r}'| = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}$ 为源点到场点的距离。(1.1—7) 式可以用来计算

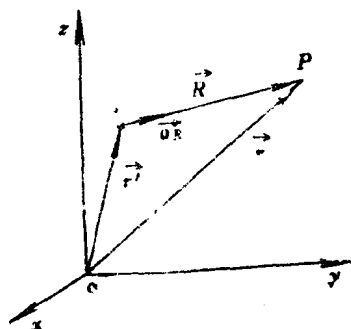


图 1.1—3

电场强度，但由矢量积分直接计算场强往往比较复杂。

3. 真空中静电场的基本性质

从库仑定律出发，利用立体角的概念和计算变力做功的方法（参阅普通物理学教科书），很容易得到反映静电场基本性质的两条定理：高斯定理和环路定理。

(1) 高斯定理、静电场的散度

在静电场中，通过任意闭合曲面的电通量只与它所包围的电荷的代数和成正比，而与这些电荷如何分布无关。表示为

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \quad (1.1-8)$$

式中的求和是对闭合曲面 S 内的所有电荷进行的。对于连续分布的体电荷的电场，(1.1-8) 式可写成

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\tau \rho d\tau \quad (1.1-9)$$

这就是高斯定理的积分形式，它对场中任意一个闭合曲面均适用。式中 τ 是闭合曲面 S 所包围的体积。在电荷分布具有一定对称性的特殊情况下，利用高斯定理 (1.1-9) 式来计算电场是很简单的。

积分形式的高斯定理反映一个有限范围内场与源的关系。为了得到在空间无限小区域内场与源的关系，即反映点的情况，应用数学上的高斯散度定理把 (1.1-9) 式化为体积分：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_\tau \nabla \cdot \vec{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\tau \rho d\tau。$$

由于这个关系式对任意一个积分体积都是成立的，因此等式两端的被积函数在空间各点必处处相等，即

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (1.1-10)$$

上式就是高斯定理的微分形式，它表示电荷是电场的源，电力线从正电荷发出而终止于负电荷。见图 (1.1-4)，称这种场为发散场。

(2) 环路定理、静电场的旋度

从库仑定律知静电力是一种保守力，即场力移动电荷所作的功与路径无关。这一结论的数学表述为：

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.1-11)$$

这就是静电场的环路定理的积分形式，场强的环量等于零。上式对场中任一闭合回路均适用。

为得到环路定理的微分形式，应用数学上的斯托克斯定理把 (1.1-11) 式的线积分化为面积分，则有

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

这一关系对任意曲面 S 均适用。在极限情况下

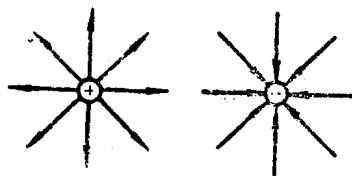


图 1.1-4

$$\nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

由 $d\vec{s}$ 的任意性可得

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1.1-12)$$

它表明静电场是一种无旋场，也就是保守场。应当指出，只是静电场具有无旋性，在一般情况下电场是有旋的，我们将在第三节中加以说明。

4. 电介质中静电场的基本性质

(1) 电介质的极化

电介质可分为两大类：无极分子和有极分子。无极分子没有固有电偶极矩，有极分子具有电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{l}$ 。

没有外场作用时，无极分子不显电性。有极分子虽有电矩 $\vec{p}$ ，但由于大量分子处于无规则的热运动之中，就介质的任一宏观区域而言， $\sum \vec{p}_i = 0$ ，即各分子电矩的平均效果为零，故对外也不显电性。当有外场 $\vec{E}_0$ 作用在电介质上时，无极分子发生位移极化，有极分子发生取向极化，其结果均使介质出现宏观的净余电矩而显电性。为描述电介质的极化状态，我们引入极化强度矢量 $\vec{P}$ ，其定义为：

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i / \Delta\tau \quad (1.1-13)$$

其含义是介质单位体积中的总电偶极矩。 $\vec{p}_i$ 为介质的分子电矩， $\Delta\tau$ 为物理小体积。

均匀电介质在均匀电场作用下发生均匀极化，这时 $\vec{P}$ 是常矢量，均匀极化的结果仅在介质的表面处出现不抵消的电荷，称为面束缚电荷；均匀或非均匀电介质在非均匀电场作用下发生非均匀极化，极化的结果，除有面束缚电荷外，在介质内部还出现不抵消的电荷，称为体束缚电荷，它们也激发电场。因此，根据 (1.1-9) 式，介质中的高斯定理应改写为：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} (\rho + \rho_p) d\tau \quad (1.1-14)$$

式中 ρ_p 为束缚电荷体密度。 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ ， $\vec{E}_0$ 和 $\vec{E}'$ 分别是自由电荷和束缚电荷所激发的电场。但是 ρ_p 在实验上是无法测量的，为了便于应用上式，需将 ρ_p 用宏观可测量表示。

下面来寻求束缚电荷与介质极化状态的关系，并分别计算体束缚电荷和面束缚电荷。

为简便计，我们以无极分子为例加以讨论。介质极化时，分子的正负电中心发生相对位移而成为电偶极子。设每个分子由相距为 $\vec{l}$ 的一对正负电荷 $\pm q$ 构成，分子的电偶极矩为 $\vec{p} = q\vec{l}$ 。设想在介质中划出一物理小的体积 $\Delta\tau$ ，当介质密度分布不均匀时，将会出现穿出穿入包围体积 $\Delta\tau$ 的闭合曲面的电偶极子的数目不

等，使 $\Delta\tau$ 内出现净余的正电或负电，即出现宏观的束缚电荷体分布，如图 (1.1-5) 所示。假设介质极化后每个分子的电矩大小、取向均相同，在介质中，以闭合面 S 划出某个

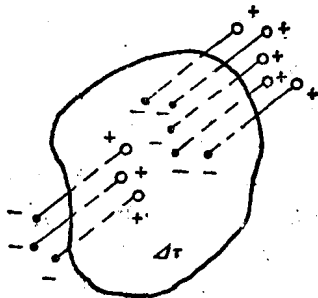


图 1.1-5

体积 τ 。对于 S 面上的无限小面元 $d\vec{s}$ 来说, 凡是偶极子的中心落在以 $d\vec{s}$ 的大小为底面积, 以偶极子的长度 $\vec{l}$ 为斜高的圆柱体内的偶极子, 都将和 $d\vec{s}$ 相交, 因而将有一种符号的电荷落在 S 内。设单位体积内分子数为 n , 则如图(1.1—6)所示, 穿出 $d\vec{s}$ 面外的正电荷为:

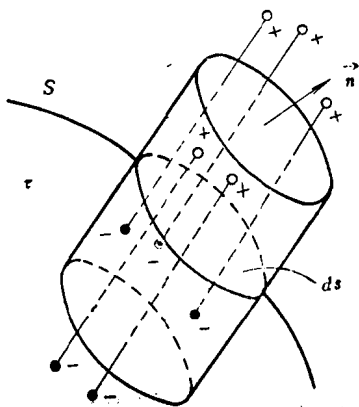


图 1.1—6

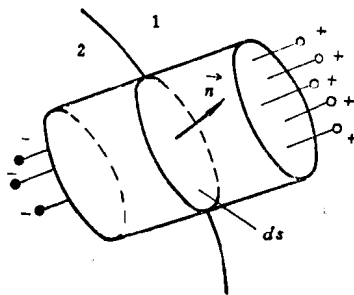


图 1.1—7

$$n q \vec{l} \cdot d\vec{s} = n \vec{p} \cdot d\vec{s} = \vec{P} \cdot d\vec{s} \quad (1.1-15)$$

式中 $\vec{P} = n\vec{p}$ 是介质的极化强度矢量, $\vec{p}$ 是分子的平均电偶极矩。将上式对区域 τ 的闭合界面 S 积分, 就得到由 τ 内通过界面 S 穿出去的电荷为 $\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}$ 。由于介质是电中性的, 此量也就等于 τ 内净余的符号相反的电荷, 即

$$\int_{\tau} \rho_p d\tau = - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{s} \quad (1.1-16)$$

在连续介质内部, 把面积分化为体积分, 可得到上式的微分形式:

$$\rho_p = - \nabla \cdot \vec{P} \quad (1.1-17)$$

此式就是我们要寻找的 ρ_p 与 $\vec{P}$ 的关系式。

介质均匀极化时, $\nabla \cdot \vec{P} = 0$, 束缚电荷只出现在介质的界面处。下面来计算面束缚电荷。图(1.1—7)表示介质1和介质2分界面上的一个面元 $d\vec{s}$, 其法线 $\vec{n}$ 由介质2指向介质1。在分界面两侧, 各取一定厚度的薄层使分界面包含在薄层内。在薄层内出现的束缚电荷与 $d\vec{s}$ 之比, 称为分界面上的束缚电荷面密度, 记为 ρ_{ps} 。由(1.1—15)式得, 在薄层内, 通过薄层右侧面进入介质1的正电荷为 $\vec{P}_1 \cdot d\vec{s}$; 由介质2通过左侧面进入薄层内的正电荷为 $\vec{P}_2 \cdot d\vec{s}$, 则薄层内出现的净余电荷为:

$$-(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot d\vec{s} = -(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{n} ds = \rho_{ps} ds$$

由此得

$$\rho_{ps} = - \vec{n} \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \quad (1.1-18)$$

$\vec{P}_1$ 和 $\vec{P}_2$ 是分界面两侧介质的极化强度矢量。当介质 1 为真空时, $\vec{P}_1 = 0$, 令 $\vec{P}_2 = \vec{P}$, 则介质表面上束缚电荷的面密度为:

$$\rho_{ps} = \vec{n} \cdot \vec{P} = P_n \quad (1.1-19)$$

式中 $\vec{n}$ 为界面指向真空一侧的单位法向量。

(2) 电介质中静电场的性质

(a) 高斯定理、静电场的散度

将 (1.1-16) 式代入 (1.1-14) 式, 可得

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{s} = \int_V \rho d\tau \quad (1.1-20)$$

令

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.1-21)$$

$\vec{D}$ 称为电位移矢量, 或称电感应强度, 则 (1.1-20) 式可写成

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho d\tau \quad (1.1-22)$$

仿照前面做法, 在连续媒质内部, 把面积分化为体积分, 则可得到介质中高斯定理的微分形式:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.1-23)$$

我们新引进的电位移矢量 $\vec{D}$, 是为了计算方便而引进的一个辅助量, 并不代表介质中的场强。但引入 $\vec{D}$ 后, 由 (1.1-22) 式可知, 从计算角度来说, 就可克服束缚电荷 ρ_p 测量和计算的困难, 而直接由自由电荷的分布计算 $\vec{D}$ 。

介质中的高斯定理表示在有电介质存在的一般情况下, 静电场仍是发散场, 电位移线起源于正的自由电荷, 终止于负的自由电荷, 与束缚电荷无关。

由于 $\vec{D}$ 是辅助计算量, 必须给出 $\vec{D}$ 与 $\vec{E}$ 之间的实验关系, 才能最后解出电场强度 $\vec{E}$ 。实验指出, 各种介质材料有不同的电磁特性, $\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 的关系也有多种形式。对于通常的各向同性的线性介质 (除第七章外, 我们提到的介质均是指这种介质), 极化强度 $\vec{P}$ 和电场强度 $\vec{E}$ 之间有简单的线性关系:

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (1.1-24)$$

χ_e 称为介质的极化率, 是一个纯数。把上式代入 (1.1-21), 得

$$\vec{D} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E} \quad (1.1-25)$$

令

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e, \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (1.1-26)$$

ϵ_r 和 ϵ 分别称为介质的相对介电常数和介电常数, 都表征介质的介电特性。 ϵ_r 是一个无量纲的纯数, ϵ 和 ϵ_0 的单位相同。由以上两式有

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.1-27)$$

上式是场量 $\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 的关系式, 称为媒质的状态方程。

(b) 环路定理、静电场的旋度

介质中的总场强 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$, $\vec{E}_0$ 和 $\vec{E}'$ 分别是由自由电荷和束缚电荷所激发的电场。就激发静电场而言, 自由电荷与束缚电荷没什么差别, 它们所激发的静电场其性质应当是完全一样的, 即 $\vec{E}_0$ 和 $\vec{E}'$ 都是保守场, 其旋度均为零。于是介质中静电场的环路定理的积分形式为:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.1-28)$$

在连续介质内部, 利用化线积分为面积分的方法, 可得到环路定理的微分形式为:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1.1-29)$$

综上所述, 有电介质存在的一般情况下, 静电场总是发散而无旋的。从数学上讲, 静电场是一种矢量场, 由矢量分析中的亥姆霍兹定理(见附录Ⅲ.一.)知, 要完全确定一个矢量场, 必须同时给出它的散度和旋度, 上述两条定理反映了静电场的基本性质, 同时也给出了静电场的散度和旋度, 它是确定一个静电场的必要条件。

5. 静电场基本性质小结

积分形式	微分形式	场的性质
$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_v \rho dv$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	发散场
$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\nabla \times \vec{E} = 0$	无旋场

介质状态方程

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

§ 1.2 稳定电场和稳定磁场的基本性质

前一节讨论的是与静止电荷相联系的静电场, 现在讨论导体中运动电荷的场。

导体中电荷的定向运动形成电流, 如果导体中电流的大小和指向都不随时间变化, 则这种电流称为稳定电流(直流)。

与稳定电流同时存在有稳定电场和稳定磁场, 它们彼此不发生相互影响, 各自独立存在。

1. 稳定电场、电流连续性方程

众所周知, 当在导体的两端加上恒定的电压时, 在导体中就存在稳定的直流电流, 恒定电压由电路中的直流电源维持。

电源是一种能量转换装置, 它靠消耗其它形式的能(机械能、热能、化学能等等)而提供一种非静电力, 把正电荷从电源的负极(低电位)转移到正极(高电位), 从而保证稳定电流是闭合的。从能量角度来说, 导体中有电流就必然有能量损耗。因此要维持导体中的稳定电流, 必须依靠外源提供能量。

由欧姆定律 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (σ 为电导率)可知, 导体中的稳定电流要求导体内存在一个稳定的电场, 即导体内各处电场的分布不随时间变化。导体中的电荷在这个电场力驱动下作定向运动, 形成导体中的稳定电流。

导体中的电场是由分布在导体上的电荷产生的。稳定电场要求导体上的电荷分布是稳定的(不随时间变化),即导体中每一点上的电荷虽然不断地运动而被另一些电荷所代替,但每一点的电荷密度保持恒定,即 $\partial\rho/\partial t = 0$, 是一种动态平衡。否则,电荷密度分布的变化,必然使电场的分布不稳定。

那么导体上动平衡的电荷分布是怎样形成和如何分布的呢?这些电荷仅分布在导体的表面上,如图(1.2—1)所示,这一结论将在下面说明。

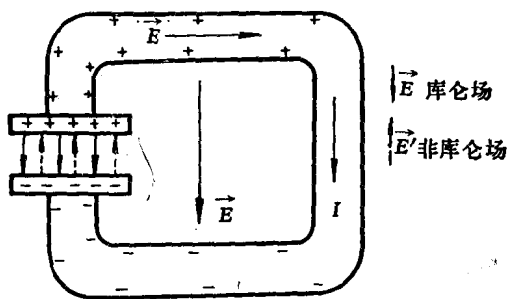


图 1.2—1

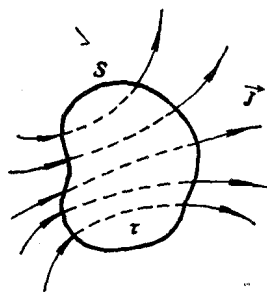


图 1.2—2

在直流电路中,我们要区分两种电场:一种是与非静电力相等效的非静电性电场,用 $\vec{E}'$ 表示,它仅存在于电源内部;另一种是由电荷所产生的稳定电场 $\vec{E}$,这是一种库仑场,它存在于电源外部的导体中以及导体外部的介质中,同时也存在于电源内部。

现在介绍电磁理论中的一条最基本的实验定律——电荷守恒定律:不论发生任何变化过程,一个系统的总电荷严格保持不变。在直流电路中,设想在载流导体中取一闭合面 S ,当通过此闭合面有电流流出时,则必然使 S 面内的电荷相应地减少,即

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\tau \quad (1.2-1)$$

其中 τ 是闭合面 S 所包围的体积,如图(1.2—2)所示。式(1.2—1)就是电荷守恒定律的数学表述,也称为电流连续性方程。利用高斯散度定理将面积分化为体积分,可得到其微分形式:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.2-2)$$

在稳定电场中, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, 则有

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.2-3)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.2-4)$$

这表示稳定电流的电流线总是闭合的曲线,既无始端又无终端。

下面说明电荷仅分布在导体表面上的结论。

电源外部的稳定电场是由不随时间变化的稳定分布的电荷所激发的,这种电荷分布与静止电荷相比较,就其激发电场而言,它们的效果相同,即稳定电场与静电场的基本