

高等学校试用教材



# 塑性力学基础

西安交通大学 蒋泳秋 编  
穆霞英



机械工业出版社

高等学校试用教材

# 塑性力学基础

西安交通大学蒋咏秋 穆霞英 编



机械工业出版社

## 前 言

本书系根据1978年4月在天津召开的高等学校一机部对口专业座谈会所确定的教材编写计划，以及同年10月在杭州召开的固体力学专业教材大纲会议上所讨论的内容编写的。

“塑性力学”这门课程概念性较强，国内又缺乏适当的统编教材，以致在教学过程中感到困难较大，因此在编写中我们结合以往的教学经验，努力做到难点分散、由浅入深、循序渐进。在文字上力求通俗易懂、深入浅出，着重从物理概念上说明问题。并密切注意理论联系工程实际。在教材的选择方面也考虑到能适当反映塑性力学发展的现状。

本教材内容反映的面较广，深度上亦有一定的伸缩性（有些章节附有\*号表示提高部分可供选读），因此既适用于力学专业的本科生及研究生，也可供机械、动力等系有关专业的研究生使用。在讲授中可根据专业要求作适当选择，也可供有关工程技术人员使用。

本书由西安交通大学蒋泳秋、穆霞英合编，清华大学徐秉业、黄炎主审。全书共十一章，其中第一、二、三、四、九、十章及附录由穆霞英编写，第五、六、七、八、十一章由蒋泳秋编写。本教材在大纲讨论及整个审订过程中，得到清华大学、浙江大学、大连工学院、华东水利学院等校固体力学专业及有关单位的熱情支持。在审稿过程中徐秉业、黄炎同志在百忙中认真负责地审阅了全文，提出宝贵的意见；在修订工作中一机部教编室责任编辑孙祥根同志对全稿进行仔细地审阅并提出可贵的意见。作者对有关单位的热情支持，对徐秉业、黄炎同志及孙祥根同志的负责精神，在此表示深切的谢意。

由于我们经验不足，水平有限，难免有错误和不妥之处，望批评指正。

# 目 录

<p>第一章 引论 ..... 1</p> <p>    § 1-1 塑性力学的任务 ..... 1</p> <p>    § 1-2 塑性力学的发展简况 ..... 1</p> <p>    * § 1-3 塑性变形的物理基础 ..... 2</p> <p>    § 1-4 基本实验资料 ..... 4</p> <p>    § 1-5 简化模型 ..... 7</p> <p>    § 1-6 应力应变曲线经验公式 ..... 8</p> <p>第二章 应力状态及应变状态 ..... 10</p> <p>    § 2-1 应力张量及其分解 ..... 10</p> <p>    § 2-2 应力不变量 ..... 11</p> <p>    § 2-3 等斜面上应力及应力强度 ..... 13</p> <p>    § 2-4 应力空间 ..... 15</p> <p>    § 2-5 罗代参数 ..... 16</p> <p>    § 2-6 三维应力圆 ..... 18</p> <p>    § 2-7 应变张量 ..... 19</p> <p>    § 2-8 应变速度及应变分量的增量 ..... 23</p> <p>第三章 屈服条件 ..... 25</p> <p>    § 3-1 屈服准则, 屈服函数 ..... 25</p> <p>    § 3-2 屈服面几何图形 ..... 25</p> <p>    § 3-3 屈雷斯加和密赛斯屈服条件 (屈服准则) ..... 28</p> <p>    § 3-4 实验验证与比较 ..... 31</p> <p>    § 3-5 屈服条件的应用 ..... 34</p> <p>    * § 3-6 屈服条件在断裂力学中的应用 ..... 40</p> <p>    * § 3-7 关于屈服准则的补充问题 ..... 41</p> <p>第四章 塑性应力应变关系 ..... 43</p> <p>    § 4-1 加载方式与加载准则 ..... 44</p> <p>    § 4-2 硬化条件(强化条件), 加载面 ..... 45</p> <p>    § 4-3 依留申理论(小弹塑性变形理论) ..... 50</p> <p>    § 4-4 汉基理论 ..... 56</p> <p>    § 4-5 列维-密赛斯与普朗特-路埃斯理论 ..... 57</p> <p>    * § 4-6 那达依理论 ..... 64</p> <p>    § 4-7 几种理论的总结和比较 ..... 67</p> <p>    § 4-8 实验验证 ..... 68</p> <p>    § 4-9 塑性势及流动法则 ..... 70</p>	<p>    * § 4-10 弹塑性有限元基本方法 ..... 76</p> <p>第五章 梁的弯曲 ..... 81</p> <p>    § 5-1 理想弹塑性材料梁的弯曲 ..... 81</p> <p>    § 5-2 硬化材料梁的弯曲 ..... 90</p> <p>    * § 5-3 有初始曲率宽板的弯曲 ..... 95</p> <p>第六章 柱体的扭转 ..... 98</p> <p>    § 6-1 弹性柱体的扭转 ..... 98</p> <p>    § 6-2 全部塑性的柱体扭转——沙堆比拟 ..... 98</p> <p>    § 6-3 部分塑性的柱体扭转——薄膜屋顶比拟 ..... 100</p> <p>    § 6-4 在塑性扭转轴中的残余应力 ..... 102</p> <p>    § 6-5 硬化材料圆柱体扭转 ..... 105</p> <p>    § 6-6 圆柱体承受扭转和拉伸 ..... 107</p> <p>第七章 轴对称及球对称问题 ..... 112</p> <p>    § 7-1 基本方程 ..... 112</p> <p>    § 7-2 理想弹塑性材料厚壁圆筒 ..... 113</p> <p>    § 7-3 承受内外压的组合圆筒 ..... 117</p> <p>    § 7-4 硬化材料厚壁圆筒 ..... 118</p> <p>    § 7-5 理想弹塑性材料旋转圆盘 ..... 121</p> <p>    § 7-6 硬化材料旋转圆盘 ..... 123</p> <p>    § 7-7 理想弹塑性材料厚壁球壳 ..... 128</p> <p>    § 7-8 硬化材料厚壁球壳 ..... 133</p> <p>第八章 结构的塑性分析和极限设计 ..... 136</p> <p>    § 8-1 基本概念 ..... 136</p> <p>    § 8-2 超静定桁架的塑性分析及极限载荷 ..... 136</p> <p>    § 8-3 连续梁的极限载荷 ..... 138</p> <p>    § 8-4 刚架的极限载荷 ..... 139</p> <p>    § 8-5 上下限定理 ..... 141</p> <p>    § 8-6 方板的极限载荷 ..... 142</p> <p>    § 8-7 用机动法计算多边形薄板的极限载荷 ..... 146</p> <p>    § 8-8 圆板的屈服条件(轴对称问题) ..... 151</p> <p>    § 8-9 圆板极限载荷的静力解及机动解 ..... 152</p>
---	--

## IV

§ 8-10 两个简单圆板例题 .....	153	§ 10-4 具有圆孔的平板 .....	213
* § 8-11 轴向力对极限载荷的影响 .....	158	第十一章 塑性稳定 .....	218
§ 8-12 结构安定性的概念 .....	160	§ 11-1 压杆的失稳 .....	218
第九章 理想刚塑性平面应变问题 .....	162	§ 11-2 折减模数公式 .....	220
§ 9-1 基本概念 .....	162	§ 11-3 切线模数公式 .....	221
§ 9-2 基本方程式 .....	162	§ 11-4 拉伸塑性失稳 .....	222
§ 9-3 滑移线及其几何性质 .....	164	§ 11-5 具有封头的薄壁筒承受内压时的 塑性失稳 .....	227
§ 9-4 边界条件 .....	169	§ 11-6 承受内压球壳的塑性失稳 .....	228
§ 9-5 几种边值问题及数值算法 .....	170	§ 11-7 具有应变硬化特性材料的简单拉 伸、柱壳及球壳失稳时的应力与 应变 .....	229
§ 9-6 单边受压楔形体的极限载荷 .....	173	§ 11-8 承受内压及轴向载荷的薄壁筒的 塑性失稳 .....	232
§ 9-7 圆孔周围的轴对称滑移场 .....	175	§ 11-9 金属圆膜的失稳 .....	233
§ 9-8 双边切口试件和中心切口试件的 极限载荷 .....	176	§ 11-10 在静水压力下薄壁壳与圆膜的强 度 .....	236
§ 9-9 速度场 .....	179	§ 11-11 等强度转盘失稳 .....	240
§ 9-10 平头冲模的压入 .....	181	附录 .....	243
§ 9-11 刚性板间压缩层 .....	186	I 最大剪应力均方值 $\bar{\tau}^2$ 的求法 .....	243
* § 9-12 不连续解 .....	189	II 强化模型 .....	244
* § 9-13 定常的塑性流动 .....	193	III 在滑移线场内速度场的几何性质 .....	246
* § 9-14 用极值原理求极限载荷 .....	195	IV 塑性的各向异性问题 .....	247
*第十章 理想刚塑性平面应力问题 .....	204	参考文献 .....	253
§ 10-1 平面应力状态方程式 .....	204		
§ 10-2 密赛斯屈服条件下的基本方程 式 .....	207		
§ 10-3 屈雷斯加屈服条件下的基本方程 式 .....			

# 第一章 引 论

## § 1-1 塑性力学的任务

众所周知,物体受外力作用后将发生变形,当外力除去,能够恢复到原有形状的变形,即为“弹性变形”。但是,当外力加大到一定程度,使材料内部的应力超过某一限值时,即使外力除去后,变形亦不会完全恢复,而是保留了一部分残余变形,这一性质就是材料的“塑性”。此残余变形即称为“塑性变形”。

塑性力学是固体力学的一个分支,其主要任务是研究物体在塑性变形阶段的应力和变形的规律。通常在塑性力学的研究中不考虑时间因素和加载速度对材料力学性质的影响。例如在常温条件下,钢材及各种高强度合金的塑性变形与时间无关。但在高温条件下,同样的载荷,同样的材料,会发生随着时间而增长的塑性变形。这种变形称为金属的“蠕变”。还有,材料在高速载荷作用下,如子弹的冲击、烈性炸药的爆炸、核子爆炸的冲击等,这时材料本身弹塑性性质将发生改变,而与高速载荷有关,载荷和时间因素将成为主要因素。对于这些问题的研究就构成了“爆炸力学”、“塑性波动力学”。而本课程主要是研究塑性力学中最基本部分。在工程技术上存在着许多实际问题,有待于塑性力学去解决。例如零件的表面有小孔,在孔洞附近由于应力集中而产生局部的塑性变形,但其他部位仍处于弹性状态,这时就需要用塑性理论来校核孔洞附近的材料强度,研究结构的承载能力。又如杆件、薄壳结构的塑性失稳问题,也是塑性力学要解决的课题。而另一方面,如金属的压力加工问题则恰恰是利用塑性变形的不可恢复性,需要用塑性理论来分析压延力和压模设计等问题。再者,塑性力学也为更有效地利用材料的强度、进行合理的设计、节约材料,提供了理论基础。因此塑性力学是一门生产中发展的学科。

塑性力学与弹性力学同属固体连续介质力学的基本组成部分。因此在小变形情况下,线弹性力学中除了物理关系(广义虎克定律)外,所有在连续体基础上建立的基本方程,如平衡方程、边界条件、几何方程等在塑性力学中同样适用。但是在塑性力学中还需要补充反映塑性变形的物理方程,而这种物理关系的建立有赖于实验,因此塑性力学的实验研究工作显得特别重要,它是各种基本理论的依据和出发点,只有进行大量的实验研究工作才能保证这门学科的发展。

## § 1-2 塑性力学的发展简况

金属塑性力学的研究可以说是在1864年,屈雷斯加<sup>[1]</sup>(Tresca)公布了关于冲压和挤压的初步实验报告提出最大剪应力屈服准则开始的。1870年圣文南<sup>[2]</sup>(Saint-Venant)应用屈雷斯加屈服准则计算理想塑性圆柱体受扭转或弯曲时的弹塑性应力,并建立了二维流动中平面应变方程式。同一年列维<sup>[3]</sup>(Levy)又推广了圣文南的概念列出三维情况下的方程式。

此后,塑性力学的发展是缓慢的,到1909年哈尔<sup>[4]</sup>(Haar)和卡门(T. Von Karman)从

某些应变原理出发建立塑性理论方程式。总的说在本世纪初人们已在实验研究工作中提出了各种屈服准则。不过对大多数金属而言,最令人满意的是密赛斯<sup>[5]</sup>(Mises)在1913年发表的准则,同时密赛斯还独立地提出类似于列维的方程。但是自从密赛斯的屈服准则及应力应变关系发表以后,引起强烈的反应,使塑性力学得到重要的进展。直到1926年罗代<sup>[6]</sup>(Lode)证实了列维-密赛斯应力应变关系在一级近似下是准确的。1924年汉基<sup>[7]</sup>(Henky)又采用密赛斯屈服准则提出另一理论,对于解决塑性微小变形问题很方便。以后,1930年路埃斯<sup>[8]</sup>(Reuss)依照普朗特<sup>[9]</sup>(Prandtl)观点,考虑了弹性应变分量,把普朗特所得二维方程式推广到三维表达式,使列维-密赛斯理论完善化。1937年那达依<sup>[10]</sup>(Nadai)考虑了材料的加工硬化,建立了大变形情况下的应力应变关系。1943年依留申<sup>[11]</sup>(Ильюшин)的“微小弹塑性变形理论”相继问世,由于计算方便得到欢迎,1949年巴道夫、布第扬斯基<sup>[12]</sup>(Batdorf, Budiansky)又从晶粒滑移的物理概念出发提出滑移理论。

在1950年前后,曾应用塑性势理论,讨论了与满足杜拉格<sup>[13]</sup>(Drucker)假定的屈服条件(即屈服准则)相联系的一般应力应变关系。原先以密赛斯屈服条件作为塑性势函数,1953年由考依脱(Koiter)和普拉格<sup>[14]</sup>(Prager)提出与屈雷斯加屈服条件相关连的流动法则,这给极限分析带来极大的方便。可以讲到五十年代,塑性力学的研究在许多国家得到重视,开展大量的理论和实验的研究工作。另外,在六十年代前后对于结构承载能力的研究有很大发展。特别是杜勒格、普拉格等对三维应力状态提出的极值原理。且从而引出的上限及下限定理,使得由一维问题的研究推广到一般连续体的极限分析。

由于塑性力学方程是非线性的,因而在近似计算方法上引起人们的注意。近来因为电子计算技术的发展,应用增量理论进行近似计算的讨论已比较多。目前有限元法在弹塑性理论中已广泛应用,可以预计,用有限元法和其他数值计算方法进行塑性应力分析将有广阔的前途。

### \* § 1-3 塑性变形的物理基础

由固体物理学可知,固体材料之所以能平衡,因固体原子之间存在相互平衡的力(吸引力和排斥力)。物体因受力而产生弹性变形时破坏了原子间的平衡,为了恢复平衡,原子便移动到附近位置使晶格原子间距改变,但并没有改变晶体点阵的基本排列形式(图1-1),因此除去外力,各原子又恢复到原先最小的稳定平衡位置。可用波恩的晶体点阵理论由应力确定应变。当物体受力产生塑性变形时,晶格的一部分对另一部分产生位移而形成“滑移”,改变了晶体点阵排列的形式(图1-2)。外力除去后,原子不能恢复其原来位置。由实验证明,塑性变形的机理是滑移。在许多情况下,滑移表面是平面,称之为“滑移面”,滑移面与晶体外表面的交线称“滑移线”,即是拉伸试件在显微镜下所能清楚见到的切尔诺夫线。

实验证实,沿着某些晶面比较容易产生滑移,并且滑移一般是沿着原子最密集的方向发生的。这种滑移面的方位随晶体而异。例如面心立方的晶体将沿着八面体面滑移,体心立方晶体将沿着对角线平面滑移等见图1-3。但实验表明,只有在滑移平面上沿着滑移方向的剪应力达到某一临界值时,“滑移”才会发生。

一个完善晶粒能达到 $10^{-1}$ 量级的弹性剪应变,但一般情况,实验测得,弹性变形不超过量级为 $10^{-4}$ 的宏观剪应变。这差异的由来,是因为点阵结构存在“缺陷”(原子排列不规则,

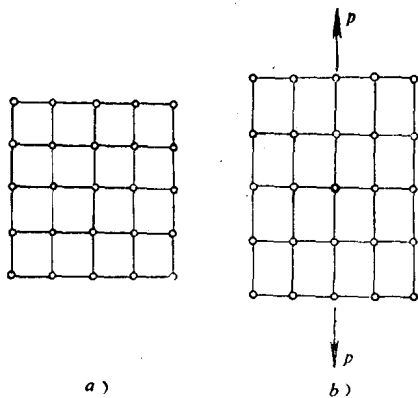


图1-1 正应力对晶格作用示意图

a) 无应力 b) 弹性变形

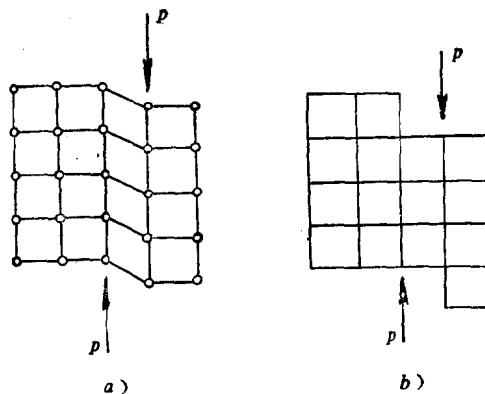


图1-2 剪应力对晶格作用示意图

a) 弹性歪曲 b) 塑性变形(滑移)

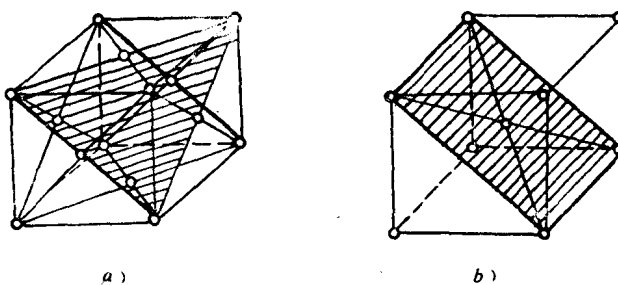


图1-3 金属晶格的滑移面

a) 面心立方 b) 体心立方

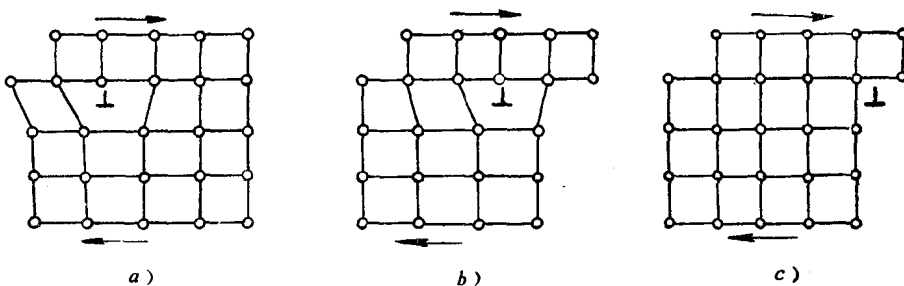


图1-4 外力作用下位错从晶体的一边传播到另一边

图 1-2 所示理想情况实际是不存在的)。这种“缺陷”减弱了晶粒对滑移的抵抗称为“位错”，用符号  $\perp$  表示。位错理论的研究表明，由于晶体内存在位错，只要施加很小的切应力，就能使得位错移动通过晶体（如图 1-4 所示，位错由晶体一边传播到另一边）结果使位错通过的两侧发生滑移。所以，晶体滑移不是一个原子层对另一原子层同时整体滑动，而是逐个原子依次滑动的结果。故可认为“滑移”是在有位错的地方发生的，位错则是逐步传播的。

另外，一般金属多晶体，是各种形状和方位的晶粒紧密聚集体。晶粒的方位是不规则分布，各个晶粒的平均尺度是非常小的。（晶粒为  $10^{-3}$  到  $10^{-2}$  厘米比试件尺寸  $1 \sim 10^2$  厘米小得



多)。因此,金属材料可以看成在宏观上各向同性的。如果试件沿某一方向经受大变形,则每个晶粒中相同的晶体方向逐渐转到共同轴线,这时材料(产生了一个择优方位)趋于明显的方向性(各向异性)。

金属塑性变形主要是通过滑移,另一部分是通过孪晶。而孪晶是当晶体发生转动,晶体变形平面转换到另一组平面(剪应力达到临界值的位置)时开始形成。有时是由于晶体的对称性,晶块沿晶面产生对称滑移,这时可能有两个或两个以上的结晶面同时发生滑移。

上述说明塑性变形的全面研究要与金属物理密切结合。

## § 1-4 基本实验资料

这里介绍金属材料在室温下的某些宏观实验资料。

### (一) 应力应变曲线

应力应变曲线可以通过单向拉伸(或压缩)、薄壁管扭转实验得到,这是塑性理论最基本的实验资料之一,由于纯扭试验所得的曲线几乎与拉伸图完全相似,因此只介绍单向拉伸(或压缩)的某些实验结论:

1. 一般的金属材料可根据其塑性性能的不同分成两类:一类是有明显的屈服流动阶段,有的材料流动阶段是很长的,往往变形可以达到1%,例如低碳钢、铸钢、某些合金钢等,通常把初始屈服时的应力作为屈服极限,用 $\sigma_s$ 表示;又如退火软钢及某些铝合金有上、下屈服点时,因上屈服点一般不稳定,对实验条件很敏感,故采用下屈服点C作为 $\sigma_s$ ,如图1-5所示。另一类是没有明显的屈服流动阶段,例如中碳钢、某些高强度合金钢及某些有色金属等,则规定以0.2%残余应变时的应力作为条件屈服极限 $\sigma_{0.2}$ 。

2. 按照原始断面计算的应力应变曲线与按瞬时断面计算的真应力图。

在小弹塑性阶段,两者基本一致,当塑性变形较大时,两种拉伸曲线才有明显的差异。这时应力应变曲线必须以真应力图表达。

令拉伸试件的瞬时长度为 $l$ ,原始长度为 $l_0$ ,则瞬时应变(亦称“对数应变”或“自然应变”)用 $\epsilon$ 表示。

$$\text{因} \quad d\epsilon = \frac{dl}{l} \quad (1-1)$$

$$\text{故} \quad \epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$$

常用的条件应变(工程应变)

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

自然应变与条件应变的关系为

$$\epsilon = \ln(1 + \epsilon) \quad (1-2)$$

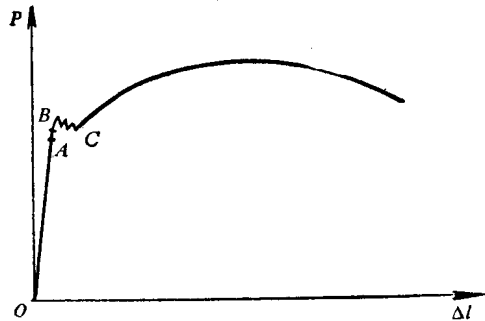


图1-5 退火软钢单向拉伸图

在小变形阶段， $\epsilon$  与  $\epsilon$  几乎全等，但随着应变量的增加，两者差别越来越大，如图 1-6 所示。

3. 对一般金属材料，拉伸与压缩试验曲线在小弹塑性变形阶段基本重合，但在大塑性变形阶段就有显著差别（压缩曲线略高于拉伸曲线）。但精确的试验发现某些高强度合金钢的  $\sigma_s$  和  $E$  在拉伸和压缩的情况下也有区别，因此对于一般金属材料，在变形不大的情况下，用简单拉伸试验代替简单压缩试验进行塑性分析是偏于安全的。但对拉伸与压缩曲线有明显区别的材料如铸铁、混凝土则需另作专门研究。因此下面继续讨论拉伸图的主要塑性特性。

4. 图 1-5 所示  $A$  点为比例极限  $\sigma_p$ ，应力略有增加到达  $B$  点为弹性极限  $\sigma_e$ ，是材料在弹性范围内习用的界限。应力在  $B$  点以前应力应变关系是线性的；应力在  $B$  点以后应力应变关系是非线性的，并且曲线发生显著的弯曲。能观察到永久变形时的应力点  $C$  即屈服应力  $\sigma_s$ 。由  $B$  点到  $C$  点可以认为是晶粒渐次从弹性状态开始屈服到全部达到塑性状态的过渡。实际上  $\sigma_p$ 、 $\sigma_e$ 、 $\sigma_s$  三者相差甚微，可近似地看作一个点，在塑性理论中认定  $C$  点作为弹性状态到塑性状态的过渡点，即作为塑性变形的起点。

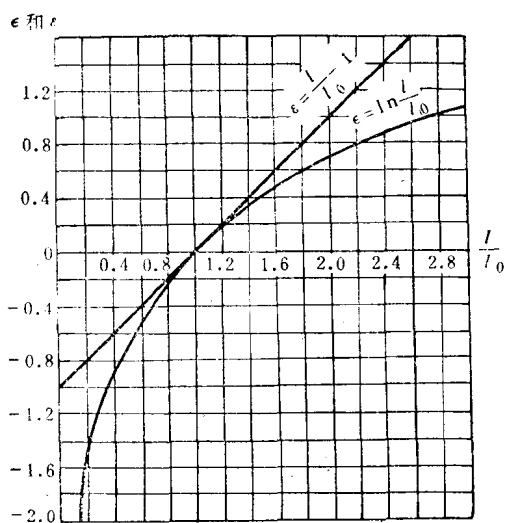


图1-6 条件应变和对数应变

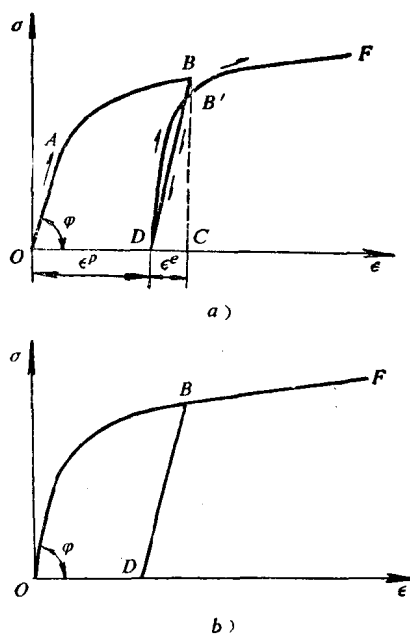


图1-7 二次加载的应力应变图

a) 实验曲线 b) 简化曲线

5. 应力超过屈服极限以后将拉伸载荷卸去，卸载过程中应力应变曲线  $BD$  近似平行于原来的弹性阶段  $AO$  如图 1-7。

$$E = \operatorname{tg} \varphi$$

即得简单拉伸的卸载规律

$$\sigma_{卸} = E \epsilon_{卸} \quad (1-3)$$

应力点  $B$  处，把载荷卸去，所得卸应变  $\epsilon_{卸}$  即图中  $DC$  部分。这部分变形恢复，可用  $\epsilon^e$  表示，尚残留变形  $OD$  用  $\epsilon^p$  表示。这说明应力点  $B$  的总变形  $\epsilon$  等于能恢复的弹性变形加残余的塑性变形。

即

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (1-4)$$

因此超过弹性极限以后，每一应力点的总应变为弹性应变及塑性应变两部分所组成。

6. 超过弹性极限的应力点  $B$  卸载后再加载。由实验观察，有一段弹性变形，接着一段小的塑性变形，当应力接近于  $B'$  点处较急地拐弯见图 1-7a。 $BB'$  相差极微（允许的误差之内），可看作重合见图 1-7b，则  $B$  点即为第二次加载的新屈服应力。实验说明第二次加载过程中弹性系数仍保持不变，但弹性极限及屈服极限有升高的现象，并且其升高的程度与塑性变形的历史有关，决定于以前的塑性变形程度。这种弹性极限与屈服极限提高的性质称为“强化”或“加工硬化”。 $\sigma - \epsilon$  曲线的切线斜率越大则硬化效应也越显著。如再继续加载，则应力应变图仍沿原曲线  $BF$  进行。

7. 如卸载后进行反向加载（拉伸改为压缩）。首先出现压缩的弹性变形，随后产生塑性变形，但这时新的屈服极限有所降低，即压缩应力应变曲线比通常的压缩试验曲线弯得早了，见图 1-8，压缩屈服极限为  $\sigma'_s$ ，卸载后反向加载的屈服极限为  $\sigma''_s$ ，

则 
$$\sigma''_s < \sigma'_s$$

这种使压缩屈服极限降低的现象称为鲍辛格 (Bauschinger) 效应。要考虑这种因素对塑性问题的处理会带来很大的困难，因此多数塑性理论中都不加考虑。但这种效应使材料具有各向异性的性质，对于有往复加载的情况应予以考虑。

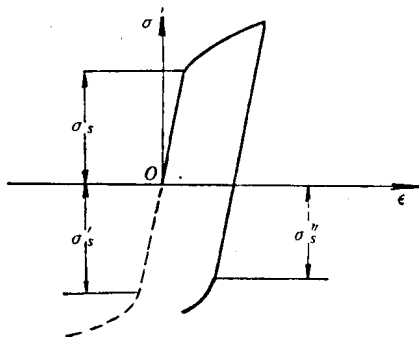


图1-8 鲍辛格效应

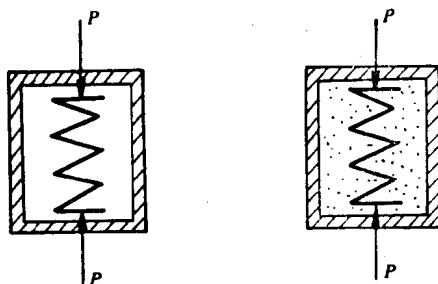


图1-9 考克的静水压力试验

## (二) 静水压力（各向均压或均拉的应力状态）试验

### 1. 关于体积变化

实验指出：在静水压力作用下，固体金属的体积变化基本是弹性的，去掉压力后体积变形可以恢复，不呈现残余的体积变形。并且在塑性变形过程中，总的体积变化（密度改变）是微小的。勃里奇曼<sup>[15]</sup> (Bridgman) 曾作各向均压试验，当压力到达 15000 大气压，提出各向均压力  $p$  和单位体积变化  $\theta$  之间关系为：
$$\theta = \frac{1}{K} p \left( 1 - \frac{1}{K_1} p \right)$$
，式中  $K$  为体积压缩模量， $K_1$  为派生模量，这些模量对不同的金属数值不同。当  $p$  约为金属的屈服极限时，勃里奇曼的公式与弹性规律： $\theta = \frac{1}{K} p$  偏差约 1%，完全可以忽略  $K_1$  的影响，按弹性规律考虑。又在 10000 大气压力下弹簧钢作试验，体积仅缩小 2.2%，镍仅缩小 1.8%，只有百分之几，但也有一些松散结构的碱性金属如铯在  $1.5 \times 10^4$  大气压力下，体积改变约为 1/3，这时体积变化显然不能忽视。因此对一般金属材料，在塑性变形很大时，忽略体积变化，认为体积不可压缩是合理的。

### 2. 静水压力对屈服极限的影响

试验证明：静水压力不影响屈服。考克<sup>[16]</sup> (Cook) 曾作如下试验。在图 1-9 所示容器

中放置一弹簧。加压力  $P$  到屈服，根据屈服时的载荷  $P$  可以换算出弹簧材料的屈服极限。然后，在容器中加液压，重复上述试验，再求出弹簧材料的屈服极限，发现弹簧的屈服极限值不随容器中液压的升高而改变。如果，卸去载荷  $P$  且不断提高液压，则材料并不屈服。由此试验说明静水压力不影响初始屈服应力的数值。另外，勃里奇曼也测定了各种钢试件在轴向拉伸与静水压力同时作用下的应力应变曲线，作到均值应力稍大于拉伸应力为止，也证实了静水压力对初始屈服极限的影响很小可以忽略不计。但此结论只能用于致密材料，对于像铸造金属、矿物等材料，则静水压力影响就比较大，不能忽略。注意所述试验资料是由各向均压的情况下得到。实际上各向均拉的试验很难做到。由于考虑到拉伸与压缩的屈服性质相同而推广到各向均拉的情况，因此“静水压力”包含各向均拉的含意是带有假设性的。

值得指出：变形速度、时间、温度等因素对应力应变曲线都有影响，但这些影响在一定条件下才比较明显。对金属材料在普通的变形速度及室温条件下影响不大。上述试验也即是在普通变形速度及室温下进行的。

## § 1-5 简化模型

这里在前节所述实验观察的基础上采用基本假设，忽略某些次要因素得到理想化的简化模型，作为进一步建立理论的基础。但由于材料在屈服之后，应力应变曲线是非线性的，即使建立了理想化的模型问题仍很复杂，在解决具体问题时，常常对应力应变曲线进行简化。今将两种简化分述如下：

### (一) 基本假设：

1. 塑性体是初始各向同性（即初次屈服前为各向同性）、均质、连续的。
2. 塑性变形部分的体积变化为零。体积变化是弹性的，与平均应力呈线性关系。因体积变化本身是微小的，有时也采取不可压缩的假设。
3. 一般情况下静水压力不影响屈服。
4. 拉伸与压缩屈服应力相等。且不考虑鲍氏效应。

### (二) 应力应变曲线的简化

有的材料有明显的屈服流动阶段，且流动阶段比较长；或者硬化的程度比较小可以忽略硬化的影响。这时都可以采用理想弹塑性材料模型如图1-10。应力到达屈服极限以前，应力应变呈线性关系，应力到达屈服极限以后，保持为常数  $\sigma_s$ 。若所研究问题变形比较大，相应的弹性应变部分可以忽略，可采用理想刚塑性模型，则应力恒为  $\sigma_s$ ，如图1-11。此外，对于

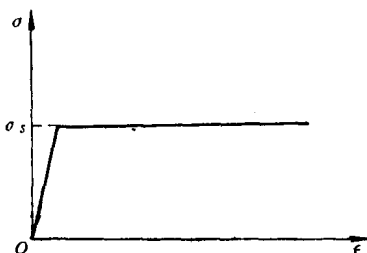


图1-10 理想弹塑性材料

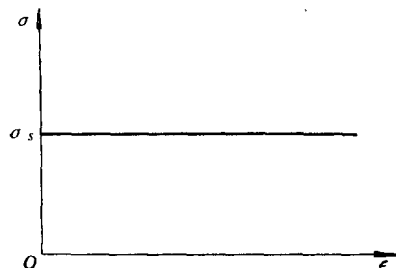


图1-11 理想刚塑性材料

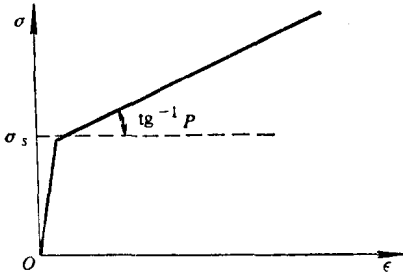


图1-12 线性硬化弹塑性材料

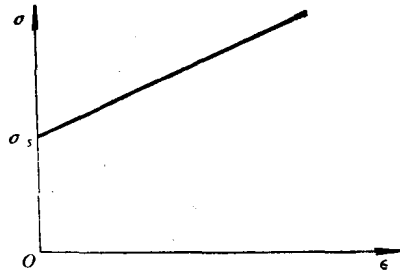


图1-13 线性硬化刚塑性材料

硬化材料，也有将塑性硬化部分用直线代替称为线性硬化弹塑性材料如图1-12。若变形比较大，而弹性应变部分比较小可以略去，成为线性硬化刚塑性材料模型如图1-13。对于实际问题采用哪一个模型，就要看所使用的材料及实际问题所属的领域而定。

### § 1-6 应力应变曲线经验公式

在塑性理论中为了便于求解可以应用关于应力应变曲线的经验公式。下面的公式是按对数应变定义的。假如用于解决弹塑性问题，当塑性应变与弹性应变同量级时，用工程应变定义更方便。

(一) 路得维克 (Ludwik) 公式

$$\sigma = \sigma_0 + p\epsilon^n \quad (1-5)$$

式中  $p$ ,  $n$  是常数。

当  $n = 1$  时，为冷作硬化材料，半硬化铝能很好符合如图1-13。公式 (1-5) 表示应力达屈服点  $\sigma_0$  以前材料为刚性 (不变形)，随后应变硬化率为常数。

当  $0 < n < 1$  时，曲线如图1-14 a 所示，表示弹性应变被忽略的幂硬化情况。

当常数项  $\sigma_0$  为零，表达式变成  $\sigma = p\epsilon^n$  为幂次曲线如图 1-14 b 是目前应用较广的幂硬化材料，与多数工程材料的实际性能相接近，且应用比较方便。但在  $\epsilon = 0$  时杨氏模量为不定值，因而对应变较小的区域近似性差些，对应变大的问题，用于铝等强化材料近似性较好。

(二) 折线公式

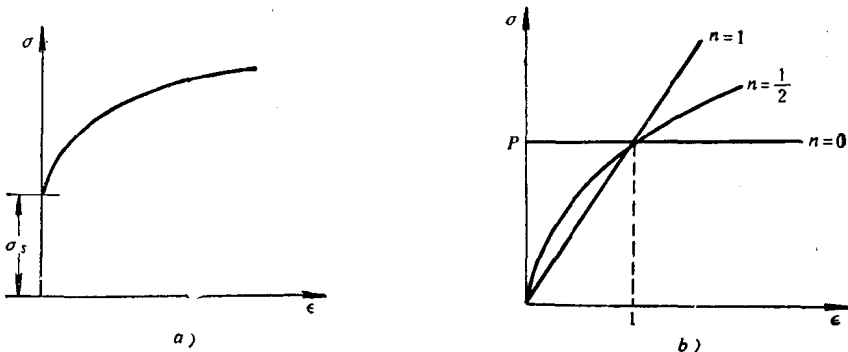


图1-14 路得维克的硬化曲线

a) 忽略弹性应变的幂硬化曲线 b) 当常数项为零时的幂硬化曲线

另一方法是用两个或更多的线性应力应变表达式来趋近真实的应力应变曲线，表示如图1-15所示折线  $OBC$ 。其公式为

$$\begin{aligned}\sigma &= E\epsilon & \sigma < \sigma_s \\ \sigma &= E'\epsilon & \sigma \geq \sigma_s\end{aligned}$$

(三) 佛奥斯 (Voce) 和佩尔姆 (Palm) 公式

$$\sigma = a + (b - a)\{1 - \exp(-n\epsilon)\}$$

此式对中等应变是成功的，但  $\epsilon \rightarrow \infty$  时， $\sigma \rightarrow b$ ，不一定符合。同样  $\epsilon = 0$  时  $\sigma = a$ ，不一定能和初始屈服应力符合。显然此式对小应变不能用，并且方程表达式太复杂也不适用（式中  $a$ 、 $b$ 、 $n$  是常数）。

(四) 斯韦特 (Swift) 公式

$$\sigma = A(B + \epsilon)^n \quad 0 \leq n \leq 1 \quad (1-6)$$

式中  $A$ 、 $B$ 、 $n$  是常数，由材料性质所决定。

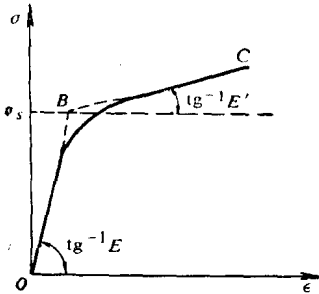


图1-15 线性组合的应力应变曲线

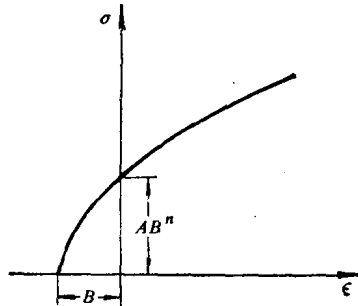


图1-16 斯韦特的硬化曲线

由上面的式子可见，当  $\sigma = 0$  时  $\epsilon = -B$ ，如图1-16所示。(1-6) 式表示材料由简单拉伸到应变  $B$  以后冷作硬化（或应变硬化）的真应力—对数应变关系。而  $\epsilon$  是测得  $B$  以后的应变。在应用中以图 1-16 所示  $\sigma > 0$  时曲线来描述应力应变硬化曲线。此式适用于大应变的情况，例如拉伸失稳问题的研究（见第十一章）。当  $B$  为零时即为前述的幂次曲线。

(五) 普拉格 (Prager) 公式：

$$\sigma = \sigma_s \tanh\left(\frac{E\epsilon}{\sigma_s}\right)$$

该方程所给出图形，没有尖锐的屈服点，它们从弹性区到塑性区给出一个逐渐的过渡。曲线开始时有斜率  $E$ ，弯过来以后渐渐地趋近于应力  $\sigma_s$ ，且变形在弹性量级时应力就很快到达  $\sigma_s$ 。

## 第二章 应力状态及应变状态

由于塑性体与弹性体一样同属均匀、连续体，因此弹性力学中所建立的应力状态及应变状态理论（几何变形理论）在塑性力学中仍然适用。这里只作简要讲述和补充。

### § 2-1 应力张量及其分解

对于一般空间问题，一点的应力状态可以由九个应力分量表示，如  $P$  点应力状态在直角坐标系可表示为

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$$

如图 2-1 所示。在固定的受力情况下，其大小与座标轴的方向有关。对于新的座标系的应力分量，由弹性力学知道可以通过座标变换关系而得到，具有这种变换关系的九个分量总体称为“应力张量”，表示一点的应力状态。

以符号  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) 表示应力张量，可写成如下形式

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

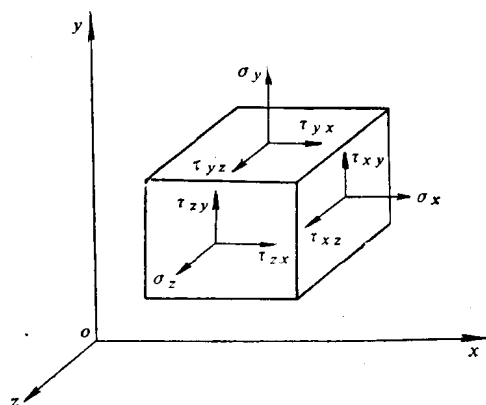


图2-1 一点的应力状态

上式只是一种表达形式<sup>⊖</sup>，与行列式不同，不能经过一定运算得出数来。由于剪应力的互等性式中  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ， $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ， $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ，因此应力张量为“对称张量”。

设三个正应力的平均值称为平均应力，并用  $\sigma_m$  表示，即

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2-2)$$

于是

$$\sigma_x = \sigma_m + (\sigma_x - \sigma_m)$$

$$\sigma_y = \sigma_m + (\sigma_y - \sigma_m)$$

$$\sigma_z = \sigma_m + (\sigma_z - \sigma_m)$$

应力张量可以分解成两个分张量

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$$

<sup>⊖</sup> 应力张量  $\sigma_{ij}$  的分量也可以直接表示为

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zy}, \sigma_{xz}, \sigma_{zx}$

等式右端第一个张量称为球张量，第二个张量称为应力偏量。  
球张量可表示为

$$\begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} = \sigma_m \delta_{ij}$$

式中  $\delta_{ij}$  定义为：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{当 } i = j) \\ 0 & (\text{当 } i \neq j) \end{cases}$$

因而  $\delta_{ij}$  即是单位球张量  
即

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

令  $S_x = \sigma_x - \sigma_m$ ,  $S_y = \sigma_y - \sigma_m$ ,  $S_z = \sigma_z - \sigma_m$ ,  $S_{xy} = \tau_{xy}$ ,  $S_{yx} = \tau_{yx}$ ,  $S_{yz} = \tau_{yz}$ , ……

则应力偏量用符号  $S_{ij}$  表示，其表达式即为

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = \begin{bmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_y & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & S_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & S_z \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

这样把原来应力状态分解为应力球张量和应力偏量如图 2-2 所示。应力球张量表示各向均值应力状态，即静水压力情况。原应力张量扣去静水压力所得即应力偏量。前述实验资料可知：静水压力不影响屈服，塑性变形与静水压力无关而与应力偏量有关。因此在塑性理论中对应力偏量的研究很重要，它显示出与塑性变形有关的部分。另外，应力球张量只产生体积改变，因此应力偏量又显示出与形状改变有关的部分。

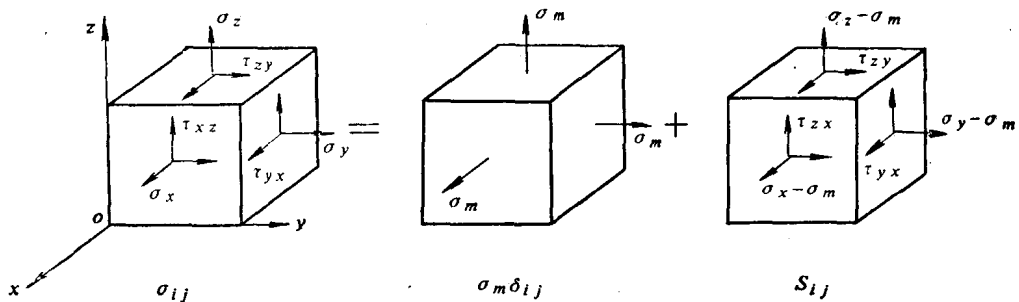


图2-2 应力张量的分解

## § 2-2 应力不变量

已知物体内某点  $P$  的九个应力分量，则可求出过该点任意倾斜面上的应力。在  $P$  点处取一无限小四面体  $oabc$ ，如图 2-3 所示。它的三个面分别和  $x$ ,  $y$ ,  $z$  轴相垂直，另一面  $abc$



即任意的倾斜面，它的法线为  $N$ ，以  $l$ 、 $m$ 、 $n$  分别代表法线  $N$  的方向余弦。以  $dF$ 、 $dF_x$ 、 $dF_y$ 、 $dF_z$  分别代表  $abc$ 、 $obc$ 、 $oac$ 、 $oab$  三角形面积。

$$\left. \begin{aligned} dF_x &= ldF \\ dF_y &= mdF \\ dF_z &= ndF \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

在三个垂直于座标轴平面上有应力分量。

在倾斜面  $abc$  上有法向的正应力  $\sigma_n$  及切向的剪应力  $\tau_n$ ，它们之间的合成为  $p_N$ ，

$$\text{即} \quad p_N^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \quad (2-5)$$

$p_N$  沿座标轴方向分量为  $X_N$ 、 $Y_N$ 、 $Z_N$ ，利用平衡条件可得

$$\left. \begin{aligned} X_N &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y_N &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z_N &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

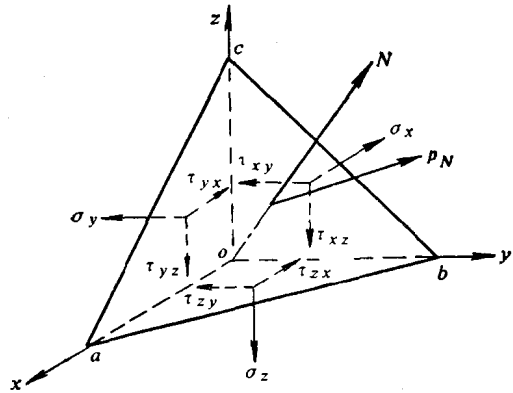


图2-3 倾斜面上的应力

求出  $X_N$ 、 $Y_N$ 、 $Z_N$  在法线方向投影之和，即得正应力  $\sigma_n$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= X_N l + Y_N m + Z_N n \\ &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl \end{aligned} \quad (2-7)$$

而剪应力则由 (2-5) 式可得

$$\tau_n^2 = p_N^2 - \sigma_n^2$$

在空间应力状态下一点的应力张量有三个主方向、三个主应力，利用前面式子可以求得主应力。设倾斜面的法线方向顺着某一主方向，则该面上  $\tau_n = 0$ ， $\sigma_n$  即为主应力，等于合应力  $p_N$ 。而主应力在座标轴上的分量为

$$\left. \begin{aligned} X_N &= \sigma_n l \\ Y_N &= \sigma_n m \\ Z_N &= \sigma_n n \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

(2-8) 式代入方程组 (2-6)，整理后得到

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_n) l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= 0 \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma_n) m + \tau_{zy} n &= 0 \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma_n) n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

另外，法线  $N$  的三个方向余弦必满足关系式

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (2-10)$$

由上面 4 个方程可以求得  $\sigma_n$  及方向余弦  $l$ 、 $m$ 、 $n$ 。如果暂时只将  $l$ 、 $m$ 、 $n$  看作未知量，则  $l$ 、 $m$ 、 $n$  不能同时为零。而线性方程组非零解的充要条件为系数行列式等于零。

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (2-11)$$

展开行列式得到

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0 \quad (2-12)$$