

信号的统计检测与估计理论

李道本 编著

图书在版编目(CIP)数据

信号的统计检测与估计理论/李道本编著. —北京:北京邮电大学出版社,1996.11
ISBN 7-5635-0209-2

I. 信… II. 李… III. 信号检测-估计理论 IV. TN911.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (95) 第 20852 号

信号的统计检测与估计理论

编 著 李道本

责任编辑 周 明

*

北京邮电大学出版社出版

(北京市海淀区西土城路 10 号)

河北省高碑店市印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092 毫米 1/16 印张 25.5 字数 648 千字

1996 年 1 月第一版 1996 年 1 月第一次印刷

印数:1-1500 册

ISBN 7-5635-0209-2/TN·80 定价:26.50 元

目 录

前 言	(1)
第一章 信号的矢量与复数表示	(1)
§ 1-1 确知信号集中信号的矢量表示	(1)
§ 1-2 Gram-Schmidt 归一化正交程序与信号展开式	(4)
§ 1-3 信号的复表示	(5)
§ 1-4 Hilbert 变换及其性质	(8)
§ 1-5 线性系统的复表示	(10)
§ 1-6 窄带随机过程	(11)
§ 1-7 Karhunan-Loeve 展式	(15)
习 题	(20)
第二章 噪声与干扰	(22)
§ 2-1 随机噪声	(22)
§ 2-2 高斯噪声	(25)
§ 2-3 复高斯过程	(27)
习 题	(30)
第三章 假设检验	(32)
§ 3-1 假设检验的一般理论——Bayes 检验	(32)
§ 3-2 二元假设检验	(36)
3-2-1 Bayes 检验	(36)
3-2-2 最小最大检验	(40)
3-2-3 Neyman-Pearson 检验	(42)
§ 3-3 二元检验的施行特征	(45)
习 题	(49)
第四章 确知信号的检测	(53)
§ 4-1 白高斯噪声中二元确知信号的检测	(53)
4-1-1 实信号形式解	(53)
4-1-2 复信号形式解	(55)

4-1-3 差错概率性能	(57)
§ 4-2 白高斯噪声中多元确知信号的检测	(60)
4-2-1 最大似然接收机	(60)
4-2-2 差错概率性能——简单上界	(61)
§ 4-3 有色高斯噪声中二元确知信号的检测	(64)
4-3-1 取样形式解	(64)
4-3-2 Karhunan-Loeve 展式解	(67)
4-3-3 差错概率性能	(69)
§ 4-4 匹配滤波器	(69)
4-4-1 从相关器到匹配滤波器	(69)
4-4-2 平稳噪声中具有最大输出信噪比的滤波器	(71)
*4-4-3 匹配滤波器的近似解	(73)
4-4-4 白化滤波器	(74)
§ 4-5 有色高斯噪声中多元确知信号的检测	(75)
4-5-1 最小差错概率接收机	(75)
4-5-2 对称正交信号接收机的差错概率	(76)
* § 4-6 积分方程的解	(83)
4-6-1 非齐次方程	(83)
4-6-2 齐次方程	(86)
习 题	(90)
第五章 具有随机参量信号的检测	(94)
§ 5-1 复合假设检验	(94)
§ 5-2 具有随机相位信号的检测	(97)
5-2-1 最佳接收机结构	(98)
5-2-2 最佳接收机的差错概率性能	(100)
§ 5-3 二元正交随机相位信号的检测	(104)
§ 5-4 Rayleigh 衰落信道二元正交随机相位信号的检测	(106)
* § 5-5 M 元正交随机相位信号的检测	(110)
* § 5-6 Rayleigh 衰落信道 M 元正交随机相位信号的检测	(115)
习 题	(116)
第六章 多重(分集)信号的检测	(118)
§ 6-1 非独立有色高斯噪声中多重信号的最佳检测	(118)
* § 6-2 具有随机相位多重弱信号的检测	(120)
* § 6-3 平方律域值检测器的检测概率	(123)

§ 6-4 不相关分集	(126)
6-4-1 相干接收机	(127)
* 6-4-2 非相干接收机	(133)
* § 6-5 相关分集	(136)
6-5-1 相干接收机	(136)
6-5-2 非相干接收机	(144)
6-5-3 非相干域值接收机	(147)
习 题	(149)
第七章 序贯检测	(151)
§ 7-1 二元序贯似然比检验	(152)
7-1-1 检验的基本程序	(152)
* 7-1-2 辅助定理	(153)
* 7-1-3 一个基本恒等式	(156)
* 7-1-4 序贯似然比检验的施行特征	(157)
7-1-5 域值 A 与 B 的确定	(158)
7-1-6 平均观测次数 $E_0(n)$	(160)
7-1-7 序贯似然比检验的意义	(161)
§ 7-2 两个检验实例	(162)
7-2-1 高斯随机变量均值的检验	(162)
7-2-2 0-1 分布随机变量参数 p 检验	(164)
* § 7-3 序贯似然比检验的极限有效性	(167)
7-3-1 最佳固定样值检验的施行特征与观测次数	(168)
7-3-2 序贯似然比检验的极限有效性	(169)
* § 7-4 序贯检验对一般临近假设的极限有效性	(175)
§ 7-5 其他序贯检验	(177)
7-5-1 多元序贯检验	(177)
7-5-2 复合序贯检验	(179)
7-5-3 序贯 Bayes 检验	(183)
7-5-4 广义序贯似然比检验	(184)
§ 7-6 信号的序贯检测	(187)
7-6-1 确知脉冲串接收	(187)
7-6-2 随机相位弱脉冲串接收	(188)
7-6-3 单个相干信号的序贯检测	(191)
习 题	(191)

第八章 信号的参量估值	(193)
§ 8-1 从检测到估值	(193)
8-1-1 估值的数学模型	(193)
8-1-2 从检测到估值	(194)
§ 8-2 最小均方误差估计与估计量的不变性	(197)
8-2-1 最小均方误差估计	(197)
8-2-2 估计量的不变性	(198)
§ 8-3 有色高斯噪声中信号参量的最大后验概率估计	(201)
§ 8-4 最大似然估计	(205)
§ 8-5 估计均方误差的下界(非随机参量)——Cramer-Rao 不等式 1	(208)
8-5-1 单参量情况	(208)
8-5-2 单参量函数的情况	(213)
8-5-3 多参量情况	(214)
8-5-4 多参量函数的情况	(219)
§ 8-6 估计均方误差的下界(随机参量)——Cramer-Rao 不等式 2	(220)
8-6-1 单参量情况	(220)
8-6-2 多参量情况	(222)
§ 8-7 有色高斯噪声中信号参量的最大似然估计	(223)
§ 8-8 有色高斯噪声中带通信号参量的最大似然估计	(228)
§ 8-9 有色高斯噪声中多重带通信号参量的最大似然估计	(231)
§ 8-10 若干实际信号参量的最大似然估计	(233)
8-10-1 测不准原理	(233)
8-10-2 信号幅度的估计	(235)
8-10-3 信号到达时刻的估计	(236)
8-10-4 信号到达时刻与 Doppler 频移的联合估计	(237)
习 题	(239)
第九章 信号参量的最佳线性估计	(244)
§ 9-1 线性最小均方误差估计	(244)
§ 9-2 正交性原理	(246)
§ 9-3 递归线性均方估计	(250)
§ 9-4 最小二乘与加权最小二乘估计	(252)
9-4-1 最小二乘估计	(252)
9-4-2 加权最小二乘估计	(254)
* § 9-5 线性估计的应用(一)——自适应信道特性估计	(255)

* § 9-6 线性估计的应用(二)——自适应最小差错概率盲均衡	(258)
附录一 梯度算子 $\nabla_{\mathbf{x}}$ 与 $\nabla_{\mathbf{x}^*}$	(265)
习 题	(266)
第十章 具有未知参量信号的检测	(269)
§ 10-1 极大(广义)似然检测	(269)
§ 10-2 高斯噪声中信号的极大(广义)似然检测	(270)
10-2-1 未知幅度信号的检测	(270)
10-2-2 一般未知参量信号的检测	(271)
§ 10-3 白噪声中未知幅度、载波频率与相位信号的检测	(272)
§ 10-4 未知到达时刻信号的检测	(273)
§ 10-5 未知到达时刻与载波频率及相位信号的检测	(276)
习 题	(277)
第十一章 最小最大检测与 Robust 检测	(279)
§ 11-1 最小最大检测	(280)
§ 11-2 Robust 检测中的博弈问题	(288)
* § 11-3 平稳无记忆过程的 Robust 检测	(289)
* § 11-4 若干实际信号的 Robust 检测	(303)
* § 11-5 Robust 序贯检验	(309)
习 题	(311)
第十二章 非参量检测	(313)
§ 12-1 基本定义与性能测度	(314)
§ 12-2 符号检验	(315)
§ 12-3 秩检验	(319)
§ 12-4 t 检验	(325)
§ 12-5 若干其他非参量接收机	(327)
12-5-1 具有参考噪声输入的接收机	(327)
12-5-2 对称双输入接收机	(328)
12-5-3 自适应检测	(329)
习 题	(333)
第十三章 符号干扰信道中的信号检测	(336)
§ 13-1 符号干扰信道模型	(336)
13-1-1 符号干扰信道的树图表示	(338)

13-1-2	符号干扰信道的 Trellis 图与状态图表示	(338)
§ 13-2	最大似然序列检测——Viterbi 算法	(341)
*§ 13-3	最大似然序列检测接收机的差错概率性能	(344)
13-3-1	节点差错事件	(344)
13-3-2	节点与比特差错概率	(345)
13-3-3	一种比特差错概率上界	(348)
13-3-4	极高信噪比、无限长符号干扰信道的差错概率性能	(354)
§ 13-4	与无符号干扰传输的比较	(356)
* 附录一	序列检测永不判决概率为零的证明	(359)
* 附录二	某些简易信道的 $a(K, s)$	(360)
* 附录三	σ_i 的分布	(361)
	习 题	(362)
第十四章	随机信号的检测	(363)
§ 14-1	时变信道模型	(363)
*§ 14-2	齐次随机时变信道的潜在抗干扰性	(367)
14-2-1	限扩散信道、限频信号的潜在抗干扰性	(370)
14-2-2	最佳信号设计的物理可实现性	(373)
§ 14-3	齐次随机时变符号干扰信道中的信号检测	(376)
14-3-1	接收广义似然比	(376)
* 14-3-2	失配序列检测器的差错概率	(378)
*§ 14-4	无限长符号干扰信道的差错概率	(383)
§ 14-5	几点讨论	(385)
	习 题	(386)
	参考文献	(388)

注：有 * 号章节对本科生及初学者可视学生程度，不讲或仅介绍内容。

第一章 信号的矢量与复数表示

§ 1-1 确知信号集中信号的矢量表示

在检测与估计理论中,经常需要处理一个有 M 个确知信号^①的集合 $\{s_m(t)\}, m \in \{0, 1, \dots, M-1\}; t \in [0, T]$ 。若所有的信号 $s_m(t)$ 都是平方可积即能量有限的,则它们可以用 $N \leq M$ 个归一化正交函数的线性组合来描述,即

$$s_m(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_{mn} f_n(t) \quad m \in \{0, 1, \dots, M-1\}; t \in [0, T] \quad (1-1)$$

式中, $\{f_n(t)\}, n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ 是在 $[0, T]$ 上的归一化正交函数集,我们称之为基底或坐标函数,它们满足

$$\int_0^T f_n(t) f_l(t) dt = \delta_{nl} = \begin{cases} 1 & n = l \\ 0 & n \neq l \end{cases} \quad n, l \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (1-2)$$

$$s_{mn} = \int_0^T s_m(t) f_n(t) dt \quad (1-3)$$

我们称 s_{mn} 为 $s_m(t)$ 在坐标函数 $f_n(t)$ 上的投影或展开系数。

显然,如果这 M 个信号是线性独立时,即没有一个信号可以表示为其他信号的线性组合时 $N=M$,反之 $N < M$ 。若基函数集及其顺序已经选定,则 $s_m(t)$ 就可用其展开式(1-1)中的系数所唯一确定,即我们可以用矢量

$$\mathbf{S}_m \triangleq [s_{m0}, s_{m1}, \dots, s_{mN-1}]^T \quad m \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

来描述信号 $s_m(t)$, 此时信号 $s_m(t)$ 的能量为

$$\begin{aligned} E_m &= \int_0^T \left[\sum_{n=0}^{N-1} s_{mn} f_n(t) \right]^2 dt \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} s_{mn}^2 \\ &\triangleq \|\mathbf{S}_m\|^2 \end{aligned} \quad (1-4)$$

我们称 $\|\mathbf{S}_m\|$ 为矢量 \mathbf{S} 的模。

采用信号集的矢量表示后,我们就可以很形象的用 N 维空间中的矢量或点来描述信号集。例如 QPSK 信号的实函数形式为

$$s_m(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \left[2\pi f_0 t + \frac{(m+1)\pi}{4} \right]$$

$$t \in [0, T], m \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (1-5)$$

则我们就可以用二维空间中的四个点来描述它们,见图 1-1。

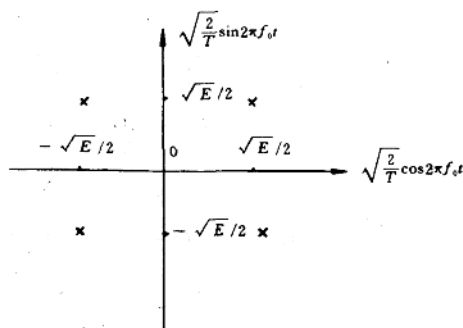


图 1-1 QPSK 信号

① 所谓确知信号,就是对观测者来说它的各个参数都是完全已知的。

信号集的矢量表示也往往给数学处理带来方便。例如在加性白高斯噪声(AWGN)^①信道中,见图 1-2,信道的输入为 $s_m(t)$, $m \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, 输出为

$$v(t) = s_m(t) + n(t) \quad m \in \{0, 1, \dots, M-1\}; t \in [0, T] \quad (1-6)$$

式中 $n(t)$ 是一个平稳高斯随机过程(噪声), 它的功率在一个远远宽于信号带宽的范围之内是均匀分配的, 因此我们可以把 $n(t)$ 看作是一个带宽为无限, 功率谱密度为常数的随机过程。通信、雷达及其他众多系统中常遇到的热噪声就属于这种类型, 其概率分布服从高斯(正态)分布, 均值为零, 协方差函数近似为

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= E\{n(t)n(t-\tau)\} \\ &= \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \end{aligned} \quad (1-7)$$

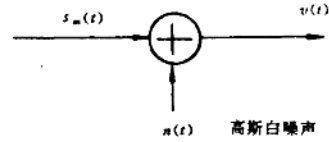


图 1-2 AWGN 信道

式中 $\delta(\cdot)$ 是冲激函数, N_0 是噪声的单边功率谱密度, 即单位带宽(1Hz)内的噪声功率为 N_0 瓦。

显然, 由于 $n(t)$ 的带宽为无限, $v(t)$ 的带宽也为无限, 用一个有限数量的基函数集 $\{f_n(t)\}$ 很难精确描述它。不过, 我们仍然可以先研究一下随机过程 $v(t)$ 在每个基函数上的映射, 即计算下述 N 个内积积分

$$v_n = \int_0^T v(t)f_n(t)dt \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-8)$$

同时定义

$$n_n \triangleq \int_0^T n(t)f_n(t)dt \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-9)$$

则有

$$v_n = s_{mn} + n_n \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-10)$$

现在让我们考虑随机过程

$$v_1(t) = v(t) - \sum_{n=0}^{N-1} v_n f_n(t) \quad (1-11)$$

若实际传输的信号是 $s_m(t)$, 则由式(1-1)与式(1-10), $v_1(t)$ 又可表示为

$$\begin{aligned} v_1(t) &= s_m(t) + n(t) - \sum_{n=0}^{N-1} (s_{mn} + n_n) f_n(t) \\ &= n(t) - \sum_{n=0}^{N-1} n_n f_n(t) \triangleq n_1(t) \end{aligned} \quad (1-12)$$

它仅决定于噪声过程。这样, 原始过程可表示为

$$v(t) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n f_n(t) + v_1(t) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n f_n(t) + n_1(t) \quad (1-13)$$

在检测与估计中我们就是根据 $v(t)$ 作出判决与估计的, 一般称 $v(t)$ 为观测值。假定现在仅取由式(1-8)所定义的 N 个映射 $\{v_n\}$ 作为观测值。由于 $v(t)$ 是高斯随机过程, $\{v_n\}$ 将是一些高斯随机变量, 其条件均值为

$$E\{v_n/S_m\} = s_{mn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-14)$$

① AWGN 是 Additive White Gaussian Noise 的缩写。

其方差为 $\frac{N_0}{2}$, 这是因为对所有 n 有

$$\begin{aligned} \text{Var}\{v_n/S_m\} &= E\{v_n - s_{mn}\}^2/S_m = E\{n_n^2\} \\ &= E\left\{\int_0^T \int_0^T n(t)n(s)f_n(t)f_n(s)dt ds\right\} \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \delta(t-s)f_n(t)f_n(s)dt ds \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T f_n^2(t)dt = \frac{N_0}{2} \end{aligned} \quad (1-15)$$

同理, 可以证明各观测值之间又相互独立^①, 这是因为当 $n \neq l$ 时

$$\begin{aligned} \text{cov}\{v_n, v_l/S_m\} &= E\{n_n, n_l\} \\ &= E\left\{\int_0^T \int_0^T n(t)n(s)f_n(t)f_l(s)dt ds\right\} \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T f_n(t)f_l(t)dt = 0 \end{aligned} \quad (1-16)$$

于是我们可以定义 N 维观测矢量为

$$\mathbf{v} = [v_0, v_1, \dots, v_{N-1}]^T$$

其各分量是相互独立的高斯随机变量, 其均值由式(1-14)给出, 方差为 $N_0/2$ 。这样一来, 在信号矢量是 \mathbf{S}_m 时, \mathbf{v} 的条件概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{v}/\mathbf{S}_m) &= \prod_{n=0}^{N-1} p(v_n/s_{mn}) \\ &= \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{1}{N_0}(v_n - s_{mn})^2} \\ &= (\pi N_0)^{-N/2} \exp - \frac{1}{N_0} \|\mathbf{v} - \mathbf{S}_m\|^2 \end{aligned} \quad (1-17)$$

由于 $v(t)$ 中还包含一项 $n_1(t)$, 它与信号无关, 只决定于噪声, 是一个零均值高斯随机过程。

由于

$$\begin{aligned} E\{n_1(t)v_l\} &= E\left\{[n(t) - \sum_{n=0}^{N-1} n_n f_n(t)][s_{ml} + n_l]\right\} \\ &= E\left\{\int_0^T n(t)n(s)f_l(s)ds\right\} - \sum_{n=0}^{N-1} E\{n_n n_l\} f_n(t) \\ &= \frac{N_0}{2} f_l(t) - \frac{N_0}{2} f_l(t) = 0 \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1-18)$$

所以 $n_1(t)$ 独立于所有观测值 $\{v_n\}$ 。若 $n_1(t)$ 可以用一矢量 \mathbf{n}_1 来表示, 其维数为 N' (由于是白噪声, N' 很可能为无穷大), 则一定存在下述关系。

$$p(\mathbf{v}, \mathbf{n}_1/\mathbf{S}_m) = p(\mathbf{v}/\mathbf{S}_m)p(\mathbf{n}_1) \quad (1-19)$$

由于检测与估计一般由条件概率决定(我们后面会证明)。而 $p(\mathbf{n}_1)$ 对各个条件概率的加权是相同的, 所以 \mathbf{n}_1 也就是 $n_1(t)$ 对检测与估值的结果不会有影响, 可以完全不考虑它。这样一来, 当噪声是白噪声时, 我们完全可以用一 N 维矢量 \mathbf{v} 来代表接收信号 $v(t)$, 即 \mathbf{v} 是 $v(t)$ 的充分

^① 对于高斯随机变量互协方差为零即相互独立。

统计量。当 $n(t)$ 不是白噪声时, 矢量表示就不是这样简单了, 我们将在以后予以说明。

§ 1-2 Gram-Schmidt 归一化正交程序与信号展开式

本节将介绍寻找上节中归一化正交基底函数 $\{f_n(t)\}$ 的一种方法。

定理 对一有限能量信号集 $\{s_m(t)\}$, $m \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, $t \in [0, T]$, 一定存在一归一化正交函数集 $\{f_n(t)\}$, $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $N \leq M$, 使得

$$s_m(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_{mn} f_n(t) \quad (2-1)$$

式中

$$s_{mn} = \int_0^T s_m(t) f_n(t) dt \quad (2-2)$$

$N=M$ 仅出现在集合 $\{s_m(t)\}$ 中各信号是线性独立时。

证明: 令 $E_0 = \int_0^T s_0^2(t) dt$, 我们定义第一个归一化基底函数为

$$f_0(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{E_0}} s_0(t) \quad (2-3)$$

则显然有

$$s_0(t) = \sqrt{E_0} f_0(t) = s_{00} f_0(t) \quad (2-4)$$

式中 $s_{00} = \sqrt{E_0}$, 而且 $f_0(t)$ 具有单位能量, 这点正是我们所要求的。在定义第二个基底函数之前, 让我们先定义 $s_1(t)$ 在 $f_0(t)$ 上的投影 s_{10} , 即

$$s_{10} = \int_0^T s_1(t) f_0(t) dt \quad (2-5)$$

现在定义

$$f_1(t) \triangleq \frac{s_1(t) - s_{10} f_0(t)}{s_{11}} \quad (2-6)$$

式中

$$s_{11} \triangleq \left[\int_0^T s_1^2(t) dt - s_{10}^2 \right]^{1/2} \\ = [E_1 - s_{10}^2]^{1/2} \quad (2-7)$$

从式(2-5)及(2-6)可以看出

$$\int_0^T f_0(t) f_1(t) dt = 0 \quad (2-8)$$

而且从式(2-6)及(2-7)可以看出 $f_1(t)$ 也具有单位能量, 这是因为

$$\int_0^T f_1^2(t) dt = \frac{E_1 - s_{10}^2}{s_{11}^2} = 1 \quad (2-9)$$

同样, 由式(2-6)有

$$s_1(t) = s_{10} f_0(t) + s_{11} f_1(t) \quad (2-10)$$

而且从式(2-8)与(2-9)可以看出

$$s_{11} = \int_0^T s_1(t) f_1(t) dt$$

采用归纳法, 假定对所有 $k < m$, 下式成立

$$s_k(t) = \sum_{n=0}^k s_{kn} f_n(t) \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (2-11)$$

式中 $s_{kn} = \int_0^T s_k(t) f_n(t) dt$ (2-12)

而且 $\{f_n(t), n=0, 1, \dots, k\}$ 相互正交且每一基底函数都有单位能量。于是我们定义

$$s_{mn} = \int_0^T s_m(t) f_n(t) dt \quad n = 1, 2, \dots, m-1 \quad (2-13)$$

及

$$f_m(t) = \frac{s_m(t) - \sum_{n=0}^{m-1} s_{mn} f_n(t)}{s_{mm}} \quad (2-14)$$

式中

$$s_{mm} = \left[E_m - \sum_{n=0}^{m-1} s_{mn}^2 \right]^{1/2} \quad (2-15)$$

则从式(2-13)与(2-14)可以看出

$$\int_0^T f_m(t) f_n(t) dt = 0 \quad \text{对所有 } n < m \quad (2-16)$$

而且从式(2-14)及(2-15)可以看出 $f_m(t)$ 具有单位能量。于是

$$s_m(t) = \sum_{n=0}^m s_{mn} f_n(t) \quad (2-17)$$

而且从式(2-16)可得

$$s_{mm} = \int_0^T s_m(t) f_m(t) dt \quad (2-18)$$

因此我们发现对于一个有 M 个有限能量信号集 $\{s_m(t)\}$, 表示式(2-1)总是成立的, 且 $N \leq M$ 。

但是, 如果该信号集中的某个子集中的信号间是线性相关时, 即存在一非零的实数集 a_0, a_1, \dots, a_j , 使得

$$a_0 s_{m_0}(t) + a_1 s_{m_1}(t) + \dots + a_j s_{m_j}(t) = 0$$

式中 $m_0 < m_1 < \dots < m_j$ 。

在这样一个子集中, 显然信号 $s_{m_j}(t)$ 可以表示为其他信号的线性组合, 当然也可以表示为由以前各信号所产生基函数的线性组合。因此对 $s_{m_j}(t)$ 来说, 就没有必要产生新的基函数 $f_{m_j}(t)$ 了。用这种方法可以去掉若干个基函数, 因此 $N < M$ 。

§ 1-3 信号的复表示

为了分析和处理问题方便, 我们不但需要在时间域而且需要在频率域去研究信号。一个信号 $s(t)$ 与其频谱 $S(f)$ 的关系如下:

$$S(f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \triangleq \mathcal{F}\{s(t)\} \quad (3-1)$$

$$s(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \triangleq \mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} \quad (3-2)$$

它们是一对傅氏变换的关系, 表示为

$$s(t) \longleftrightarrow S(f) \quad (3-3)$$

对于平方可积(即能量有限)型信号,即

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty \quad (3-4)$$

其傅氏变换一定存在,且满足下述关系

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (3-5)$$

关系式(3-5)我们一般称之为 Parseval 定理。

对于实信号 $s(t)$, 由于其复数共轭是其自身

$$s^*(t) = s(t)$$

这里 \cdot^* 表示 \cdot 的复数共轭, 一定有

$$S(-f) = S^*(f)$$

及

$$S(f) = S^*(-f)$$

即其频谱是复共轭对称的。所以我们只需知道其频谱中的正频率分量(反之亦真)就足够了。事实上

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft} df + \int_{-\infty}^0 S(f)e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_0^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft} df + \int_0^{\infty} [S(f)e^{j2\pi ft}]^* df \\ &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} 2S(f)U(f)e^{j2\pi ft} df \end{aligned} \quad (3-6)$$

式中 $\operatorname{Re} \cdot$ 表示 \cdot 的实部

$$U(f) \triangleq \begin{cases} 1 & f > 0 \\ \frac{1}{2} & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

是单位阶跃函数。

如果我们定义

$$\tilde{S}(f) = 2S(f)U(f) \quad (3-7)$$

及

$$\tilde{s}(t) \longleftrightarrow \tilde{S}(f) \quad (3-8)$$

则有

$$s(t) = \operatorname{Re} \tilde{s}(t) \quad (3-9)$$

我们称 $\tilde{s}(t)$ 为 $s(t)$ 的复信号, 它由去掉 $s(t)$ 的负频率分量且正频率分量加倍后形成。复信号 $\tilde{s}(t)$ 有时又称为 $s(t)$ 的解析^① 信号或预包络。

事实上一个实函数加上任意一个虚函数部分也可以构成一个复函数, 该复函数的实部也是原来的实函数。但我们决不这样作, 因为一来这样的复函数不是唯一的, 二来引入这样的复函数后运算反而复杂了。我们的目的是简化运算且复函数应该是唯一的。在我们的定义中一个函数的复数形式的傅氏变换应该没有负宗量分量。

我们称一个复信号的幅度是其对应实信号波形的包络, 虽然这是一个纯数学定义, 但对窄带信号而言它确有实在的物理意义。

同样, 我们称一个复信号的相位是其对应实信号波形的相位, 虽然这也是一个纯数学定

^① 在这里解析这个术语不一定意味着该函数是解析的, 仅意味着在复变函数理论中它满足某些特定的条件。这里我们仅强调该函数的傅氏变换的负宗量为零。

义,但对窄带信号而言它也有其实际的物理意义。

让我们考查一个实窄带信号,其一般形式为

$$s(t) = a(t)\cos(2\pi f_0 t + \xi(t)) \quad (3-10)$$

根据经验,我们可以很易写出其复指数形式为

$$\tilde{s}(t) = \tilde{a}(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad (3-11)$$

式中

$$\tilde{a}(t) = a(t)e^{j\xi(t)}$$

$$\tilde{a}(t) \leftrightarrow \tilde{A}(f)$$

且

$$|\tilde{A}(f)| = 0 \quad \text{当 } |f| > f_0 \text{ 时}$$

很易检验

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re } \tilde{s}(t) \\ &= \frac{1}{2}[\tilde{s}(t) + \tilde{s}^*(t)] \end{aligned}$$

成立。

由傅氏变换理论,可以求出 $\tilde{s}(t)$ 的频谱为

$$\begin{aligned} \tilde{S}(f) &= \tilde{A}(f) \otimes \delta(f - f_0) \\ &= \tilde{A}(f - f_0) \end{aligned} \quad (3-12)$$

式中 \otimes 表示卷积运算。

由于

$$\tilde{s}(t) \leftrightarrow \tilde{S}(f)$$

$$\tilde{s}^*(t) \leftrightarrow \tilde{S}^*(-f)$$

则实信号 $s(t)$ 的频谱可以表示为

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{1}{2}[\tilde{S}(f) + \tilde{S}^*(-f)] \\ &= \frac{1}{2}[\tilde{A}(f - f_0) + \tilde{A}^*(-f - f_0)] \end{aligned} \quad (3-13)$$

它们之间的关系可见图 1-3。

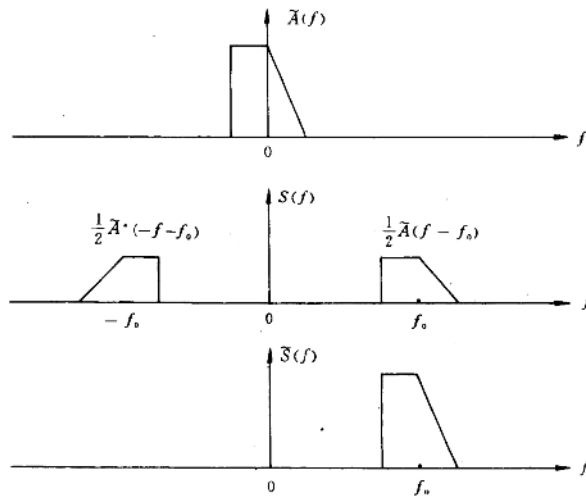


图 1-3 $\tilde{S}(f)$ 与 $S(f)$ 的关系

§ 1-4 Hilbert 变换及其性质

下面让我们进一步研究复信号实部与虚部之间的关系。由于

$$\begin{aligned} \bar{S}(f) &= 2S(f)U(f) \\ &= S(f)[1 + \operatorname{sgn}(f)] \end{aligned} \quad (4-1)$$

式中

$$\operatorname{sgn}(f) = \begin{cases} -1 & f < 0 \\ 0 & f = 0 \\ 1 & f > 0 \end{cases} \quad (4-2)$$

又因为

$$\mathcal{F}^{-1}[1 + \operatorname{sgn}(f)] = \delta(t) + j \frac{1}{\pi t} \quad (4-3)$$

所以有

$$\begin{aligned} \bar{s}(t) &= s(t) \otimes [\delta(t) + j \frac{1}{\pi t}] \\ &= s(t) + j\hat{s}(t) \end{aligned} \quad (4-4)$$

式中

$$\begin{aligned} \hat{s}(t) &= s(t) \otimes \frac{1}{\pi t} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t-\tau)}{\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t+\tau)}{-\tau} d\tau \end{aligned} \quad (4-5) \bullet$$

我们称 $\hat{s}(t)$ 为 $s(t)$ 的 Hilbert 变换, 表示为

$$\hat{s}(t) = \mathcal{H}\{s(t)\} \quad (4-6)$$

下面研究一下 $\hat{s}(t)$ 的频谱。由于

$$\hat{s}(t) = -j[\bar{s}(t) - s(t)] \quad (4-7)$$

则

$$\begin{aligned} \hat{S}(f) &= -j[2S(f)U(f) - S(f)] \\ &= S(f)\mathcal{H}(f) \end{aligned} \quad (4-8)$$

式中:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f) &= -j[2U(f) - 1] \\ &= \begin{cases} j & f < 0 \\ 0 & f = 0 \\ -j & f > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4-9)$$

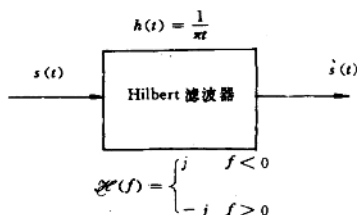


图 1-4 Hilbert 滤波器

我们称 $\mathcal{H}(f)$ 为 Hilbert 滤波器。它是一个全通型的 90° 相移网络, 其冲激响应为 $\frac{1}{\pi t}$, 是一个物理不可实现网络。如图 1-4 所示。

下面给出 Hilbert 变换的主要性质, 以便我们加深理解复信号的特点。

i) $s(t)$ 与 $\hat{s}(t)$ 具有同样的能量。

① 当 $\tau=t$ 时的发散性可由取积分的 Cauchy 主值去消除, 即对 $\epsilon > 0$

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau \triangleq \lim_{\epsilon > 0} \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{t-\epsilon} \frac{s(\tau)}{(t-\tau)} d\tau + \int_{t+\epsilon}^{\infty} \frac{s(\tau)}{(t-\tau)} d\tau \right]$$

这是由于 $|\mathcal{H}(f)|^2=1$, 而根据 Parseval 定理有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{S}(f)|^2 df$$

显然, 复信号的能量是其对应实信号的二倍。

$$\text{ii) } \hat{s}(t) = -s(t) \quad (4-10)$$

这是由于 $\mathcal{H}^2(f) = -1$ 的缘故。推而广之可得高阶 Hilbert 变换, 例如

$$\mathcal{H}^{(n)}\{s(t)\} = \begin{cases} s(t) & n = 0 \\ \hat{s}(t) & n = 1 \\ -s(t) & n = 2 \\ -\hat{s}(t) & n = 3 \end{cases} \quad (4-11)$$

iii) 如果 $y(t) = v(t) \otimes s(t)$ 则

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= \hat{v}(t) \otimes s(t) \\ &= v(t) \otimes \hat{s}(t) \end{aligned} \quad (4-12)$$

这是由于

$$\hat{Y}(f) = V(f)S(f)\mathcal{H}(f) \quad (4-13)$$

而 $\mathcal{H}(f)$ 可以任意与 $V(f)$ 或 $S(f)$ 结合而得其复数形式。

iv) 若 $s(t)$ 是一个广义平稳随机信号, 则其 Hilbert 变换 $\hat{s}(t)$ 与 $s(t)$ 有同样的自相关函数与功率谱。

$s(t)$ 的自相关函数定义为

$$\begin{aligned} \varphi_s(\tau) &\triangleq E\{s(t)s(t-\tau)\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t)s(t-T) dt \end{aligned} \quad (4-14)$$

其功率谱 $\Phi_s(f)$ 与 $\varphi_s(\tau)$ 是一对傅氏变换的关系

$$\Phi_s(f) \longleftrightarrow \varphi_s(\tau) \quad (4-15)$$

证明: 由图 1-4 可知, 若 $s(t)$ 的功率谱为 $\Phi_s(f)$, $\hat{s}(t)$ 的功率谱为 $\Phi_{\hat{s}}(f)$, 则

$$\Phi_{\hat{s}}(f) = |\mathcal{H}(f)|^2 \Phi_s(f) \quad (4-16)$$

但是 $|\mathcal{H}(f)|^2=1$, 所以上述结论成立。

我们知道随机信号的功率谱与其相位特性无关, 而 $s(t)$ 与 $\hat{s}(t)$ 仅在相位谱上有差别。当然它们的功率谱从而相关函数就没有区别了。

$$\text{v) } \varphi_{\hat{s}s}(\tau) = \hat{\varphi}_s(\tau) \quad (4-17)$$

$$\varphi_{s\hat{s}}(\tau) = -\hat{\varphi}_s(\tau) \quad (4-18)$$

这里 $\varphi_{\hat{s}s}(\tau)$ 表示 $\hat{S}(t)$ 与 $s(t)$ 间的互相关函数, 其定义为

$$\begin{aligned} \varphi_{\hat{s}s}(\tau) &\triangleq E\{\hat{s}(t)s(t-\tau)\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{s}(t)s(t-\tau) dt \end{aligned} \quad (4-19)$$

证明: 根据互相关函数的定义, 有

$$\begin{aligned} \varphi_{\hat{s}s}(\tau) &= E\{\hat{s}(t)s(t-\tau)\} \\ &= \frac{1}{\pi} E\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t-\xi) \cdot s(t-\tau)}{\xi} d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_s(\tau-\xi)}{\xi} d\xi = \hat{\varphi}_s(\tau) \end{aligned}$$