高 等 学 校 试 用 教 材

航海专业数学

（海船驾驶专业用）

张奕汀 冯孝礼 倪学义 李浑成 合编

人 民 交 通 出 版 社

高 等 学 校 试 用 教 材

航 海 专 业 数 学

（海船驾驶专业用）

张奕汀　冯孝礼　倪学义　李浑成合编

人 民 交 通 出 版 社

高等学校试用教材
航 海 专 业 数 学
（海船驾驶专业用）
张奕汀 冯孝礼 倪学义 李浑成合编
人民交通出版社出版
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
人民交通出版社印刷厂印
开本：787×1092$\frac{1}{16}$ 印张：8.75 字数：208 千
1982年6月 第1版
1982年6月 第1版 第1次印刷
印数：0001— 5,250册 定价：0.96元

内 容 提 要

本书共分球面三角、船位误差理论和航海数值计算三篇。第一篇主要介绍球面基本点线圆和球面三角形，分析航海中常用的球面三角基本公式及其运算方法；第二篇主要从概率的观点分析偶然误差的特性和观测处理方法，建立确定二条、三条船位线的最或是船位及其评定方法；第三篇主要讨论航海常用插值法，并介绍部分有关航海数值计算的一般问题和算图概念等参考内容。

本书是交通系统高等院校海船驾驶专业的教材，也可供有关从事海运生产、科研和教学的科技人员参考。

前　言

本书是交通系统高等院校海船驾驶专业的主要专业基础课之一——航海专业数学的统一教材。

本书共分球面三角、船位误差理论和航海数值计算三篇。在编写过程中，注意了培养学生分析问题和解决问题的能力，既保证必需的理论基础知识，又根据本专业需要确定了其深广度；同时考虑到海船驾驶专业参考书较少的具体情况，有选择地将部分内容，如球面曲线、航海数值计算和算图等一併编入，以利学生自学和参考。

本书主要由张奕汀、冯孝礼、倪学义和李浑成执笔，丁锡铨也参加了部分编写工作。经过集体审定、修改，最后由张奕汀、冯孝礼、倪学义统稿。

由于编者水平有限，时间仓促，必然存在一些缺点、错误，敬希读者批评指正。

目　　录

第一篇　球面三角

第二篇　船位误差理论

第三篇　航海数值计算

第一篇 球面三角

球面三角学是数学的一个分科，主要是研究球面上由三个大圆弧相交而构成的球面三角形的特性、关系式及其解法等问题。

球面三角学和其他学科一样，是人类在生产实践中，为了解决生产中的实际问题而发展起来的。根据历史考察，球面三角学要比平面三角学出现得较早一些。球面三角学的发展与天文学和航海学有着密切的关系。在我国古代，球面三角学就早已广泛地应用于天文学领域。十七世纪后半叶我国数学家梅文鼎对球面三角学就有了专门的著作。

球面三角学和平面三角学之间有着密切的关系。当球面三角形的三个边与其球半径相比相当小时，则在容许的误差范围内，可视作平面三角形来求解。在研究球面三角学时，除恒等式能应用外，其他平面三角学的边角公式，如正弦公式和余弦公式等不能随便应用。又当球的半径给定时，知道了球面三角形的三个角，就可求出该球面三角形的三个边，而平面三角形就没有这样的性质。

学习球面三角学除须具有一定的平面三角学知识外，还必须有一定的立体几何知识。

球面三角学是船舶驾驶专业两门主要专业课（航海学和航海天文学）的主要数学基础之一，因此学好它就显得十分重要了。

航海工作对计算的要求是既迅速而又准确，所以学习球面三角学时，就必须注意养成良好的习惯。计算时必须按航海值班作业所要求的计算顺序和数据排列格式；必须保持整洁；上下左右数字必须对齐；字体必须书写清楚等。

第一章 球面几何

在研究球面三角以前，首先必须熟悉球面几何的基本知识，而球面几何主要是研究分析球面上几何图形的性质的。

第一节 球面基本概念

一、球、球面

在空间与一定点等距离的点的轨迹称为**球面**。包围在球面中的实体称为**球**。换言之，球面可定义为半圆周围绕它的直径的旋转面。连接球心和球面上任意点的线段称为**球半径**(R)。而连接球面上两点，并且能通过球心的直线称为**球直径**。因此一个球的所有半径都相等。反之，半径相等的球称为**等球**。

航海学和航海天文学的核心问题是定位，即在地球上确定船舶的地理位置。而地球是一个近似于三轴椭球体的不规则几何体，在实用上可以用圆球体作为其第一近似体，并以之作为研究、分析和解算地面上的几何图形（如圆、椭圆、双曲线等）的基础。因此球与球面上

的基本点、线、圈以及球面三角形就是本篇的核心问题。

二、球面上的圆

定理一： 任一平面和球面相截的截痕是圆。

设：平面 π 与球面相割

求证：其截痕为圆

证：设 X 为平面 π 与球面所截截痕上的任一点（图1-1-1）。由球心 O 作 OO' 垂直于平面 π 并交于 O'，连 OX、$O'X$，则$\angle OO'X$ 为直角，$\triangle OO'X$ 为直角三角形。

因 OX（球半径）、OO'（垂线）都是定值，所以 $O'X=\sqrt{\overline{OX}^2-\overline{OO'}^2}$。而 X 为截痕上任一点，从而推广到截痕上任一点距 O' 点为定值。所以根据圆的几何定义可知截痕是一个圆，O'为其圆心，$O'X$ 为其半径。

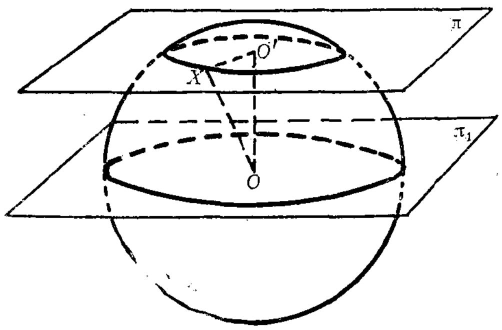

图 1-1-1

当平面 π_1 通过球心时，所截成的圆称为**大圆**，该圆的半径等于球半径，它的一段圆周叫**大圆弧**；截面不通过球心的圆称为**小圆**，它的一段圆周叫**小圆弧**。

推理： 在同球或等球中，与球心的距离相等的截面所截的圆也相等，与球心的距离不等的两个截面所截的圆不等，距球心较近的截面所截的圆较大，反之较小。

定理二： 过球面上不在同一直径两端上的两个点，能作且仅能作一个大圆，却能作无数个小圆；若在同一直径两端上的两个点，则能作无数个大圆而不能作小圆。

读者可应用简单的几何原理自行证明。

定理三： 两个大圆的平面的交线是它们的直径，并且两个大圆互相平分。

如图1-1-2，$ABEF$ 和 $CDEF$ 是任意两个大圆。因为大圆面都经过球心，所以其交线也必定通过球心，因此交线是该两大圆的公共直径。因圆的直径必平分该圆，所以，这两个大圆互相平分。

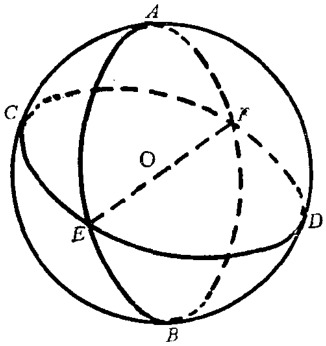

图 1-1-2

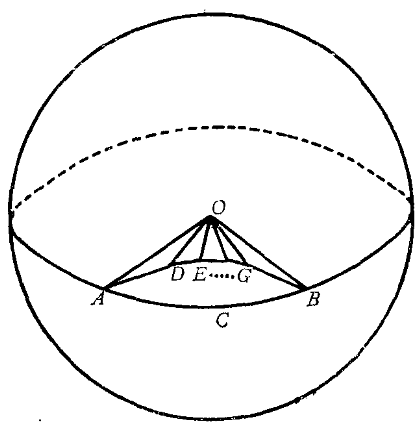

图 1-1-3

定理四： 过球面上两定点的小于180°的大圆弧（劣弧）是该两点间的**最短球面距离**。

设：如图1-1-3，A、B 为球面上任意两点，$\overset{\frown}{ACB}$为过 A、B 的大圆弧

求证：$\overset{\frown}{ACB}$ 是 A、B 两点间的最短球面距离

证：过 A、B 两点作任意曲线 $ADE\cdots\cdots GB$，并将该曲线划分为无穷小段的弧 $\overset{\frown}{AD}$、$\overset{\frown}{DE}$ $\cdots\cdots$ $\overset{\frown}{GB}$。因为这些弧是无穷小，所以可以认为 $\overset{\frown}{AD}$、$\overset{\frown}{DE}\cdots\cdots\overset{\frown}{GB}$ 都是大圆弧。连结 OA、OD、$OE\cdots\cdots OG$、OB，得一多面角 $O—ADE\cdots\cdots GB$。

由立体几何知，多面角中，任一面角小于其它面角的和，即

$$\angle AOB < \angle AOD + \angle DOE + \cdots\cdots + \angle GOB$$

由于圆的中心角与其所对的弧同度，则有

$$\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DE} + \cdots\cdots + \overset{\frown}{GB}$$

即

$$\overset{\frown}{AB} < \text{球面曲线 } ADE\cdots\cdots GB$$

上式说明了小于180°的大圆弧是球面上两点间的最短距离。

根据这个原理，船舶在海上从 A 地到 B 地的最短航线应是两地间小于 180° 的大圆弧，这就是我们常说的大圆航线。

三、轴、极、极距、极线

垂直于任一圆面（大圆或小圆）的球直径称为这个圆的**轴**。

轴与球面相交的两点称为**极**。故每一个圆均有两个极，而通过两个极可以有无数个大圆。

从大圆弧或小圆弧上的一点到极的大圆距离称为**极距**，又称该圆的**球面半径**。应注意，球面半径并非球的半径。

如图 1-1-4 所示，直线 PP' 是大圆 $A_1A_2A_3A_4$ 的轴，P、P' 点是其极，PA_1、$PA_2\cdots\cdots$ 是其极距。若小圆 $B_1B_2B_3B_4$ 平面平行于大圆 $A_1A_2A_3A_4$ 平面，同理，直线 PP' 亦是小圆 $B_1B_2B_3B_4$ 的轴，P、P' 是其极，PB_1、$PB_2\cdots\cdots$ 是其极距。

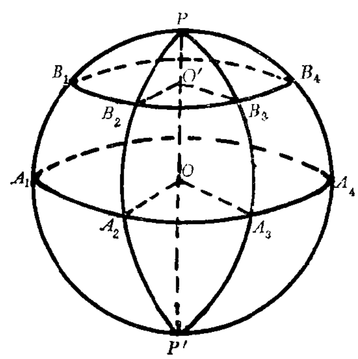

图 1-1-4

极距为 90° 的大圆弧又称为**极线**或称**赤道**。图 1-1-4 中的 $A_1A_2A_3A_4$ 是极 P 或 P' 的极线，因 $\overset{\frown}{PA_1} = \overset{\frown}{PA_2} = \cdots\cdots = 90°$。

大圆距它的极为90°，所以大圆弧是它的极的极线。反之，极线必定是大圆弧。

显然，如果球面上一点至其它两点（不是直径的两个端点）的球面距离都是 90°，则前一点必是通过后两点的大圆的极。

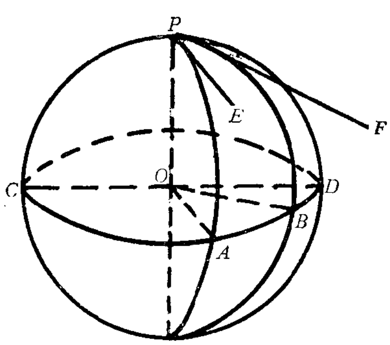

图 1-1-5

四、球面角及其度量

球面上两个大圆弧所构成的角称为**球面角**。其交点叫做球面角的**顶点**。每一个大圆弧称为球面角的**边**。如图 1-1-5，$\angle APB$ 是一个球面角，它可简写为 $\angle P$ 或 P。其中 P 为顶点，$\overset{\frown}{PA}$、$\overset{\frown}{PB}$ 为其两边。$CABD$ 是以球面角顶点 P 为极的极线。PE 和 PF 是过 P 点作 $\overset{\frown}{PA}$、$\overset{\frown}{PB}$ 的切线。

球面角的大小是以过其顶点的两个大圆弧平面所构成的两面角来确定。

由两面角决定球面角大小的规定，可得球面角的三种度量方法如下：

1. 切于顶点大圆弧的切线的夹角$\angle EPF$；

2. 顶点的极线被其两边大圆弧所截的弧长$\overset{\frown}{AB}$；

3. $\overset{\frown}{AB}$所对应的球心角$\angle AOB$。

因为两个大圆弧所构成的两面角可以为锐角、直角或钝角，所以球面角也可以为锐角、直角或钝角。当两个大圆弧重合时，球面角为0°。同一公共顶点的所有球面角的和等于360°。

五、两个大圆的极之间的大圆弧所对的球心角等于此两大圆平面的二面角

设：如图1-1-6，O为球心，两个大圆弧$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{CE}$相交于C。A为$\overset{\frown}{CD}$之极，B为$\overset{\frown}{CE}$之极。过A、B作大圆弧与$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{CE}$相交于F、G。

求证：$\angle AOB=\angle FOG=$大圆弧$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{CE}$两平面的二面角（球面角FCG）

证：连OA、OB、OC、OF、OG，则AO垂直于平面OCF，BO垂直于平面OCG，即$OA\perp OC$、$BO\perp OC$。

所以　OC垂直于AOB平面，

亦即　$OC\perp OF$、$OC\perp OG$，

所以　$\angle FOG$是平面FOC与平面GOC的二面角。

又因

$$\begin{aligned}\angle AOB&=\angle AOF-\angle BOF\\&=90^\circ-\angle BOF\\&=\angle BOG-\angle BOF\\&=\angle FOG\end{aligned}$$

所以　$\angle AOB=$大圆弧$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{CE}$两平面的二面角。

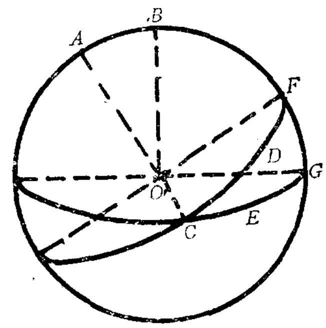

图 1-1-6

上式即两极之间所夹的大圆弧$\overset{\frown}{AB}$，其所对的球心角$\angle AOB$等于此两大圆平面的二面角$\angle FOG$。

该原理在航海天文学中多处用到。

六、圆心角相等的大圆弧与小圆弧之比

设：如图1-1-7，O为球心，$\overset{\frown}{ab}$是球面上的一段小圆弧，其圆心为o'，$\overset{\frown}{ab}$的圆心角为$\angle ao'b$，$\overset{\frown}{ab}$的极为P。

求证：大圆弧与小圆弧之比

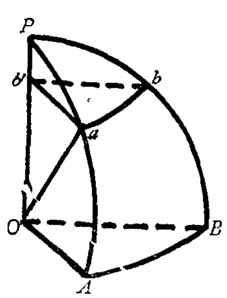

图 1-1-7

证：过球心O，引与小圆弧$\overset{\frown}{ab}$的平面$o'ab$平行的平面OAB，并作大圆弧$\overset{\frown}{PaA}$、$\overset{\frown}{PbB}$，得大圆弧$\overset{\frown}{AB}$，其圆心角为$\angle AOB$。

显然，圆心角$\angle ao'b=\angle AOB$

因为
$$\frac{\overset{\frown}{ab}(\text{长度})}{ao'}=\frac{\overset{\frown}{AB}(\text{长度})}{AO}=\text{圆心角(弧度)}$$

所以
$$\frac{\overset{\frown}{ab}(\text{长度})}{\overset{\frown}{AB}(\text{长度})}=\frac{ao'}{AO}=\frac{ao'}{aO}$$

又因　$ao'\perp Oo'$

所以

$$\frac{\widehat{ab}(\text{长度})}{\widehat{AB}(\text{长度})}=\frac{ao'}{aO}=\sin\angle aOo'=\sin\widehat{Pa}$$

即

$$\begin{aligned}\widehat{ab}(\text{长度})&=\widehat{AB}(\text{长度})\times\sin(\text{小圆极距})\\&=\widehat{AB}(\text{长度})\times\cos(90^\circ-\text{小圆极距})\end{aligned}$$

上面是小圆弧平面与大圆弧平面互相平行的情况。如果小圆弧与大圆弧不平行，因为同球圆心角相等的大圆弧长都相等，利用代换方法，此关系也同样成立。

该关系式在航海学和航海天文学中经常用到。在本节七将有例题说明。

七、地球上的基本点、线、圈

地球的第一近似体为**圆球体**，其半径约为6370公里。地球绕**地轴**（过球心的）旋转，该轴与地球表面交于两点，一为**北极**，一为**南极**。

地球南北极与某地所成之大圆称为该地的**子午圈**。位于地面上的各点都有本地子午圈，其中通过格林尼治天文台的子午圈称为**格林子午圈**。

南北极的极线称为**赤道**。

格林子午圈将地球分为东、西两半球。赤道将地球分为南、北半球。

在某地的子午圈上由赤道至该地的弧长称为该地之**纬度**，位于北半球者为**北纬**；反之，为**南纬**。南北纬皆由0°计算至90°。

在赤道上由格林午圈（过南北极和格林尼治所在的半圈）至某地午圈之弧长称为该地的**经度**。位于东半球者为**东经**，反之，为**西经**。东西经均由0°计算至180°。

我国首都北京某点的地理位置坐标为北纬39°54′23″、东经116°28′13″，常写为39°54′23″N、116°28′13″E。

在同一子午圈上，经度皆相同。

纬度相同的点的轨迹是平行于赤道的小圆，该小圆称为**等纬圈**。

等纬圈（小圆）的极即南极和北极。其极距（离近极的）值等于90°减纬度。

由上述（六）所说明的原理，可求得纬度60°且圆心角相等的等纬圈和赤道弧长之间的关系如下：

$$\begin{aligned}\frac{\text{等纬圈上的弧长(距离)}}{\text{赤道上的弧长(距离)}}&=\sin\text{极距}\\&=\sin(90^\circ-\text{纬度})\\&=\sin(90^\circ-60^\circ)\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

上式说明，纬度愈高，等纬圈的长度愈短。当纬度为60°时，等纬圈的长度仅为赤道长的一半。

第二节　球面三角形

一、球面三角形的定义

在球面上由三个大圆弧所围成的三角形称为**球面三角形**。

构成三角形的大圆弧称为球面三角形的**边**。由两个大圆弧相交而成的球面角称为球面三角形的**角**。如图1-1-8，由大圆弧$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$所围成的三角形便是一个球面三角形。通常用A、B、C表示球面三角形的三个角；用a、b、c表示球面三角形的三个边。这三个角A、B、C和这三个边a、b、c合称为**球面三角形六要素**。

本书所讨论的仅限于六个要素均大于0°而小于180°的**欧拉球面三角形**。

地球上的任意两点和地极所构成的球面三角形乃是航海上经常用到的。

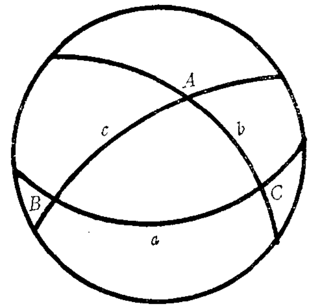

图 1-1-8

二、球面三角形的分类

1.球面等腰三角形和球面等边三角形

两边或两角相等的三角形称**球面等腰三角形**。三边或三角都相等的三角形称**球面等边三角形**。

2.球面直角三角形和球面直边三角形

至少有一个角为90°的三角形称为**球面直角三角形**。至少有一个边为90°的三角形称**球面直边三角形**。

3.球面初等三角形

三个边相对于其球半径来说非常小的三角形称为**小三角形**（三个角不会很小）；只有一个角及其对边均甚小的三角形称为**窄球面三角形**；而球面小三角形和窄三角形统称为**球面初等三角形**。

4.球面任意三角形

凡不具有特殊条件的球面三角形称**球面任意三角形**。

三、球面三角形的关系

1.全等球面三角形

在同球或等球上，边角对应相等，且排列顺序相同的三角形称为**全等球面三角形**。

全等的条件有下列四种情况：

(1)二边及其夹角对应相等；

(2)二角及其夹边对应相等；

(3)三边对应相等；

(4)三角对应相等。

前三种情况，可用重叠法证明，后一种情况可借助极线三角形（见后）原理来证明。

2.相似球面三角形

在半径不同的球面上，边角度数对应相等的三角形称为**相似球面三角形**。

3.对称球面三角形

设如图1-1-9，从球面三角形ABC的三顶点作直径与球面交于$A_0B_0C_0$，联A_0B_0、B_0C_0、C_0A_0，便得另一球面三角形，它和原三角形对应，这样的两个三角形称为**对称球面三角形**。该两三角形边、角都一一对应相等，但边、角排列次序不同，因此两者不能重叠，所

以该两三角形并非全等。

4. 极线球面三角形

球面三角形（$\triangle ABC$）的三个顶点的极线所构成的三角形称为球面三角形（ABC）的**极线三角形**。如图 1-1-10 极线三角形的顶点常以 A'、B'、C' 标注，并用以表示该顶点的角；a'、b'、c'则分别表示各该角所对的边。A'、B'、C' 与 A、B、C 必然都在它们对边的同一侧。

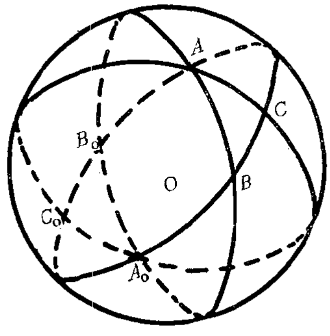

图 1-1-9

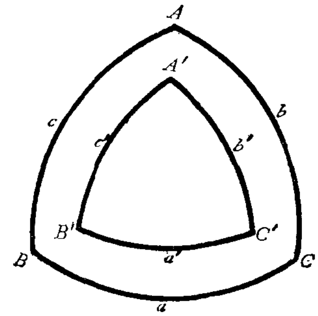

图 1-1-10

若球面三角形各边均大于90°，则极线三角形在原三角形之内（如图1-1-10）；若球面三角形各边均小于90°，则极线三角形在原三角形之外（如图1-1-11）；若球面三角形的一边或二边小于90°，其余的边大于90°，则极线三角形与原三角形相交（如图1-1-12）。

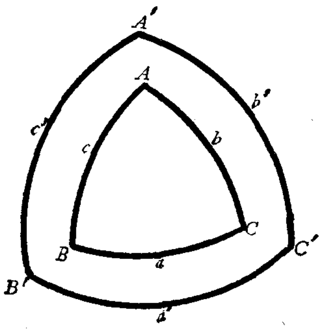

图 1-1-11

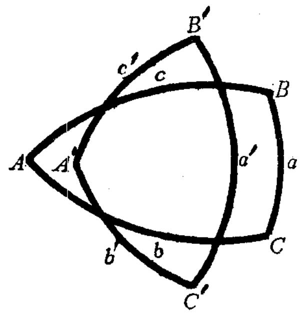

图 1-1-12

原三角形与其极线三角形有如下两种关系：

（1）原三角形与极线三角形的关系是相互的，即：

原三角形的顶点是极线三角形对应边的极，极线三角形的顶点是原三角形对应边的极。

设如图 1-1-13 $A'B'C'$ 为球面三角形 ABC 的极线三角形。根据极线三角形的定义，a'、b'、c'分别为 A、B、C 各顶点的极线，顶点 A、B、C 分别为 a'、b'、c'各边的极。则 $AB'=90°$，$CB'=90°$，所以 B' 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的极。

同理，可证 A' 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的极，C' 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的极。因此球面三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 互为原三角形和极线三角形。

（2）原三角形的边与其极线三角形对应的角互补。原三角形的角与其极线三角形的对应的边互补

证：设如图 1-1-14，$A'B'C'$ 为球面三角形 ABC 的极线三角形。延长 $\overset{\frown}{BC}$ 交 $\overset{\frown}{A'C'}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 于 D、E 两点，则有

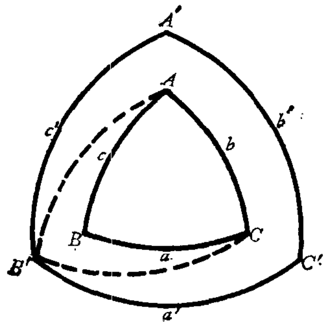

图 1-1-13

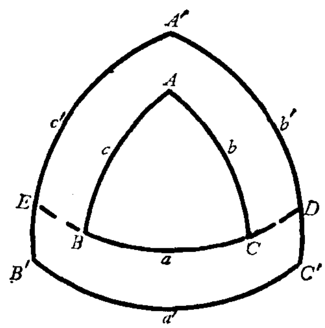

图 1-1-14

$$a+A'=a+DE(\because A'\text{与}\overset{\frown}{DE}\text{同度})$$
$$=a+EB+a+CD$$

因为　B 为 b' 之极，C 为 c' 之极

即　$EBC = a + EB = BCD = a + CD = 90°$

所以　$$a + A' = 180°$$

同理，$$b + B' = 180°，\ c + C' = 180°$$

$$a' + A = 180°，\ b' + B = 180°，\ c' + C = 180°$$

球面原三角形与其极线三角形的上述关系极为重要，在证明某些球面三角形公式和问题时，往往用到这一原理。

四、球面三角形的性质

1.球面三角形与三面角的关系

球面三角形和立体几何中的三面角有着密切的关系。如图 1-1-15，若将任意一个球面三角形 ABC 的顶点和球心 O 相连，则成一个**三面角**。反之，若将任意一个三面角，以三面角的顶点作球心，用同一半径所形成的球面图形，则是一个球面三角形。

显然，球心便是三面角的**顶点**；各球半径是三面角的**棱**；球面三角形的角是三面角的三个**二面角**；球面三角形的边与所对应的三面角的面角相等。因此球面三角形的边角关系也就是以球心 O 为顶点的三面角的三个面角与三个二面角的关系。这是球面三角形的最基本特性。

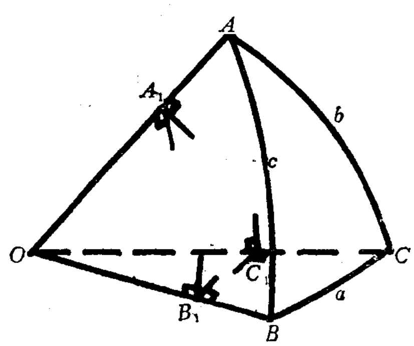

图　1-1-15

2.球面三角形的每一边必大于0°而小于180°，三边之和大于0°而小于360°。

由欧拉球面三角形定义知每边必大于 0° 而小于 180°。

因为球面三角形的边是以它们所对的球心角度量，对球面三角形的三边的球心角则构成以球心为顶点的三面角；由立体几何知三面角的各面角的和大于0°而小于360°，故球面三角形三个边的和必大0°而小于360°。

3.球面三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边

在图 1-1-15 中，三面角中的任一面角必小于另两面角之和，可得

$$\angle AOB + \angle BOC > \angle AOC$$

所以　$$c + a > b$$

同理　$$a + b > c；\ b + c > a$$

由此推论，球面三角形两边之差小于第三边。

4.球面三角形的每一角必大于0°而小于180°，三个角的和必大于180°而小于540°

由欧拉球面三角形定义知每角必大于0°而小于180°。

设 $A'B'C'$ 为球面三角形 ABC 的极线三角形。由极线三角形的原理，知

$$a' + A = 180°，\ b' + B = 180°，\ c' + C = 180°$$

因为　$$0° < a' + b' + c' < 360°$$

将　$a' = 180° - A，\ b' = 180° - B，\ c' = 180° - C$ 代入上式，

则得 $$0^\circ < 180^\circ - A + 180^\circ - B + 180^\circ - C < 360^\circ$$
$$-540^\circ < -(A+B+C) < -180^\circ$$
即 $$180^\circ < A+B+C < 540^\circ$$

5.球面三角形三角之和超出180°的部分称为**球面角盈**（或球面剩余）。以 E 表示之，即

$$E = A+B+C-180^\circ$$

关于求球面角盈 E 的公式，将在第二章说明。

6.**球面三角形两角之和减去第三角小于180°**

因球面三角形两边之和大于第三边，即

$$a' + b' > c'$$

所以 $$180^\circ - A + 180^\circ - B > 180^\circ - C$$
即 $$A + B - C < 180^\circ$$
同理 $$A + C - B < 180^\circ$$
$$B + C - A < 180^\circ$$

7.**球面三角形的外角小于不相邻的两内角的和而大于它们之差**

在图1-1-16中，D 为球面三角形 ABC 的一个外角，它是角 C 的邻角。

因为 $$D + C = 180^\circ$$
又因 $$A + B + C > 180^\circ$$
所以 $$A + B + C > D + C$$
即 $$A + B > D$$
又因 $$A + C - B < 180^\circ$$
所以 $$A - B < 180^\circ - C$$
即 $$A - B < D$$

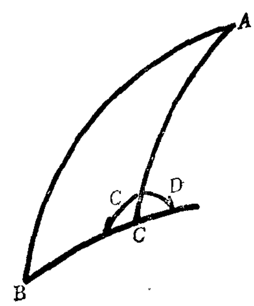

图 1-1-16

8.**同一球面三角形中对等边的角相等，反之，对等角的边也相等**

（1）设：如图1-1-17，$AB = BC$

求证：$A = C$

证：平分 AC 边并用大圆弧将分点 D 和三角形的顶点 B 连接起来。因为两个三角形（ABD 和 BCD）的边都互相分别对应相等，所以球面三角形 ABD 和 BDC 对称，因而 $A = C$。

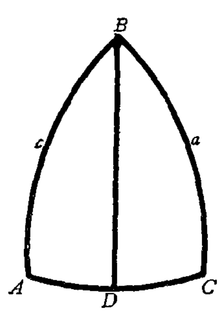

图 1-1-17

（2）设：图1-1-17中，$A = C$

求证：$a = c$

证：作已知三角形 ABC 的极线三角形 $A'B'C'$，

则有 $$A + a' = 180^\circ$$
$$C + c' = 180^\circ$$
因为 $$A = C$$
所以 $$a' = c'$$
从此得 $$A' = C'$$

因为根据极线三角形与原三角形的关系有等式

$$A' + a = C' + c$$

由上证明　　　　　　　　$A'=C'$

所以　　　　　　　　$a=c$

9.在任意球面三角形中对大角的边较大，反之，对大边的角也较大

（1）设：如图1-1-18，$\angle ACB>\angle ABC$，即 $C>B$

求证：$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{AC}$

证：在 C 角中作大圆弧 CD，使$\angle DCB=\angle DBC$，于是$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$。从三角形 ACD来看，有

$$\overset{\frown}{AC}<\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}\text{（两边之和大于第三边）}$$

因为　　　　　　　　$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$

所以　　　　　　　　$\overset{\frown}{AC}<\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BD}$

或　　　　　　　　$\overset{\frown}{AC}<\overset{\frown}{AB}$

（2）设：$c>b$

求证：$C>B$

证：作已知三角形 ABC 的极线三角形 $A'B'C'$。

因为　　　　　　　　$c>b$

所以　　　　　　　　$180°-C'>180°-B'$

或　　　　　　　　$C'<B'$

根据大角对大边定理可得

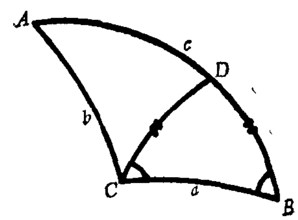

图　1-1-18

$$c'<b'$$

因为　　　　　　　　$c'=180°-C$，$b'=180°-B$

所以　　　　　　　　$180°-C<180°-B$

或　　　　　　　　$B<C$

总结上述性质，可得一个球面三角形的成立条件为：

1.当给定了球面三角形的三个边时：

（1）任一边应大于0°，小于180°；

（2）三边之和大于0°，小于360°；

（3）二边之和大于第三边或二边之差小于第三边。

2.当给定了球面三角形的三个角时：

（1）任一角应大于0°，小于180°；

（2）三角之和大于180°，小于540°；

（3）二角之和减去第三角小于180°。

3.若给定球面三角形的两个角及其夹边或两个边及其夹角，则仅需满足每一个角和每一个边大于0°，小于180°的条件，球面三角形都成立。

4.若给定球面三角形的两个角及其一个角的对边，或两个边及其一边的对角，则该三角形是否成立，情况比较复杂。这种情况将在第二章第六节中说明。

习　题　一

1.如果一球面角的两边均等于90°，那么该球面角用什么来度量最合适？为什么？

2.已知一球面三角形的三个角分别为90°、90°、30°，试求该球面三角形的三 边各 为何