约束哈密顿系统

及其对称性质

李子平 著

北京工业大学出版社

北京市自然科学基金资助

约束哈密顿系统及其对称性质

李子平　著

北京工业大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

约束哈密顿系统及其对称性质/李子平著．-北京：北京工业大学出版社，1999.12
ISBN 7-5639-0812-9

Ⅰ．约…　Ⅱ．李…　Ⅲ．①约束-哈密顿方程②约束-对称-力学性质　Ⅳ．O232

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 51347 号

约束哈密顿系统及其对称性质

李子平　著

*

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

徐水宏远印刷厂印刷

*

1999 年 11 月第 1 版　1999 年 11 月第 1 次印刷

850 mm×1 168 mm　32 开本　13 印张　326 千字

印数：1～2 000 册

ISBN 7-5639-0812-9/O・33

定价：32.00 元

内 容 提 要

众多的物理系统在相空间描述时，正则变量间存在约束，例如用奇异Lagrange 量(包括所有规范理论)描述的系统就属于这种情形.该系统为约束 Hamilton(哈密顿)系统.它的基本理论在现代量子场论中占重要地位.

本书主要介绍约束 Hamilton 系统的经典理论和量子理论，侧重于阐述其对称性.其中包括约束系统的 Dirac 理论、Dirac 括号量子化、Faddeev-Senjanovic路径(泛函)积分量子化，以及基于 BRST 对称的 BFV 量子化、约束 Hamilton 系统的经典和量子正则对称性质、量子守恒律理论等，并以杨-Mills 理论和 Chern-Simons 理论为例作了较深入的分析.

本书不仅适合大学物理系高年级学生和研究生使用，还适合从事理论物理、数学物理、粒子物理理论、凝聚态理论以及数学、力学等相关专业的科技工作者阅读.

前　言

对动力学系统的描述有位形空间中的 Lagrange 体制和相空间中的 Hamilton 体制两种形式，后者在量子理论中有更重要的作用．物理系统的运动往往受到某些约束条件的限制．其约束分为两类：一类是位形空间中存在的附加条件（如力学中的完整约束和非完整约束）；另一类是相空间中描述时，正则变量间存在的关系（如相对论性运动粒子满足的质壳条件）．众多的物理系统虽然在位形空间中不存在附加约束，但过渡到相空间描述时，正则变量间却存在约束关系，例如，旋量场 Lagrange 量描述的系统就是这种情况．一般来说，用所谓奇异 Lagrange 量描述的系统（包括所有定域规范不变理论），过渡到相空间描述时，其正则变量间存在固有约束，即为约束 Hamilton（哈密顿）系统．描述自然界 4 种基本相互作用的量子电动力学（QED）、量子味动力学（QFD）、量子色动力学（QCD）和引力理论（广义相对论，GR）中的 Lagrange 量均是奇异的，超对称、超引力和超弦等理论中的场都是用奇异Lagrange 量描述的系统．由于奇异 Lagrange 系统在相空间中存在固有约束，而系统的量子化通常是由相空间的正则变量来实现的，此时初等量子力学中的量子化方法已不适用．当正则变量间存在约束时，量子化理论中出现的新问题的研究，一直受到人们广泛的关注，特别是非 Abel 规范理论（杨-Mills 理论）的发展，仔细分析系统的约束，并在量子化过程中恰当地处理这些约束，已成为理论的中心问题之一．因此，约束 Hamilton 系统的基本理论在现代物理学中，特

别是在量子场论中占有十分重要的地位.

奇异 Lagrange 量系统的正则形式的研究始于 Dirac，Bergmann 等人奠定了该系统的动力学和量子化的基础. 通过所谓 Dirac 括号和量子括号的对应来实现算符形式的正则量子化. 人们发现，用 Dirac 括号对杨-Mills 场进行正则量子化，处理上遇到较大困难. 对非 Abel 规范场，用路径积分量子化则是一种有效方案. Faddeev 利用 Feynman 路径积分首先实现了仅含第一类约束的系统的量子化. Senjanovic 给出了同时含第一类约束和第二类约束的系统的路径积分量子化. Faddeev-Senjanovic 量子化方案为 Faddeev-Popov 直观的路径积分量子化方法在电磁场、杨-Mills场等诸方面的应用提供了理论基础. 含 Grassmann 数系统的路径积分量子化也已给出. 相对论性协变的量子化理论是 Batalin-Fradkin-Vilkovisky (BFV) 等人基于 BRST (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin) 对称而建立的. 其他的量子化方案，例如 Faddeev-Jackiw 方案和 Batalin-Vilkovisky 的 Lagrange 量子化方案等，也受到人们的广泛关注. 约束 Hamilton 系统的基本理论的研究已经取得了相当的进展，规范理论和引力理论量子化中的主要问题已得到解决. 然而，有关约束 Hamilton 系统理论中若干基本问题的研究在文献中仍不断有新的讨论.

对称性理论在物理学中占重要地位. 经典物理到量子理论的发展，将连续对称的研究扩充到了分立对称的研究；微观领域规律的深入探索，将整体对称的分析扩充到了定域对称的研究. 系统的整体对称性与系统存在的守恒律有密切联系；规范对称(定域不变性)制约了基本粒子的几种基本相互作用形式，并且是量子场可重整化的基础. 关于系统对称性的分析，传统的研究通常是在位形空间中讨论的(系统不含附加约束). 约束系统对称性的研究具有全新的、重要的意义. 我们曾完成了一项国家自然科学基金和两项北京市自然科学基金项目，开展了对约束 Hamilton 系统基本理论的

研究，并开创了对该系统的经典和量子正则对称性及应用的研究，在国内外先后发表了80余篇学术论文，本书就是在总结这些科研成果的基础上撰写而成的. 目前国外虽有极少数几部介绍约束Hamilton系统动力学的专著，但其中均未涉及约束Hamilton系统的正则对称性质. 本书在简明地叙述约束Hamilton系统基本理论的基础上，着重论述了该系统在相空间中的经典和量子正则对称性质，并且较系统地阐述了高阶微商奇异Lagrange量系统的正则形式的基本理论.

第一章说明了初级约束、次级约束和计算约束的Dirac-Bergmann算法以及第一类约束、第二类约束和Dirac括号的意义，讨论了有限自由度奇异Lagrange量系统的正则形式表述和约束Hamilton系统的正则方程的几种表述形式，研究了第一类约束和规范变换生成元之间的关系，给出了规范生成元的构成，说明了规范生成元中与第一类初级约束和第一类次级约束相联系的系数之间的关系，以及固定规范的问题.

第二章研究了约束Hamilton系统的经典正则对称性质，建立了相空间中整体对称下的正则形式的Noether(Nöther)第一定理，给出了相空间中对称性和守恒量的联系，建立了相空间中定域变换下的正则形式的Noether第二定理(Noether恒等式)，阐明了定域变换下不变的系统必含Dirac约束. 对于显含时间的奇异Lagrange系统，从正则形式出发建立了该系统的Poincaré-Cartan积分不变量，研究了该不变量和约束Hamilton系统的正则方程之间的关系，并特别说明了为保证约束Hamilton系统Poincaré-Cartan积分不变量存在，约束加在正则变量的变分上应满足的条件，并以正则Noether定理和Poincaré-Cartan积分不变量为工具，举例说明了Dirac猜想失效. 在这个反例中，不存在将约束作线性化处理的问题.

第三章论述了场论中奇异Lagrange量系统的经典动力学. 本

章给出了该系统在相空间描述的正则形式，将有限自由度情形的Dirac表述推广到场论中来，并以电磁场、杨-Mills场、复标量场与Chern-Simons项耦合为例，详细地分析了它们的正则形式和约束结构，给出了场论中奇异Lagrange量系统规范生成元的构造，并以有质量规范场、电磁场与旋量场耦合以及以杨-Mills场为例作了具体阐述，建立了相空间中整体对称性的正则Noether定理，导出了声子场、电子场和电磁场相互作用中的一些守恒量. 本章还建立了相空间中定域变换的正则Noether恒等式，给出了在Abel规范场与荷电Bose场耦合以及非Abel规范场与物质场耦合中的应用，在某些情形下，沿着系统运动轨线，正则Noether恒等式也可导致系统的守恒量(或给出与第一类约束相联系的约束乘子的限制条件)，同时建立了场论中非定域变换的正则Noether恒等式；最后，导出了场论中奇异Lagrange量系统的Poincaré-Cartan积分不变量，讨论了该不变量与正则方程、正则变换的关系.

第四章说明了约束Hamilton系统的算符形式正则量子化，并分别对Bose变量系统和Fermi变量系统阐明了Dirac括号量子化方法，对仅含第二类约束的系统，通过Dirac括号与量子括号对应来实现系统的量子化，对同时含第一类约束和第二类约束的系统，对每一个第一类约束需选一规范条件，使系统所有约束和规范条件一起转变为第二类约束；然后，再按第二类约束系统进行量子化. 本章还说明了规范条件原则上至少应满足的一些要求. 书中分别以电磁场、旋量场、QED、Chern-Simons理论、自对偶场和杨-Mills场为例，详细地论述了它们的算符形式正则量子化，并指出了当场的正则变量的Dirac括号后仍含场量时(如杨-Mills场)，其量子化条件是不便于使用的，这表明Dirac括号量子化不是约束Hamilton系统量子化的最佳方案.

第五章阐述了路径积分量子化，指出了量子力学中正则算符形式量子化与路径积分量子化的等价性，相空间路径积分比位形

空间路径积分更一般，介绍了 Bose 系统的全纯表示和 Fermi 系统的 Grassmann 表示，说明了场论中的路径积分形式、Green 函数的生成泛函和正规顶角的生成泛函. 在约束 Hamilton 系统的路径积分量子化中，分别讨论了仅含第一类约束系统的路径积分量子化(Faddeev 方案)以及同时含第一类约束和第二类约束系统的路径积分量子化(Senjanovic 方案)，并且分别以 QED、杨-Mills 场和非 Abel Chern-Simons 理论为例，作了详细的分析；最后，说明了基于 BRST 对称的 BFV 路径积分量子化方法，并以杨-Mills 场为例作了讨论.

第六章论述了路径积分形式中的对称性，阐明了系统在整体、定域和非定域变换下，系统的量子对称性质，并分别对有限自由度系统和场论中的正规 Lagrange 量和奇异 Lagrange 量系统作了讨论. 首先，从 Green 函数的相空间的生成泛函出发，建立了定域(正则变量)变换下的正则 Ward 恒等式，给出了在规范不变有质量矢量场和 QCD 中的应用，导出了 Green 函数间满足的一些关系式；然后，建立了非定域变换的正则 Ward 恒等式，讨论了在非 Abel Chern-Simons 理论中的应用，导出了正则变量整体变换下的正则 Ward 恒等式并给出了应用；最后，建立了整体正则对称性和量子守恒律相联系的理论，给出了在 π 介子与核子的赝标耦合系统、声子-电子-光子系统、杨-Mills 场论和 Chern-Simons 理论中的应用，讨论了在量子水平下的分数自旋问题，论述了位形空间中路径积分中的对称性.

第七章论述了高阶微商奇异 Lagrange 量系统的正则形式、路径积分量子化以及经典和量子正则对称性质，分别对有限自由度系统(广义力学)和场论系统予以阐明. 首先，从有限自由度高阶微商系统开始，介绍了从 Lagrange 体制过渡到 Hamilton 体制的 Ostrogradsky 变换；借助于约束系统的 Dirac 理论，阐述了高阶微商奇异 Lagrange 量系统广义正则方程的 3 种形式，说明了第一类

约束和规范变换生成元的关系以及规范生成元的构成，论述了该系统的经典正则对称性，建立了正则形式的 Noether 理论并给出了应用. 然后，又建立了高阶微商显含时间的奇异 Lagrange 量系统的广义 Poincaré-Cartan 积分不变量，讨论了该不变量与广义正则方程、正则变换的关系；借助于正则形式 Noether 定理和广义 Poincaré- Cartan 积分不变量，给出了高阶微商奇异 Lagrange 量系统 Dirac 猜想的反例，论述了高阶微商场论中的奇异 Lagrange 量系统的正则对称性、规范生成元和广义 Poincaré-Cartan 积分不变量. 最后，论述了高阶微商奇异 Lagrange 量系统的路径积分量子化，建立了该系统定域变换下的广义正则 Ward 恒等式，给出了在高阶微商有质量规范场和广义 QCD 中的应用，同时建立了该系统在整体正则对称性下的量子守恒理论，并给出了在高阶微商杨-Mills 场论和非 Abel Chern-Simons 理论中的应用.

本书在阐述约束 Hamilton 系统动力学的基本理论时，侧重于论述约束 Hamilton 系统在相空间中的经典和量子正则对称性质，并将散见在杂志文献中的资料作了较系统的归纳和整理. 由于篇幅和时间的关系，约束 Hamilton 系统理论的某些方面本书未能包括或未能充分展开表述，其中主要有约束 Hamilton 系统的现代微分几何描述、Lagrange 形式量子化以及 BRST 量子化的应用讨论不够充分等. 本书内容在研究生教学中曾多次讲授. 研究生江金环、刘赟、隆正文、李瑞洁等帮助整理和抄写了书稿，责任编辑刘津瑜女士细致校对书稿，作者对他们表示衷心地感谢. 同时，作者也深深感谢北京市自然科学基金委员会的资助和北京工业大学出版社的大力支持.

作　者

目　录

第一章

约束 Hamilton 系统

用奇异 Lagrange 量描述的系统(包括所有规范不变系统),在相空间中描述时必存在的固有约束,为约束 Hamilton(哈密顿)系统.这里扼要阐述了约束 Hamilton 系统的 Dirac 理论,阐明了初级约束、次级约束、第一类约束、第二类约束以及 Dirac 括号的意义,并在此基础上,讨论第一类约束与规范变换生成元的关系,说明固定规范问题.

§ 1-1 奇异 Lagrange 量系统

奇异 Lagrange 量系统正则形式的研究始于 Dirac[1,2],这起源于他对动力学齐次变量的早期分析.用奇异 Lagrange 量描述的系统,过渡到相空间用正则变量描述时,其正则变量间存在固有约束,即为约束 Hamilton 系统.关于这方面早期的工作还有 Bergmann 等人的研究,他们阐明了约束和不变性的关系[3,4]. Dirac 和 Bergmann 等人的工作奠定了约束系统的动力学及其量子化的基础. Shanmugadhasan 分析了奇异性对 Lagrange 方程的影响,并给出了相应的 Hamilton 形式[5,6]. Kamimura 建立了 Lagrange 约束与 Hamilton 约束间的关系[7]. Sudarshan 和 Mukunda 从现代数学观点,详细讨论了 Dirac 括号的结构[8,9].至今已有少量著作较完整地阐述了约束系统及其量子化的基本理论[10~13].在这些著作中未涉及到的,乃是本书将侧重阐明的约束 Hamilton 系统的经典和量子正则对称性质.

约束 Hamilton 系统的基本理论,在理论物理中,特别是现代

量子场论(如规范场论)中占有十分重要的地位.众多的物理系统在相空间中描述其正则变量间存在约束,例如,相对论粒子满足的“质壳”条件,电磁学和杨-Mills场论中的Gauss约束,广义相对论中的超Hamilton量和超动量约束,弦理论中的Virasor条件等.规范场理论(具有定域不变性)在描写自然界基本相互作用中占重要地位.一切定域不变系统的Lagrange量均是奇异的(包括描述自然界4种基本相互作用的量子电动力学(QED)、量子味动力学(QFD)、量子色动力学(QCD)、引力理论(GR)等),该系统均属约束Hamilton系统.约束Hamilton系统在相空间存在固有约束,传统的无约束情况的量子化方法不能直接用于该系统.虽然该系统量子化中的主要问题已解决,但是有关约束Hamilton系统理论若干基本问题仍在文献中经常有所讨论[14].这里先简略介绍约束Hamilton系统的经典理论.

设有限自由度系统的动力学由Lagrange函数(或Lagrange量)$L=L(q^i,\dot{q}^i)$来描述,其中$q^i(i=1,2,\cdots,n)$为广义坐标,$\dot{q}^i=Dq^i=\frac{d}{dt}q^i$为广义速度.这里假设Lagrange函数不显含时间.通常系统的量子化是通过相空间中的正则变量(q^i,p_i)来实现的.利用Legendre变换,可将Lagrange描述过渡到Hamilton描述.这里定义广义坐标q^i的正则共轭动量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{1-1-1}$$

正则Hamilton量

$$H_c=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}^i-L(q,\dot{q})=p_i\dot{q}^i-L \tag{1-1-2}$$

式中$\dot{q}^i$由(1-1-1)式中解出作为q^i和p_i的函数.重复指示代表求和.定义Hess矩阵的矩阵元

$$H_{ij}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial \dot{q}^j} \tag{1-1-3}$$

当 $\det|H_{ij}|\neq 0$ 时，根据隐函数存在定理，由(1-1-1)式可将解出所有的$\dot{q}^i$ 作为 q^i 和 p_i 的函数. Hess 矩阵非退化的($\det|H_{ij}|\neq 0$) Lagrange量称为正规 Lagrange 量.

系统的 Euler-Layranye 方程为

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)=0 \tag{1-1-4}$$

(1-1-4)式又可写为

$$H_{ij}(q,\dot{q})\ \ddot{q}_j=\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\,\partial q^j}\dot{q}^j \tag{1-1-5}$$

当 $\det|H_{ij}|=0$ 时，Hess 矩阵$[H_{ij}]$是退化的. 设$[H_{ij}]$的秩为常数 $R(R<n)$，由(1-1-5)式可解出 R 个 $\ddot{q}^j$，

$$\ddot{q}^j=F^j(q^1,\cdots,q^n;\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^n;\ddot{q}^{R+1},\cdots,\ddot{q}^n)$$
$$(j=1,2,\cdots,R) \tag{1-1-6}$$

这 R 个二阶微分方程组中，含 $n-R$ 个任意独立的函数 $q^{R+1},\cdots,q^n$. 当给定了 $q^1(t),\cdots,q^R(t)$和$\dot{q}^1(t),\cdots,\dot{q}^R(t)$的初值后，系统动力学的解不能完全确定下来. 任意函数的不同选取，给出不同的解. 这与正规 Lagrange 量描述的系统是完全不同的. Hess 矩阵退化的 Lagrange 量称为奇异 Lagrange 量. 对于奇异 Lagrange 量系统，由 Euler-Lagrange 方程不能解出所有的 $\ddot{q}^j$，同时过渡到 Hamilton 描述时，不能由(1-1-1)式解出所有的$\dot{q}^i$.

下面讨论奇异 Lagrange 量系统的正则表述形式. 设 Hess 矩阵的秩为 R，那么，从(1-1-1)式可解出 R 个$\dot{q}^\sigma$ 作为q^i、p_α 和剩下的 $\dot{q}^\rho$ 的函数

$$\dot{q}^\sigma=f^\sigma(q,p_\alpha,\dot{q}^\rho)$$
$$(\sigma,\alpha=1,2,\cdots,R;\rho=R+1,\cdots,n) \tag{1-1-7}$$

将(1-1-7)式代入(1-1-1)式，则有

$$p_i=g_i(q,\dot{q}^\sigma,\dot{q}^\rho)=g_i[q,f^\sigma(q,p_\alpha,\dot{q}^\rho),\dot{q}^\rho]=$$
$$g_i(q,p_\alpha,\dot{q}^\rho) \tag{1-1-8}$$