● 工程数学提高丛书

概率论与数理统计

典型题分析解集

○ 赵选民　师义民　编

○ 西北工业大学出版社

工程数学提高丛书

概率论与数理统计典型题分析解集

赵选民　师义民　编

西 北 工 业 大 学 出 版 社

1999 年 4 月　西安

(陕) 新登字 009 号

EA01/1-7

【内容简介】 本书是从现行的工科概率论和数理统计教材及历年工学、经济学硕士研究生入学考试试题中精选出来的典型题，进行了解证并阐述了概率论和数理统计课程的解题方法与技巧。

本书可作为高等学校工科、理科、经济学科本科生、研究生学习概率论与数理统计课程的复习辅导书，也可作为考研的强化训练指导书。

工程数学提高丛书

概率论与数理统计典型题分析解集

赵选民 师义民 编

责任编辑 刘彦信

责任校对 齐随印

*

©1999 西北工业大学出版社出版发行

(邮编:710072 西安市友谊西路 127 号 电话:8491147)

全国各地新华书店经销

空军电讯工程学院印刷厂印装

ISBN 7-5612-1067-1/O·146

*

开本:850 毫米×1 168 毫米 1/32 印张:9.5 字数:231 千字

1998 年 7 月第 1 版 1999 年 4 月第 2 次印刷

印数:5 001—12 000 册 定价:12.50 元

前　言

概率论和数理统计是研究随机现象客观规律的数学学科，是高等学校工科各专业的一门重要的基础理论课。通过本课程的教学，应使学生掌握概率论和数理统计的基本概念，了解它的基本理论与方法，从而掌握处理随机现象的基本理论、思想与方法，培养学生运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力。

对初学概率论和数理统计的同学，往往不知如何去解题，因而便产生“难学”的想法。实际上，正确掌握解题的方法与技巧对学习该门课程是非常重要的。本书的目的就是通过对概率统计中典型题的分析，帮助学生正确理解基本概念，掌握解题的方法与技巧，并通过适量的练习题，达到复习巩固教学内容，培养学生分析问题和解决问题能力的目的。

本书在选例方面，着眼于“精”与“代表性”，在解题方法方面，注重于由特殊到一般，由浅入深，揭示一般规律，使学生达到举一反三的效果。

本书是从现行的高等学校工科概率论和数理统计教材及历年工学、经济学硕士研究生入学考试试题中，精选出来的典型习题，并且进行了解证。内容包括随机事件及其概率，随机变量及其分布，随机变量的数字特征，极限定理，数理统计的基本概念，参数估计，假设检验，方差分析与回归分析等。

本书可作为高等学校工科、理科各专业本科生、研究生概率论与数理统计课程的辅助教材或复习参考书，也可作为准备报考硕士研究生的考生作为考前强化复习训练的指导书。

本书第一至第四章由赵选民编写，第五至第九章由师义民编

写。西北工业大学应用数学系和出版社对本书的出版给予了大力支持和帮助，在此谨致谢忱。

由于编者水平有限，书中错误之处，敬请读者不吝指教。

编　者

1997 年 10 月 28 日

《工程数学提高丛书》编委会

目 录

第一章　随机事件及其概率

一、内容提要

(一) 随机事件的运算

1. 随机现象的某种结果称为随机事件(简称事件),以拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 不可能事件记作 ϕ. 必然事件记作 Ω(或 U).

2. 若事件 A 发生必导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 如果两个事件满足 $A \subset B$ 和 $B \subset A$,则称两个事件相等,记作 $A = B$.

3. "两个事件 A 与 B 中至少有一个发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的和(或并),记为 $A \cup B$;"两个事件 A 与 B 同时发生"这一事件称为事件 A 和事件 B 的积(或交),记作 $A \cap B$(或 AB). 设有事件族 $\{A_t, t \in T\}$,其中 T 是指标集,可以是有限集,也可以是无限集,"事件族 $\{A_t, t \in T\}$ 中至少有一个事件 A_t 发生"这一事件 C 称为事件族 $\{A_t : t \in T\}$ 的和(或并),记作 $C = \bigcup\limits_{t \in T} A_t$;称"事件族 $\{A_t : t \in T\}$ 中诸事件 A_t 全都发生"这一事件 D 称为事件族 $\{A_t : t \in T\}$ 的积(或交),记作 $D = \bigcap\limits_{t \in T} A_t$. "事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件称为事件 A 与事件 B 的差,记作 $A - B$.

若两个事件 A 与 B 满足 $AB = \phi$,则称事件 A 与 B 互不相容(或互斥);若事件 A 与 B 满足 $A \cup B = \Omega$,且 $AB = \phi$,则称 A 与 B 互为对立事件(或互逆事件),记作 $B = \overline{A}$ 或 $A = \overline{B}$.

4. 事件的运算与集合的运算相当.必然事件、不可能事件、事件分别相当于全空间、空集、全空间的某个子集,事件的和、积、差、对立事件分别相当于集合的和、积、差和余集.由集合的运算性质可推知相应的事件的运算性质,如事件的和(积)满足交换律、结合律,事件的和(积)对积(和)满足分配律,事件运算中的对偶法则,等等.

(二) 古典概型

随机现象的每一基本结果称为样本点.样本点的全体称为样本空间.若随机现象的样本空间满足:(1) 只有有限个样本点;(2) 每个样本点的发生都是等可能的;(3) 每次试验有并且只有一个样点发生.则称这类现象为古典概型.在古典概型情况下,事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点个数}}{\text{样本点总数}}$$

(三) 几何概率

当随机试验的样本空间是某一个区域,并且任意一点落在度量(长度、面积和体积)相同的子区域是等可能的,则事件 A 的概率可定义为

$$P(A)=\frac{S_A}{S}$$

其中 S 是样本空间的度量,S_A 是构成事件 A 的子区域的度量.

(四) 概率的公理化定义及概率的性质

Ω 为样本空间,$\mathscr{F}$ 为 Ω 的某些子集组成的集类,满足:(1) $\Omega \in \mathscr{F}$,(2) 若 $A_n \in \mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$;(3) 若 $A \in \mathscr{F}$,则 $\overline{A} \in \mathscr{F}$. $\mathscr{F}$ 中的集合就表示随机事件.定义在 $\mathscr{F}$ 上的一个

非负函数 $P(A)$，若满足：(1) 对任意 $A \in \mathscr{F}, 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$，(2) $P(\Omega) = 1$，(3) 若 $A_n \in \mathscr{F} (n = 1,2,\cdots)$，且 $A_i \cap A_j = \phi (i \neq j)$，则 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$，就称 $P(A)$ 为事件 A 的概率，称 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间.

概率的基本性质：

(1) $P(\phi) = 0$

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足 $A_i A_j = \phi (i \neq j)$，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ （有限可加性）.

(3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(4) 若 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$.

(5) 若 $B_n \in \mathscr{F} (n = 1,2,\cdots), B_n \supset B_{n+1}, \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \phi$，则 $\lim_{n \to \infty} P(B_n) = 0$ （连续性）.

(6) $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=j} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) = 1$

性质(6) 称为概率的一般加法公式. 概率的基本性质是概率论学习的必要基础，务必要牢固掌握，并能灵活应用这些性质进行概率计算.

(五) 条件概率

1. 若 $P(B) > 0$ 时，称 $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为“在已知事件 B 发生的条件下事件 A 的条件概率”. 条件概率是概率论中另一重要概念，它与独立性有密切的关系，在不具有独立性的场合，它将扮演主要角色，条件概率也是概率，它具有概率的一切性质.

2. 将条件概率公式变形，就得到概率的乘法公式：

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$
$$(P(A)>0, P(B)>0)$$

一般地，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为任意 n 个事件，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

3. 全概公式：设 $B\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$，且 $A_iA_j=\phi\ (i\neq j)$，则

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)$$

4. 贝叶斯公式：设 $B\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$，且 $A_iA_j=\phi\ (i\neq j)$，$P(B)\neq 0$，则

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}$$

（六）独立性、贝努里概型

1. 称事件 A 与 B 独立，若 $P(AB)=P(A)P(B)$. 称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，若对任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，任意 $1\leqslant i_1<i_2\leqslant\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两独立，若对任意 $1\leqslant i_1<i_2\leqslant n$，有 $P(A_{i_1}A_{i_2})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})$. 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立一定两两独立，两两独立不一定相互独立.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))$$

用此公式计算概率 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)$ 比用一般加法公式简单得多.

2. 做 n 次随机试验，每次试验的结果是 A 或 $\overline{A}$，且 $P(A)=p$，

各次试验的结果相互独立，这种概型称为贝努里概型. n 次试验中事件 A 发生 k 次的概率 $P_n(k)$ 为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0,1,2,\cdots,n$$

这个公式称为二项式概率计算公式.

二、典型题分析

例 1 在某城市中发行三种报纸 A,B,C，经调查，订阅 A 报的有 45%，订阅 B 报的有 35%，订阅 C 报的有 30%，同时订阅 A 及 B 报的有 10%，同时订阅 A 及 C 报的有 8%，同时订阅 B 及 C 报的有 5%，同时订阅 A,B,C 报的有 3%，试求下列事件的概率:(1) 只订 A 报的;(2) 只订 A 及 B 报的;(3) 只订一种报纸的;(4) 正好订两种报纸的;(5) 至少订阅一种报纸的;(6) 不订阅任何报纸的;(7) 只多订阅一种报纸的.

解 本题主要考查学生利用事件之间的关系及运算规律计算事件概率的能力，在这里正确利用已知事件表示所求事件是非常重要的.

(1) $P(A\overline{B}\overline{C}) = P(A-B-C) = P(A-(B\cup C)) =$
$P(A-A(B\cup C)) = P(A) - P(A(B\cup C)) =$
$P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) =$
$0.45 - 0.10 - 0.08 + 0.03 = 0.30$

(2) $P(AB\overline{C}) = P(AB-C) = P(AB-ABC) =$
$P(AB) - P(ABC) = 0.10 - 0.03 = 0.07$

(3) $P(A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C) =$
$P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\,\overline{B}C) =$
$0.30 + P(B - B(A\cup C)) + P(C - C(A\cup B)) =$
$0.30 + P(B) - P(BA) - P(BC) +$
$P(ABC) + P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) =$

$0.30+0.35-0.10-0.05+0.03+$

$0.30-0.08-0.05+0.03=0.73$

(4) $P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)=$

$P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)=$

$P(AB)-P(ABC)+P(AC)-$

$P(ABC)+P(BC)-P(ABC)=$

$P(AB)+P(AC)+P(BC)-3P(ABC)=$

$0.10+0.08+0.05-3\times 0.03=0.14$

(5) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+(C)-$

$P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=$

$0.45+0.35+0.30-0.10-0.08-$

$0.05+0.03=0.90$

(6) $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.09=0.10$

(7) $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)=$

$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})+P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)=$

$0.10+0.73=0.83$

例 2 任意将 10 本书放在书架上，其中有两套书，一套 3 卷，另一套 4 卷，求下列事件的概率：(1) 3 卷一套的放在一起；(2) 4 卷一套的放在一起；(3) 两套各自放在一起；(4) 两套中至少有一套放在一起；(5) 两套各自放一起，还按卷次顺序排好.

解 这是一古典概型概率的计算问题，设 A 表示“3 卷一套的放在一起”，B 表示“4 卷一套的放在一起”，C 表示“两套各自放在一起”，D 表示“两套按卷次顺序排好”.

(1) 3 卷一套的放在一起，可把 3 卷看成一个整体，总共有 8 个位置，不同放法有 8! 种，3 卷一套之间可以任意排，共有 3! 种放法，所以

$$P(A)=\frac{8!\times 3!}{10!}=\frac{1}{15}$$

(2) $P(B)=\frac{7!\times 4!}{10!}=\frac{1}{30}$

(3) 两套各自放在一起，把两套分别看成两个整体，共有 5 个位置，不同排法共有5!种，4 卷一套放在一起共有 4!种不同排法，3 卷一套的放在一起共有 3!种不同排法，所以

$$P(C)=P(AB)=\frac{5!\times 4!\times 3!}{10!}=\frac{1}{210}$$

(4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=$

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{30}-\frac{1}{210}=\frac{2}{21}$$

(5) 这是求事件 ABD 的概率，每一套书按卷次顺序放好只有 2 种放法，所以

$$P(ABD)=\frac{5!\times 2\times 2}{10!}=\frac{1}{7560}$$

例 3 从 n 双不同的鞋子中任取 $2r(2r<n)$ 只，求下列事件的概率：(1) 没有成对的鞋子；(2) 只有一对鞋子；(3) 恰有两对鞋子；(4) 有 r 对鞋子.

解 (1) A 表示"没有成对的鞋子"的事件，要使 A 发生，先从 n 双中取出 $2r$ 双，再从每双中取出一只，因此

$$P(A)=\frac{C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}}{C_{2n}^{2r}}=\frac{2^{2r}C_n^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$$

(2) 设 B 表示"只有一对鞋子"的事件，要使 B 发生，先从 n 双中取出一双，其两只全取出，再从剩下的 $n-1$ 双中取出 $2r-2$ 双，从其每双中取出一只，所以

$$P(B)=\frac{C_n^1C_2^2C_{n-1}^{2r-2}(C_2^1)^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}=\frac{n2^{2r-2}C_{n-1}^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$$

(3) 用 C 表示"恰有两对鞋子"的事件，则

$$P(C)=\frac{2^{2r-4}C_n^2C_{n-2}^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}$$

(4) 用 D 表示"恰有 r 对鞋子"的事件，则

$$P(D)=\frac{C_n^r}{C_{2n}^{2r}}$$

例 4 某城有 N 部卡车，车牌号从 1 到 N，有一个外地人到该城去，把遇到的 n 部车子的牌号抄下（可能重复抄到某些车牌号），问抄到的最大号码正好为 k 的概率（$1\leqslant k\leqslant N$）。

解 这种抄法可以看作是对 N 个车牌号进行 n 次有放回的抽样，所有可能的抽法共有 N^n 种，这就是基本事件总数．由于每部卡车被遇到的机会可以认为相同，因此这是一个古典概型概率的计算问题．设 A 表示"抄到的最大号码正好为 k"的事件，先考虑最大车牌号不大于 k 的取法，这样取法共有 k^n 种，再考虑最大车牌号不大于 $k-1$ 的取法，其数目有 $(k-1)^n$ 种，因此 A 包含的基本事件总数为 $k^n-(k-1)^n$．故所求概率为

$$P(A)=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}$$

例 5 一袋中装有 $N-1$ 只黑球及 1 只白球，每次从袋中随机地摸出一球，并换入一只黑球，这样继续下去，问第 k 次摸球时，摸到黑球的概率是多少？

解 设 A 表示第 k 次摸到黑球这一事件，则 $\overline{A}$ 表示第 k 次摸到白球，现在计算 $P(\overline{A})$．

因为袋中只有一只白球，而每次摸出白球总是换入黑球，故为了第 k 次摸到白球，则前面的 $k-1$ 次一定不能摸到白球．因此 $\overline{A}$ 等价于下列事件：在前 $k-1$ 次摸球时都摸出黑球第 k 次摸出白球，这一事件的概率为

$$P(\overline{A})=\frac{(N-1)^{k-1}\cdot 1}{N^k}=(1-\frac{1}{N})^{k-1}\frac{1}{N}$$

所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(1-\frac{1}{N})^{k-1}\frac{1}{N}$$

在不同的问题中，有的求 $P(A)$ 容易，求 $P(\overline{A})$ 困难；有的正好

相反，利用公式 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$，我们就可以先求容易的一个，再去求另一个.

例 6 某码头只能容纳一只船，现预知某日将独立来到两只船，且在 24 h 内各时刻来到的可能性都相等，如果它们需要停靠的时间分别为 3 h 及 4 h，试求一船要在江中等待的概率.

解 设 x,y 分别为此二船到达码头的时间，则 $0 \leqslant x \leqslant 24$，$0 \leqslant y \leqslant 24$. 设 A 表示事件"一般要等待空出码头"，则 A 发生意味着同时满足下述两个不等式：$x - y \leqslant 3$，$y - x \leqslant 4$. 由几何概率得，事件 A 的概率，正好等于正方形 $OABC$ 中直线 $x - y = 3$ 及 $y - x = 4$ 之间的部分的面积与正方形 $OABC$ 的面积之比(如图 1－1 所示)，即

$$P(A) = [24^2 - (\frac{1}{2} \times 20^2 + \frac{1}{2} \times 21^2)]/24^2 = \frac{311}{1152} = 0.27$$

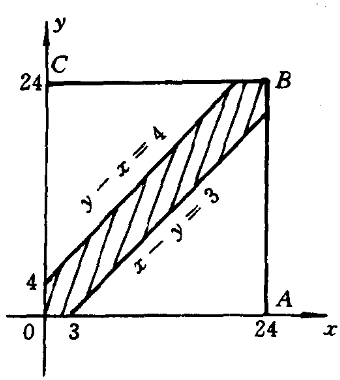

图 1－1

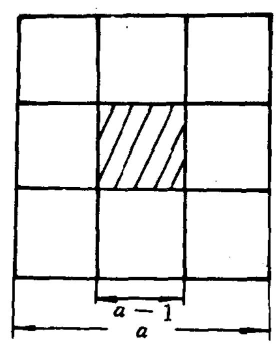

图 1－2

例 7 在一张打上方格的纸上投一枚直径为 1 的硬币，方格要多小才能使硬币与线不相交的概率小于 1%.

解 设方格边长为 a，当硬币圆心落于图 1－2 中阴影部分才