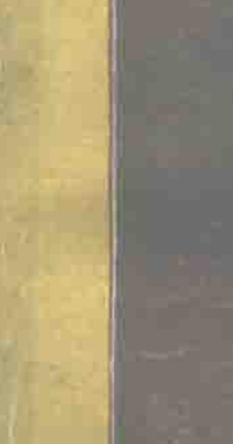
工程数学习题解答

武汉水利电力学院甘以炎
武汉水运工程学院朱　樾
等编



水利出版社

工程数学习题解答

武汉水利电力学院甘以炎
武汉水运工程学院朱　樵　等编

水利出版社

内 容 提 要

本书是根据上海交通大学、浙江大学、西安交通大学等院校所编工程数学《线性代数》、《矢量分析与场论》、《复变函数》、《概率论与数理统计》、《积分变换》、《数学物理方程与特殊函数》、《算法语言·计算方法》（高等学校试用教材，1978～79年人民教育出版社出版）编写的，全书共分七篇，分别对以上各书所列全部习题作了详尽的解答。

可供学习工程数学的工科院校、函授大学、电视大学、业余大学学生、教师参考，也可供工程技术人员及其他自学工程数学者参考。

工程数学习题解答

武汉水利电力学院甘以炎
武汉水运工程学院朱　樵 等编

水利出版社出版
（北京德胜门外六铺炕）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
水利电力印刷厂印刷

*

850×1168毫米　32开本　$16\frac{1}{8}$印张　442千字
1982年2月第一版　1982年2月北京第一次印刷
印数00001—53120册　定价2.05元
书号　15047·4162

前　言

我们在教学过程中，对高等学校试用教材工程数学（一套共七本，计：《线性代数》、《矢量分析与场论》、《复变函数》、《概率论与数理统计》、《积分变换》、《数学物理方程与特殊函数》、《算法语言·计算方法》）（1978～79年人民教育出版社出版）中的全部习题编写了解答，得到各方面的帮助和重视。最近，甘以炎、周鸿印、李远聆、胡家延、朱樵、吴伟业、陆宝珊、雷朝宣、王子亨、黄康等同志又对解答作了全面修订，最后由甘以炎（负责武汉水利电力学院同志编写的第一、二、四、五篇）、朱樵（负责武汉水运工程学院同志编写的第三、六、七篇）两位同志统一审定。为供广大读者参考，现正式出版。

本书在内容上与试用教材密切配合，所用名词符号尽量与其取得一致，解题方法简明扼要，步骤清楚。为培养读者综合分析能力，有部分习题列有几种解法供参考。

本书在编写过程中得到原试用教材各主编单位的鼓励和帮助。为了集思广益，书中也吸收兄弟院校有关交流资料中的一些有益解题方法，特此表示感谢。

由于我们水平有限，经验不足，书中错误之处，诚恳地欢迎广大读者批评指正。

编者

1981年4月

目　录

❶ 原教材节名。❷原教材章名。

第四篇　概率论与数理统计

第五篇　积　分　变　换

傅 里 叶 变 换

拉 普 拉 斯 变 换

---

❶ 原教材章名。

第六篇　数学物理方程与特殊函数

第七篇　算法语言·计算方法

算 法 语 言 ALGOL

计 算 方 法

第一篇　线　性　代　数

习题一　行列式及其性质

题 1　用克莱姆法则解线性方程组：

$$（1）\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x-y+z=1 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$$

$$（2）\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-z=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$$

解　（1）

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-8,\ D_x=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=4$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=4,\quad D_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-12$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{-12}{-8}=\frac{3}{2}$$

（2）解法同（1）$x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-4}{-6}=\dfrac{2}{3}$

$$y=-\frac{1}{2},\quad z=\frac{5}{6}$$

题 2 计算下列行列式的值。

$$(1)\ \begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 135 \end{vmatrix} = 60\begin{vmatrix} 2 & 14 & 9 \\ 2 & -7 & 9 \\ 4 & 7 & 27 \end{vmatrix}$$

$$= 60\times 2\times 7\times 9\times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 60\times 2\times 7\times 9\times \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 60\times 2\times 7\times 9\times(-3) = -22680$$

$$(2)\ \begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3)\ \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$$

$$= adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} = 4abcdef$$

题 3 证明下列各式

$$(1)\ \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

$$(2)\ \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

（3）$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^5 & b^5 & c^5 & d^5 \end{vmatrix} = abcd(a-b)(a-c)\cdot(a-d)(b-c)(b-d)\cdot(c-d)(a+b+c+d)$

（4）验证 $\begin{vmatrix} a_1+ka_2+la_3 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2+lb_3 & b_2+mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2+lc_3 & c_2+mc_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

（5）验证 $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix} = 0$；

（6）$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$

证

（1）左$=\begin{vmatrix} a^2-ab & ab-b^2 & b^2 \\ a-b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3 =$右

（2）记题设之行列式为D，其转置为D'，则有

$$D^2 = D\cdot D' = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

故 $$D = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

令 $b=c=d=0$ 时，上式左边$D=a^4$

故右边取＋号。

即 $$D=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2;$$

（3）**解法1**：$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^5 & b^5 & c^5 & d^5 \end{vmatrix} = abcd\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$

$$= abcd\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$$

$$= abcd(a-b)(a-c)(d-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ (a^2+b^2)(a+b) & (c^2+a^2)(c+a) & (d^2+a^2)(d+a) \end{vmatrix}$$

$$= abcd(a-b)(a-c)(d-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ (a^2+b^2)(a+b) & \begin{matrix}(c^2+a^2)(c+a)\\-(a^2+b^2)(a+b)\end{matrix} & \begin{matrix}(d^2+a^2)(d+a)\\-(a^2+b^2)(a+b)\end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$= abcd(a-b)(a-c)(d-a)\cdot \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c^3-b^3+a^2(c-b)+a(c^2-b^2) & d^3-b^3+a^2(d-b)+a(d^2-b^2) \end{vmatrix}$$

$$= abcd(a-b)(a-c)(d-a)(c-b)(d-b)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c^2+cb+b^2+a^2+ac+ab & d^2+bd+b^2+a^2+ab+ad \end{vmatrix}$$

$$= abcd(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)\cdot (a+b+c+d)$$

解法2：记原式左边行列式为D，则

$$D = abcd\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \overset{\text{记为}}{=\!=\!=} abcdD_1$$

当 a、b、c、d 中之两个相等时，由行列式的性质知 $D_1=0$，故D_1应含有$a-b$，$a-c$等类的因式。又D_1的每项是七次式，故

$$D_1=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d)$$

其中 α，β，γ，δ 是待定常数。

又 a，b，c，d 轮换时，D_1的绝对值不变，只改变符号；而右端也改变符号，为使等式成立，必须 $\alpha=\beta=\gamma=\delta$。于是

$$D_1=\alpha(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$

比较等式两边同类项的系数（例如bc^2d^4 项的系数），得 $\alpha=1$，即

$$\begin{aligned}D&=abcdD_1\\&=abcd(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)\end{aligned}$$

解法3：记号意义同解法2，今在D_1中增加一行和一列得一新行列式D_2：

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\a&b&c&d&e\\a^2&b^2&c^2&d^2&e^2\\a^3&b^3&c^3&d^3&e^3\\a^4&b^4&c^4&d^4&e^4\end{vmatrix}$$

由本节题4（2）知 $D_2=(b-a)(c-a)(d-a)(e-a)(c-b)\times(d-b)(e-b)(d-c)(e-c)(e-d)$；另一方面$D_2$按最后一列展开，则$D_1$为$e^3$的系数的$-1$倍。比较两边$e^3$的系数，即得 $D_1=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$。故

$$D=abcd(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$

（4）在左边行列式中以$-m$乘第3列加到第2列；再在所得行列式中以$-l$乘第3列、以$-k$乘第2列，都加到第一列即得右边行列式。

（5）在左边行列式中把第一列加到第二列、第三列加到第四列，得到的行列式为零，因它的第二、四列对应元素成比例。

（6）因第四行元素等于第一、第二两行对应元素的和，故此行列式为零。

题 4 计算下列 n 阶行列式。

（1）
$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

（2）
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

【提示】（1）把第一列以后各列加到第一列。

（2）从第一列后的所有诸列减去第一列，按第一行展开，然后自下而上从每一行减去它的前一行的 x_1 倍，把每列的公因式提出行列式，再利用数学归纳法。

解 （1）

$$原式=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a\cdots a \\ x+(n-1)a & x\cdots a \\ \cdots & \cdots \\ x+(n-1)a & a\cdots x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

（2）这是n阶Vandermonde行列式，记为D_n，可按提示（2）计算。现介绍另一解法。

$\because x_i=x_j$时（i，$j=1$，2，$\cdots n$。$i\neq j$），易见$D_n=0$。

$\therefore D_n$含有(x_i-x_j)因子（$i\neq j$）

故 $$D_n=K(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\cdots\cdots(x_{n-1}-x_1)(x_n-x_1)\cdot(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots\cdots(x_{n-1}-x_2)(x_n-x_2)\cdot\cdots\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})\cdot(x_n-x_{n-1})$$

$$=K\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$

其中K为待定的常数。这是因为等式两边都是关于诸x_i的$\frac{n(n-1)}{2}$次式，故它们至多相差一常数因子。

再比较两边 $x_2x_3^2x_4^3\cdots x_{n-1}^{n-2}x_n^{n-1}$项的系数，得$K=1$。

故 $$D_n=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$

题 5 解下列方程组

（1）$\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+y-z+w=1 \\ x+2y-z+w=2 \\ \quad y+2z+3w=3 \end{cases}$

解 $D=18$，$D_x=18$，$D_y=36$，$D_z=36$，$D_w=-18$

故$x=1$，$y=2$，$z=2$，$w=-1$。

$$(2)\quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+z-w=8 \\ 2x-y\quad -3w=3 \\ 3x+3y+5z-6w=5 \end{cases}$$

解 $D=24$，$D_x=24$，$D_y=120$，$D_z=-120$，$D_w=-48$

故$x=1$，$y=5$，$z=-5$，$w=-2$。

题 6 求下列行列式的乘积

$$(1)\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ -a & 0 & b \\ 0 & b & -a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & cb-a^2 & b^2-ac \\ b^2-ac & 0 & bc-a^2 \\ bc-a^2 & b^2-ac & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(b^2-ac)^3+(bc-a^2)^3$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} p & 0 & r \\ p & q & 0 \\ 0 & q & r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ a & b & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = abcpqr \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=abcpqr \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2abcpqr$$

题 7 设w是 1 的立方虚根，求证：

$$\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ w & w^2 & w^3 & 1 \\ w^2 & w^3 & 1 & w \\ w^3 & 1 & w & w^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

证 w为 1 的立方虚根，即$w^3=1$，$w^2+w+1=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ w & w^2 & w^3 & 1 \\ w^2 & w^3 & 1 & w \\ w^3 & 1 & w & w^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & 1 \\ w & w^2 & 1 & 1 \\ w^2 & 1 & 1 & w \\ 1 & 1 & w & w^2 \end{vmatrix}^2$$

它的第一行的四个元素为$1+w^2+w^4+1$，$w+w^3+w^2+1$，w^2+w+w^2+w，$1+w+w^3+w^2$，

即为1，1，－2，1其余三行可同法算出。

习题二　三维与n维向量空间

题 1　判别下列向量组的线性相关性：

（1）　(1，1，0)，(0，1，1)，(3，0，0)

（2）　(2，0)，(0，－1)

（3）　(1，3，0)，$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$

（4）　(1，1，3)，(2，4，5)，(1，－1，0)，(2，2，6)

（5）　(5，2，9)，(2，1，2)，(7，3，11)

（6）　(1，1，2)，(1，3，0)，(3，－1，10)

（7）　(1，－1，0)，(2，1，1)，(1，3，－1)

解（1）欲使$k_1(1, 1, 0)+k_2(0, 1, 1)+k_3(3, 0, 0)$
$=(0, 0, 0)$

即 $\begin{cases} k_1+3k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2=0 \end{cases}$ 此方程组有唯一解 $k_1=k_2=k_3=0$

故线性无关；

（2）欲使$k_1(2, 0)+k_2(0, -1)=(0, 0)$

只有当$k_1=k_2=0$时成立，故线性无关；

（3）因对应分量成比例，故线性相关；

（4）四个三维向量必线性相关；

（5）　$(7, 3, 11)=(5, 2, 9)+(2, 1, 2)$，故线性相关；

另法：欲使$k_1(7, 3, 11)+k_2(5, 2, 9)+k_3(2, 1, 2)$
$=(0, 0, 0)$

即 $\begin{cases} 7k_1+5k_2+2k_3=0 \\ 3k_1+2k_2+k_3=0 \\ 11k_1+9k_2+2k_3=0 \end{cases}$

因系数行列式$D=0$故有非零解。即向量组线性相关；

(6) $k_1(1,\ 1,\ 2)+k_2(1,\ 3,\ 0)+k_3(3,\ -1,\ 10)$
$=(0,\ 0,\ 0)$

即 $\begin{cases} k_1+k_2+3k_3=0 \\ k_1+3k_2-k_3=0 \\ 2k_1+10k_3=0 \end{cases}$ 因$D=0$，故有非零解。

$5(1,\ 1,\ 2)-2(1,\ 3,\ 0)-(3,\ -1,\ 10)$
$=(0,\ 0,\ 0)$，故线性相关；

(7) $k_1(1,\ -1,\ 0)+k_2(2,\ 1,\ 1)+k_3(1,\ 3,\ -1)$
$=(0,\ 0,\ 0)$

$\begin{cases} k_1+2k_2+k_3=0 \\ -k_1+k_2+3k_3=0 \\ k_2-k_3=0 \end{cases}$ 因$D\neq 0$，所以只有零解$k_1=k_2=k_3=0$

故线性无关。

题 2 证明两向量$(a_1,\ a_2)$，$(b_1,\ b_2)$线性相关的充分必要条件是$a_1b_2-a_2b_1=0$。

证 由$(a_1,\ a_2)$，$(b_1,\ b_2)$线性相关的定义，即存在不全为零的k_1，k_2使$k_1(a_1,\ a_2)+k_2(b_1,\ b_2)$
$=(0,\ 0)$成立。

亦即$\begin{cases} a_1k_1+b_1k_2=0 \\ a_2k_1+b_2k_2=0 \end{cases}$有非零解

上面方程组有非零解的必要充分条件为

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，也就是$a_1b_2-a_2b_1=0$

另一解法，$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$与$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2)$线性相关的充分必要条件是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，即对应分量成比例。

题 3 证明三向量$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$(b_1,\ b_2,\ b_3)$，