数论的三颗明珠

[苏联] A·Я·辛钦著

上海科学技术出版社

数论的三颗明珠

〔苏联〕A. Я. 辛 钦 著

王 志 雄 译

上海科学技术出版社

Александр Яковлевич Хинчин
ТРИ ЖЕМЧУЖИНЫ
ТЕОРИИ ЧИСЕЛ
Изд. «Наука», М., 1979

数论的三颗明珠
〔苏联〕A. Я. 辛　钦　著
王　志　雄　译
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行　上海市印刷三厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 2　字数 40,000
1984 年 4 月第 1 版　1984 年 4 月第 1 次印刷
印数：1—22,600

统一书号：13119·1160　　定价：0.25 元

内 容 提 要

这本小册子讨论了数论的三个定理。这些定理，尽管从表面上看来十分简单，但却曾是困惑过许多卓越数学家的难题。书中叙述的证明方法完全是初等的（尽管并不很简单）。

这本小册子适合于中学高年级的学生和广大数学爱好者阅读。

《大学数学丛书》

编辑出版说明

为我国大学生提供更多内容丰富的数学读物，这一直是我国数学界和出版界多年的宿愿之一。这套《丛书》就是以理工科数学(数理)系大学生为主要读者对象，兼供大专院校数学教师、科研工作者、中学数学教师和其他数学爱好者参考的读物。

《丛书》的内容大致包括这样几个方面：数学中某些分支或专题的入门介绍；体系新颖、别具一格的基础读物；数学史料、数学家传记和重要数学思想的介绍等。《丛书》中的各本可以是编著、编写而成，也可以是翻译、编译、摘译汇编而成。

《丛书》从1981年开始陆续出版。企盼数学界、教育界以及关心我国数学事业的各界人士不吝赐教，并望在推荐选题和编撰方面给予热忱支持。让我们为繁荣我国数学读物的出版事业而共同努力。

上海科学技术出版社

译 者 序

《数论的三颗明珠》讨论三个数论问题。作者认为它们是“数论的三颗真珠”，而且，它们还有两个值得一提的共同点。

第一，它们都是用初等数论的方法解决的；但是，初等并不意味着简单，实际上，为了理解并掌握它们，确需花费不少功夫。第二，许多数学大师虽曾潜心研究过它们，但最后，却被一些初出茅庐的二十多岁的“候补数学家”们成功地解决了。

对有志于数学研究的年轻人，这确是一种充满希望的刺激剂，也是鼓起科学胆识的号召。

《数论的三颗明珠》的作者是苏联著名数学家辛钦（А. Я. Хинчин, 1894～1959），他在数论和概率论等方面都有杰出的贡献；在撰写通俗读物方面也很有特色。他写的《连分数》早已为我们所熟悉（有中译本。上海科学技术出版社。1965）。

《数论的三颗明珠》也是很有影响的一本读物。在国外，已被翻译成英、德等多种文字。它可谓是雅俗共赏的佳作，从数学大师到中学生，都能从中获得教益。数学家们曾引用该书的材料，而中学生们只要拿起纸和笔跟着演算一下，也能掌握本书的绝大部分内容。

中译本《数论的三颗明珠》如果能有助于广大数学爱好者，译者将感到很大的满足。对译文中的不当之处，欢迎读者批评指正。

王志雄　1981. 7.

编 者 序

这本篇幅并不很大的小册子，是三十多年前写的，但是，至今，它的内容对于爱好数学的广大读者仍然具有重大的意义。它的前两版分别于1947年和1948年问世，如今已经不容易找到这些版本了，因此，现在出第三版是一件堪予祝贺的事。

书的作者是著名的数学家和杰出的教育家A. Я. 辛钦(1894～1959)，他是苏联科学院的通讯院士、莫斯科大学的教授、教研室主任。书的内容是关于数论的三个著名问题，它们形式上十分简单，实际上相当困难。许多大数学家的努力，都未曾把它们完全攻克，最终竟是让年轻人以最初等的方法解决了。辛钦本人就是数论方法最杰出的专家，对数论的发展做出过重大的贡献。他深刻理解这门学科的问题所在及解决的方法。他以惊人的技巧和精美的语言阐述这些定理的证明，因此，长期以来，这本书在我国及出现它的译本的国家的数学爱好者中间，无愧地享有崇高的声望。可以毫无疑问地断言，"数论的三颗明珠"在数论的发展中起了重大的作用，它吸引许多年轻的数学家去研究这门学科的问题。

书中谈到的三个定理，都是被当时年轻的初出茅庐的数学家们用初等方法证明的，他们后来都成了著名的大学者。

荷兰人范德瓦尔登证明了分自然数集成若干子集的算术级数定理，后来，他成为一位著名的数学家和数学史家。他关于代数学的书，四十年来一直是数学家们的必读书。

美国人曼恩证明了通过序列的密率估计序列之和的密率的定理。这个定理在堆垒数论中起了重要的作用。随后，曼恩又在数学方面取得另外许多重大的成果。

我们的同胞林尼克第一个获得著名的华林定理（关于表示自然数为其它自然数幂之和的问题）的初等证明之后，对于数学，特别是数论的发展，他又有许多新成果，终于成为卓越的科学院院士。他于 1972 年过早的去世是数学界的沉重损失。

辛钦把自己的小册子献给四十年代爱好数学的苏联青年。他们因为战争不得不离开学校、离开课堂，割舍他们所热爱的事业。战后，他们又以非凡的热情迫切要求掌握数学基础。作者在致前线的信以代替这书的序言中就谈到这一点。书本身的叙述正是以致前线的信的形式而风行开的。为了表达对那个英雄年代的崇高敬意，出版社完全保留了作者的原文，在编辑过程中，只略微进行修辞方面的润饰。

出版社希望这本书的再版将受到广大数学爱好者的欢迎，而书中如此透彻研究的"数论的三颗明珠"将仍然会鼓舞许多人去进一步探讨这个古老学科——数论——的大量引人入胜的问题。

A. 希德洛夫斯基

1978 年 7 月 10 日

致前线的信(代序)

亲爱的谢廖扎:

您从医院寄来的信使我在三个方面感到欣悦。首先,您请求我送给您"任何一点儿数学珍珠",这表明您确实恢复了健康,而不只是做为一个勇敢战士,希望以此安慰自己朋友的一种辞令。这是使我感到欣悦的第一个方面。

其次,您促使我思索:为什么在这场战争中,象您这样的一些十分年轻的战士,在每一个短暂的休憩时机,以全部的热情拚命地冲向自己热爱的事业——您们在战前就已献身于这个事业,但是,战争使您们脱离了这个事业。在上一次世界大战中,情况就不是这样。当时,开往前线的年轻人,几乎总是认为他们的生命已经完结了,以前赖以生存的一切,对他们来说,都已经成了不可能重现的幻影。而现在,您们却是利用战斗的间隙撰写学位论文,利用短暂的休假进行论文答辩。这不正是因为您们从本质上认识到参战和您们所热爱的课程——科学、艺术、实践活动——乃是同一个伟大事业的两个环节?如果是这样的话,那么,这种认识不正是您们取得胜利(我们在后方机关,因您们的胜利而感到欢欣鼓舞)的主要原动力之一吗?想到这一点,我感觉到第二个方面的欣悦。

这样一来,我开始打算:送什么东西给您呢?我对您不十分了解——您总共只听过我一年的课。但是,在我的印象中,您对科学有一种锲而不舍的严肃态度,因此,我不想送给您一些徒有精致外表而没有多少科学内容的"小铃铛"。不过,我也知道,您的数学训练不够充分——您总共只进了一年的

大学门，近三年来，在前线不断作战，未必有时间学习。认真考虑了几天后，我才选好题材。这样选题是否成功？只有等您评判。至于我本人，总觉得我给您讲述的那三个数论定理，是我们这门学科真正的珍珠。

在数论这门最古老，但又是永葆青春的数学分支中，不时会提出精彩的、独特的问题：就其内容而言，它们是如此初等，每个中学生都能理解，它们通常是关于数字世界遵从的某一个很简单的法则，这些法则对于所有已经验证过的特殊情况都是正确的，从而，要求查明它们实际上是否总是正确的。这样，尽管问题看起来简单，但是，为解决它们，往往要用上好几年的时间，有时，甚至困惑历代最著名的学者达几百年。您应会承认，它们使人心向神往。我为您选择的这三个问题，都是不久以前才被解决的。在它们的历史命运中有两个值得一提的共同点。首先，所有三个问题都是用最初等的数论方法解决的(但是，不要把初等与简单混为一谈：这三个问题的解决，正如您就要看到的，不很简单。而您为了理解和掌握这些解题方法，也必须花费不少精力)。其次，这三个问题，经过一些“年高望重”的学者们奋起冲击，毫无成效。后来，被年轻的，初出茅庐的数学家们完全解决了，他们是几乎与您岁数相仿的后生。确实的，这对于象您这样初出茅庐的学者，是饱含多大希望的兴奋剂呀！又将激起多大的科学胆识呀！

为了阐述这些定理，我更进一步地注意无可指责的证明结构，这又给我带来很大的乐趣。

这是我之所以欣悦的第三个方面。

祝愿您在战斗和科学两方面都获得巨大的成功。

您的辛钦

1945年3月24日

目 录

译者序 ………………………………………………………… ii
编者序 ………………………………………………………… iii
致前线的信（代序） ……………………………………… v
第一章　关于算术级数的范德瓦尔登定理……………… 1
第二章　朗道-斯尼列利曼猜测和曼恩定理 ………… 8
第三章　华林问题的初等证明…………………………… 26

第一章
关于算术级数的范德瓦尔登定理

§1

1928年夏天，我在哥庭根度过了几个星期。象往常一样，许多获得奖学金的外国学生到这儿来学习。他们中有许多人我早已认识，有一些还成了我的朋友。我到那里时，那儿的数学家们讨论的主题是年轻的荷兰人范德瓦尔登的绝妙的结果。当时，他还是一个初出茅庐的青年，但现在已是一个知名的学者了。他的结果恰好是在哥庭根得到的，实际上，仅在我到达的前几天才得到，但是，我所遇到的几乎所有的数学家都津津有味地跟我谈论这个结果。

经过是这样的：当地的一个数学家（我忘记他的姓名）在自己的研究工作中碰到如下的问题：设全体自然数集以任意方式分成两部分（例如偶数与奇数，或素数与合数，或其它任意方式），那么，是否可以保证，至少在其中一部分中，有任意长的算术级数存在（在这儿及此后，所谓算术级数的长即指它的项数）？着手这一问题的人，开始时都感到相当简单，觉得它的肯定回答几乎是不证自明的。但真的要去证明时，却一筹莫展了。因为哥庭根的数学家和他们的外国朋友之间，有经常性的学术交流的传统，这个困难而迷人的问题，很快就成了大家津津乐道的话题。从年高望重的数学大师到低年级的

大学生，大家都在研究它。经过几星期的紧张奋战之后，终于被来哥庭根学习的荷兰青年范德瓦尔登成功地解决了。我认识他并亲耳听到他从容不迫的解答。这个解答是初等的，但远不是简单的；问题的内容很深刻，表面上的简单性仅是惑人的外衣。

不久前，M. A. 鲁科姆斯卡娅（明斯克人）为我提供一个新的、大为简单而又明显的证明。下面，承她允许，我将给你们叙述她的这个证明。

§ 2

从本质上说，范德瓦尔登证明的结果比原先要求的更多。首先，他假设自然数不是分成两类，而是分成任意 k 类（集合）；其次，为了保证至少有一类含给定（任意）长的算术级数，他指出，不一定要分全体自然数，而只要取某一段，这一段的长度 $n(k, l)$ 是 k 和 l 的函数，显然，在什么地方取这一段完全一样，只要它是 $n(k, l)$ 个连续的自然数。

因此，范德瓦尔登定理可表述如下：

设 k 和 l 是任意自然数，则存在自然数 $n(k, l)$，使得以任意方式分长为 $n(k, l)$ 的任意自然数段成 k 类（其中，可能有空类），则至少有一类，含有长为 l 的算术级数。

$l=2$ 时，这定理显然正确。因为，只要令 $n(k, 2)=k+1$，则分 $k+1$ 个数成 k 类，至少有一类含有不止一个数，而任两个数是长为 2 的算术级数，故定理得证。我们要就长 l，用数学归纳法证明定理。因此，以后我们将假设对某个数 $l\geqslant 2$ 和任意的 k，定理成立，并要证明对于数 $l+1$（同时，对于任意 k），定理也成立。

§ 3

根据我们的假设，对任意的自然数 k，存在自然数 $n(k, l)$，使得长为 $n(k, l)$ 的任意自然数段用任意方式分成 k 类，至少有一类含有长为 l 的算术级数。我们的任务是证明：对任意自然数 k，存在数 $n(k, l+1)$。我们利用直接构造数 $n(k, l+1)$ 的方法来解决这个问题。为此，令

$$q_0=1,\ n_0=n(k, l)。$$

然后用以下方式依次确定数 $q_1, q_2, \cdots, n_1, n_2, \cdots$：如果对某个数 $s>0$，已经确定了 q_{s-1} 和 n_{s-1}，则我们令

$$q_s=2n_{s-1}q_{s-1},\ n_s=n(k^{q_s}, l)\quad (s=1, 2, \cdots)。\tag{1}$$

显然，对任意 $s\geqslant 0$，数 n_s，q_s 因此而确定。现在，我们将断言：可以取 q_k 为 $n(k, l+1)$。为此，我们必须证明：如果长为 q_k 的自然数段以任意方式分成 k 类，则至少有一类含有长为 $l+1$ 的算术级数。这一章的后半部分全是为了证实这一点。

为简便起见，以后令 $l+1=l'$。

§ 4

设长为 q_k 的自然数段 Δ 以任意方式分成 k 类。两个数 a 和 b 属于同一类，我们称它们为同型，并记为 $a\backsim b$。属于 Δ 的等长的两段 $\delta(a, a+1, \cdots, a+r)$ 和 $\delta'(a', a'+1, \cdots, a'+r)$，如果 $a\backsim a'$，$a+1\backsim a'+1$，$\cdots$，$a+r\backsim a'+r$，则称这两段为同型，并记为 $\delta\backsim\delta'$。显然，属于段 Δ 的数中，一切可能的不同的型数等于 k，而对形为 $(a, a+1)$ 的段（即长为 2 的段），一切可能的型数等于 k^2，一般地，对长为 m 的段，一切可能的型

数等于 k^m（不言而喻，在 Δ 中，有些型可能实际上不存在）。

因 $q_k=2n_{k-1}q_{k-1}$（见(1)），则段 Δ 可视为 $2n_{k-1}$ 个长为 q_{k-1} 的段，象我们刚提到的，这样的段只能有 $k^{q_{k-1}}$ 个不同的型，但段 Δ 的左半部分有 n_{k-1} 个这样的段，由(1)，其中 $n_{k-1}=n(k^{q_{k-1}}, l)$，则依数 $n(k^{q_{k-1}}, l)$ 的意义，我们能断言：段 Δ 的左半部分含有 l 个长为 q_{k-1} 的同型段

$$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_l$$

组成的算术级数。在这儿，为简便起见，我们说等长的段 Δ_i 形成算术级数，指的是它们的第一个数形成算术级数。这个级数相邻两段的第一个数的差 d_1 称为级数 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_l$ 的公差。不言而喻，这样两个相邻段的第二（或第三、第四等等）个数的差也等于 d_1。

现在，我们往这级数接上第 $l+1$ 项 $\Delta_{l'}$（记住，$l'=l+1$），它可能超出段 Δ 的左半部分，但无论如何，必整个地属于 Δ。则段 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_l, \Delta_{l'}$ 表示长为 $l'=l+1$ 的算术级数且公差为 d_1，而每段长为 q_{k-1}，$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_l$ 是相互同型，至于最后一段 $\Delta_{l'}$ 的型则一无所知。至此完成了我们的第一步构造。在继续看下去之前，最好请你们先想一想，下一步该怎么办？

§ 5

现在，我们进行第二步。从刚才构造的段级数的前 l 项中任取一项，设取 Δ_{i_1}，其中 $1\leqslant i_1\leqslant l$，则 Δ_{i_1} 是长为 q_{k-1} 的段。与前面类似，因 $q_{k-1}=2n_{k-2}q_{k-2}$，故 Δ_{i_1} 的左半部分可分成 n_{k-2} 个长为 q_{k-2} 的段，但这样的段共有 $k^{q_{k-2}}$ 种不同的型，另一方面，由(1)，$n_{k-2}=n(k^{q_{k-2}}, l)$，因而，$\Delta_{i_1}$ 的左半部分含有长为 q_{k-2} 的由 l 个同型的段 $\Delta_{i_1i_2}(1\leqslant i_2\leqslant l)$ 组成的级数。设这个

级数的公差(即相邻两段第一个数的差)等于d_2。往这个级数接上第$l+1$项$\Delta_{i_1l'}$,它的型当然是一无所知,段$\Delta_{i_1l'}$可能超过段Δ_{i_1}的左半部分,但显然,整个地属于Δ_{i_1}。

现在把仅在其中一段Δ_{i_1}所做的构造全等地转移到所有其它段$\Delta_{i_1}(1\leqslant i_1\leqslant l')$。这样一来,得到带有两个下标的段集$\Delta_{i_1i_2}(1\leqslant i_1\leqslant l',\ 1\leqslant i_2\leqslant l')$。显然,下标不超过$l$的任意两段是同型的:

$$\Delta_{i_1i_2}\backsim\Delta_{i'_1i'_2}\quad(1\leqslant i_1,\ i_2,\ i'_1,\ i'_2\leqslant l)。$$

现在,无疑你们已经明白,这个过程可以继续进行下去,直到k次。第一步构造的结果得到长为q_{k-1}的段,第二步得到长为q_{k-2}的段,等等,第k步得到长为$q_0=1$的段,即原先的段Δ的数;但我们仍然把这数表示成:

$$\Delta_{i_1i_2\cdots i_k}\quad(1\leqslant i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k\leqslant l')。$$

这时,对$1\leqslant s\leqslant k$和$1\leqslant i_1,\ \cdots,\ i_s,\ i'_1,\ \cdots,\ i'_s\leqslant l$,

$$\Delta_{i_1\cdots i_s}\backsim\Delta_{i'_1\cdots i'_s}。\tag{2}$$

现在,我们还要注意两点,它们对后面的论证是重要的。

1) 在关系式(2)中,如果$s<k$且$i_{s+1},\ i_{s+2},\ \cdots,\ i_k$是取自$1,\ 2,\ \cdots,\ l,\ l'$的任意下标,则数$\Delta_{i_1i_2\cdots i_si_{s+1}\cdots i_k}$在段$\Delta_{i_1\cdots i_s}$中所处的位置与数$\Delta_{i'_1i'_2\cdots i'_si_{s+1}\cdots i_k}$在段$\Delta_{i'_1\cdots i'_s}$中所处的位置相同,由(2),这两段同型,故得

$$\Delta_{i_1i_2\cdots i_si_{s+1}\cdots i_k}\backsim\Delta_{i'_1i'_2\cdots i'_si_{s+1}\cdots i_k},\tag{3}$$

其中

$$1\leqslant i_1,\ \cdots,\ i_s,\ i'_1\cdots,\ i'_s\leqslant l,$$
$$1\leqslant i_{s+1},\ i_{s+2},\ \cdots,\ i_k\leqslant l'\quad(1\leqslant s\leqslant k)。$$

2) 当$s\leqslant k$, $i'_s=i_s+1$时,显然,段$\Delta_{i_1\cdots i_{s-1}i_s}$和$\Delta_{i_1\cdots i_{s-1}i'_s}$是我们的第$s$步构造中相邻的两段。因此,无论下标$i_{s+1},\ \cdots,\ i_k$

如何，数 $\Delta_{i_1\cdots i_{s-1}i_si_{s+1}\cdots i_k}$ 和 $\Delta_{i_1\cdots i_{s-1}i'_si_{s+1}\cdots i_k}$ 在相邻两段中处于相同的位置，故（当 $i'_s=i_s+1$ 时）

$$\Delta_{i_1\cdots i_{s-1}i'_si_{s+1}\cdots i_k}-\Delta_{i_1\cdots i_{s-1}i_si_{s+1}\cdots i_k}=d_s。\tag{4}$$

§ 6

这时，已离我们的目的不远了。我们考虑段 Δ 的 $k+1$ 个数：

$$\begin{cases}a_0=\Delta_{l'l'l'\cdots l'},\\ a_1=\Delta_{1l'l'\cdots l'},\\ a_2=\Delta_{11l'\cdots l'},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_k=\Delta_{111\cdots 1}。\end{cases}\tag{5}$$

因为段 Δ 中的数分为 k 类，而(5)中共有 $k+1$ 个数，故必有两个数属于同一类，设它们是 a_r 和 $a_s(r<s)$，即

$$\Delta_{\underbrace{1\cdots1}_{r}\underbrace{l'\cdots l'}_{k-r}}\backsim\Delta_{\underbrace{1\cdots1}_{s}\underbrace{l'\cdots l'}_{k-s}}\tag{6}$$

考虑 $l+1$ 个数

$$c_i=\Delta_{\underbrace{1\cdots1}_{r}\underbrace{i\cdots i}_{s-r}\underbrace{l'\cdots l'}_{k-s}}\quad(1\leqslant i\leqslant l'),\tag{7}$$

它们中的前 l 个数（即当 $i<l'$），由(3)知，属于同一类。至于最后一个数（$i=l'$），由(6)知，它和第一个数同型。因此，(7)中所有的 $l+1$ 个数属于同一类。为证明我们的论断，只须验证这一些数形成算术级数，即差 $c_{i+1}-c_i(1\leqslant i\leqslant l)$ 与 i 无关。

为简便起见，令 $i+1=i'$，并令

$$c_{i,m}=\Delta_{\underbrace{1\cdots1}_{r}\underbrace{i'\cdots i'}_{m}\underbrace{i\cdots i}_{s-r-m}\underbrace{l'\cdots l'}_{k-s}}\quad(0\leqslant m\leqslant s-r),$$