

# 非线性振动

zhen dong  
fei xian xing



30.001  
87

# 非线性振动

陈予恕 编著

天津科学技术出版社

## 内 容 提 要

本书系统地论述了研究非线性振动方程定常解和非定常解的近似方法及其在工程上的应用。全书除绪论外共分七章，包括对非线性振动系统的特点和研究方法的叙述；一个自由度系统、多自由度系统的相平面法，渐近法，平均法和摄动法及其在工程上应用的实例；还简述了点映射法，模拟计算机的应用和多尺度法等新发展的一些方法。

本书可作为高等院校非线性振动课程的教学参考书以及从事机械制造，自动控制等工程部门的非线性振动研究和计算工作的工程技术人员的参考书。

## 非 线 性 振 动

陈予恕 编著

\*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津新华印刷一厂印刷

天津市新华书店发行

\*

开本 850×1168毫米 1/32 印张 12.75 字数 304,000

一九八三年七月第一版

一九八三年七月第一次印刷

印数：1—6,300

书号：15212·78 定价：1.60元

# 前 言

非线性振动问题是近代物理学和技术科学许多领域中的重要课题。国外很多科学家进行了大量的研究工作，本世纪二十年代以来取得了许多重要的研究成果，目前该学科的研究工作仍在蓬勃地发展。随着我国社会主义建设事业的发展，国民经济各技术部门已经提出了不少非线性振动问题，可以预料，还将提出更多的问题，我国的非线性振动研究工作正在迅速地兴起。

本书是在我校一般力学专业研究生非线性振动讲义的基础上修改而成的，我们的主要目的是，试图用简单的数学工具较系统地介绍非线性振动研究中的主要方法，着重介绍我们研究工作中经常应用的平均法，给出了一些解决工程技术课题中非线性振动理论问题的实例，并对新发展的某些方法和非线性振动的实验研究问题作了简单介绍。在叙述有关理论方法时，我们从工程应用的问题出发，深入地介绍了非线性振动的物理概念。期望本书能适合各有关专业教学和从事振动研究工作的人员的需要。

本书除绪论外共分七章。

在绪论中简单介绍了非线性振动研究的任务和发展概况、非线性系统的一般特点和研究步骤，并介绍了机械系统中常见的各种非线性力函数。

第一章介绍了分析非线性系统自由振动的渐近法和平均法，从理论上阐明了非线性弹性力，非线性阻尼，自激振动等系统的一些新的物理现象。

第二章介绍了相平面法，讨论了奇点分类，保守系统和非保守系统以及自激振动系统相迹的性质。

第三章介绍了一个自由度系统强迫振动的平均法，讨论了具有非线性恢复力系统的振动特性和非理想系统的特点等。

第四章给出了研究多自由度系统周期和概周期振动过程的一种解法，分析了两自由度、多自由度系统的一般特点。

第五章介绍了分析具有慢变参数非线性振动系统的渐近法和平均法。

第六章讨论了非线性振动系统的摄动法，并介绍了多尺度法及其在一个自由度系统中的应用。

第七章对非线性振动研究中新发展的某些方法，如点映射法，模拟计算机的应用，实验研究方法等作了简单介绍。

在编写中参考了我国第一届和第二届非线性振动学术交流会的资料，其中很多同志的工作很有特色，给了我很大的启发和帮助，谨在此向他们表示感谢。

由于编写时间仓促，个人水平所限，本书的错误和不当之处在所难免，诚恳希望批评指正。

陈子恕

于天津大学

1982.7.

# 目 录

绪论 .....	( 1 )
第一章 非线性系统的自由振动 .....	( 19 )
§ 1.1 渐近法——三级数法 .....	( 19 )
§ 1.2 保守系统 .....	( 29 )
§ 1.3 非线性阻尼的影响 .....	( 38 )
§ 1.4 平均法 .....	( 45 )
§ 1.5 自激振动系统 .....	( 51 )
§ 1.6 定常解 .....	( 57 )
§ 1.7 等效线性化 .....	( 61 )
第二章 相平面法 .....	( 70 )
§ 2.1 相平面 相迹 .....	( 70 )
§ 2.2 奇点分析 .....	( 74 )
§ 2.3 保守系统相迹的性质 .....	( 81 )
§ 2.4 非保守系统相迹的性质 .....	( 96 )
§ 2.5 自激振动系统相迹的性质 .....	( 109 )
第三章 一个自由度非线性系统的强迫振动 .....	( 117 )
§ 3.1 非共振情况的平均法 .....	( 117 )
§ 3.2 共振情况的平均法 .....	( 124 )
§ 3.3 具有分段线性的非线性系统的强迫振动 分段簧间隙 对系统的影响 .....	( 131 )
§ 3.4 线性非理想系统 .....	( 141 )
第四章 多自由度非线性系统的强迫振动 .....	( 154 )

§ 4.1	多自由度系统的强迫振动	(154)
§ 4.2	两自由度分段线性系统	(174)
§ 4.3	多自由度非线性系统实例	(195)
§ 4.4	具有任意个准循环坐标非线性系统的概周期解	(224)
§ 4.5	旋转轴的概周期振动	(237)
<b>第五章 带有慢变参数的非线性振动系统</b>		<b>(250)</b>
§ 5.1	一个自由度系统非定常解的渐近法	(251)
§ 5.2	求非定常解的平均法	(262)
§ 5.3	具有任意个准循环坐标的多自由度系统的非定常解	(266)
§ 5.4	近似方程的数值积分法	(277)
<b>第六章 非线性振动系统的摄动法——小参数法</b>		<b>(281)</b>
§ 6.1	摄动法的思想 小参数	(281)
§ 6.2	非自治系统的非共振情况	(283)
§ 6.3	非自治系统的共振情况	(287)
§ 6.4	自治系统	(292)
§ 6.5	多自由度系统周期振动实例	(296)
§ 6.6	多尺度法及其在一个自由度系统中的应用	(323)
<b>第七章 非线性振动中其他几个常用的方法</b>		<b>(339)</b>
§ 7.1	点映射法	(339)
§ 7.2	谐波平衡法	(342)
§ 7.3	频闪法	(348)
§ 7.4	直接变分法	(351)
§ 7.5	电子计算机数值解法	(357)
§ 7.6	模拟计算机的应用 计算分析法	(367)
§ 7.7	非线性振动的实验研究问题	(371)
<b>参考文献</b>		<b>(399)</b>

# 绪 论

## 一、非线性振动研究及其任务

振动是物理学、技术科学中广泛存在的物理现象。如建筑物和机器的振动，无线电技术和光学中的电磁振动，控制系统和跟踪系统中的自激振动，声波振动，同步加速器中的束流振动和其结构共振，火箭发动机燃烧时所引起的振动，化学反应中的复杂振动等等。这样一些表面上看起来极不相同的现象，都可以通过振动方程统一到振动理论中来。振动是机械运动的一种形式，在技术领域中，经常大量的振动是周期振动。

因振动是机械运动的一种形式，所以其规律 $x(t)$ 决定于作用在系统上各种力的性质，即为下列方程所决定

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (a)$$

其中 $m$ 为振动质量， $x$ 为 $m$ 的振动位移， $c\dot{x}$ 为阻尼力， $kx$ 为弹性恢复力， $f(t)$ 为周期干扰力。因弹性力和阻尼力都是线性函数，所以方程(a)是二阶线性非齐次微分方程，这样的系统称为线性振动系统。如果弹性力和阻尼力二者之一或二者都是非线性函数 $f_2(x)$ 和 $f_1(\dot{x})$ ，则振动方程成为非线性微分方程

$$m\ddot{x} + f_1(\dot{x}) + f_2(x) = f(t) \quad (b)$$

此时系统称为非线性振动系统。

非线性振动理论的主要任务是，研究各种不同振动系统的周期振动规律（振幅、频率、相位的变化规律，这三个参数称为振动三要素）或求周期解，以及研究周期解的稳定条件，从工程技术角度来说，其任务是研究为减小系统的振动或有效利用振动，使系统具有合理的结构形式和参数。



$n$  个自由度非线性振动系统就有  $n$  个二阶微分方程或  $2n$  个一阶微分方程。

在非线性振动中，振幅、频率、相位等术语的定义和线性振动中完全相同。

## 二、机械系统中常见的几种非线性力

在对一个振动系统进行研究时，其阻尼力和弹性力有时可线性化，有时则必须考虑其非线性性质（何时需考虑力的非线性特性，决定于所研究问题的性质和所要求的精度）；另外在工程实际中也存在着很多不能线性化的系统。

在机械系统中非线性力有非线性势力、非线性阻尼力和所谓混合型非线性力，下面介绍一些产生非线性力的实例，一方面藉以说明非线性振动问题的重要性，同时也供建立振动方程时参考。

### 1. 非线性势力

只和系统的机械位置（只和广义坐标）有关的力称为势力。它有如下几种形式：

（1）弹性力 由于物体的弹性变形或一定数量气体的体积发生变化而引起的力；

（2）重力；

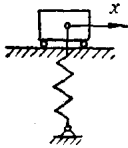
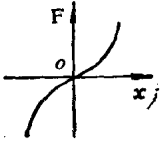
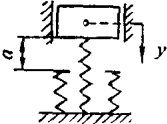
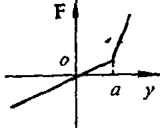
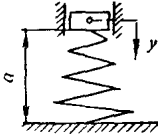
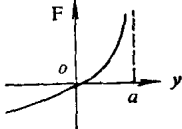
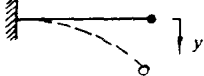
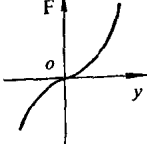
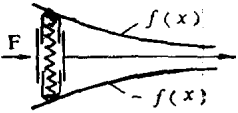
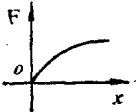
（3）物体的某一部分在液体中时，该物体所受到的排挤力；

（4）磁场中的磁力。

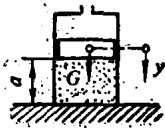
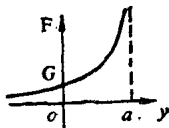

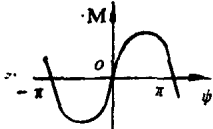

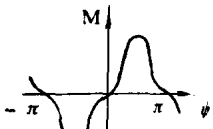

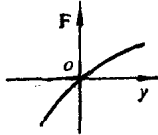
具有非线性势力的机械振动系统及势力特性曲线示于表 1。（见 3—5 页）

若  $F_0$  为弹性力，则  $dF_0/dq$  称为刚度系数。因在非线性系统中该系数和广义坐标  $q$  有关，所以  $dF_0/dq$  称为拟刚度系数。当  $q > 0$  时，如随着  $q$  的增加，刚度系数增大，则称此弹性力的特性为硬特性；反之，如  $q$  增加时，刚度系数减小，则称其特


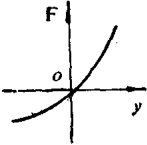

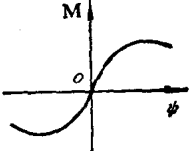
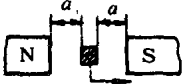
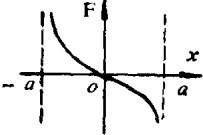

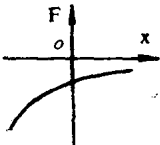
表 1

编号	系统类别	力的特性曲线
1	以弹簧压于平面上的重物 (I)* 	
2	置于分段弹簧上的重物 (I) 	
3	置于堆形弹簧上的重物 (I) 	
4	柔性弹性梁 (I) 	
5	在收缩管道中的弹性活塞 (I) 	 $F = 4c \int_0^x (f')^2 dx$ 其中 $c$ —— 线性弹簧的刚度系数

续表

编号	系统类别	力的特性曲线
6	<p>置于封闭容器中的 气体上的重物 (I)</p> 	
7	<p>具有固定悬挂点的单摆 (II)</p> 	 $M = m g l \sin \psi$
8	<p>悬挂轴旋转的单摆 (II)</p> 	 $M = m g l \sin \psi - m \Omega^2 l^2 \sin \psi \cdot \cos \psi$
9	<p>连通器中的液体 (II)</p> 	

续表

编号	系统类别	力的特性曲线
10	曲面船 (浮桥船, 浮船) 垂直偏离平衡位置 (Ⅲ) 	
11	同上, 绕平衡位置转动 (Ⅲ) 	
12	磁场中的电枢 (Ⅳ) 	
13	轮箍 A 在通过固定导线 B 所产生的磁场中 (Ⅳ) 	

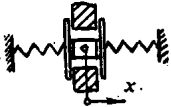
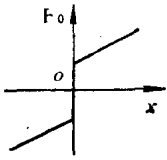

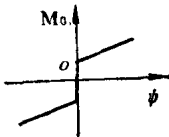
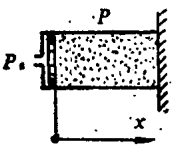
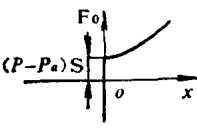
注: 括号中罗马数字表示势力的型式

性为软特性。弹性力也可能在  $q$  变化的某个区间有硬特性, 而在另一个区间有软特性。

以 $x, y, \psi$ 表示广义坐标（系统对平衡位置的偏离），用 $F$ 或 $M$ 表示广义力，并规定广义力的符号和广义坐标的符号相反。在以上的例子中，只有当系统偏离平衡位置的位移较大时，势力才可能出现非线性，而在小位移的情况下可认为系统是线性的。

有时尽管位移很小，也必须考虑势力的非线性特性，这样的例子如表 2 所示。

表 2

编号	系统类别	力的特性曲线
1	具有间隙的系统 (I) 	
2	具有纵向槽的重型半圆柱体 (II) 	
3	由内部压力压向底部的活塞 (I) 	 $P, P_0$ —表示内部和大气压力; $S$ —气缸横断面积

## 2. 非线性阻尼力

当系统振动时，如其中只和机械系统的速度有关的力其功率恒等于零，则该力称为阻尼力（或简称阻尼）。而陀螺力（与速度有关），因其功率恒等于零，不是阻尼力。一般情况下，当力和速度的方向相反的时候，则称该力为阻尼。

阻尼包括：有相对运动的零件之间产生的摩擦力；用铆钉、螺栓和压力连接的结构，当受动载荷时，在接触面之间产生的结构摩擦力；系统构件材料的内摩擦力；系统在气体或液体中振动而产生的介质阻力（迎面阻尼，机翼旋转阻力矩）等等。

阻尼常常是速度的非线性函数，但在计算时，一般都将它线性化，即认为它是线性粘滞阻尼。阻尼的线性化，不因它是弱非线性（实际上它是强非线性），而是因为阻尼对振动规律的影响很小。例如，在计算系统的固有频率和非共振情况的振幅时，阻尼即可线性化，甚至可以完全忽略。

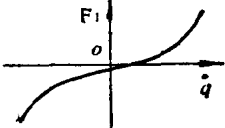
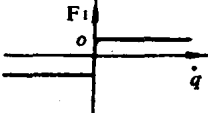
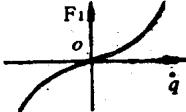
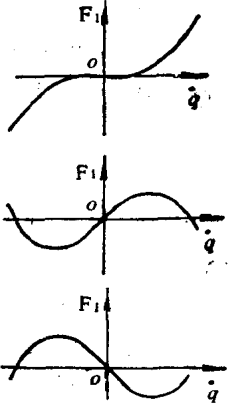
当然不是在任何情况下，阻尼都可线性化或可完全忽略。如在分析自由衰减振动时、在计算强迫振动的共振振幅时、计算自激振动的定常解时、计算参数共振的振幅以及研究自激振动系统的过渡过程时，都需考虑阻尼的非线性特性。

满足不等式  $F_1(\dot{q})\dot{q} > 0$  的阻尼  $[F_1(\dot{q})]$  作负功，它消耗机械能，这样的阻尼称为耗散阻尼（或称正阻尼）。若  $F_1(\dot{q})\dot{q} < 0$ ，那么阻尼作正功，使机械能积蓄在系统之内，这样的阻尼称为负阻尼。如阻尼在振动位移的一个区间作负功，而在另一个区间作正功，则系统具有自激振动的性质。

某些非线性阻尼及其特性曲线示于表 3 中。

在研究简谐振动时，即当  $q = A\sin(\omega t + \alpha)$  时，弹性力和阻尼力的合力为  $F_0(q) + F_1(\dot{q}) = F_0 + F_1(\pm\omega\sqrt{A^2 - q^2})$ ，此合力只为广义坐标的函数。因为振动规律已知（给定的），所

表 3

编 号	阻尼型式和力特性	力的特性曲线
1	<p>幂函数阻尼</p> $F_1 = b  \dot{q} ^{n-1} \dot{q}$	
2	<p>库仑摩擦(在1中当n=0时)</p> $F_1 = b_0 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} }$	
3	<p>平方阻尼(在1中当n=2时)</p> $F_1 = b_2  \dot{q}  \dot{q}$	
4	<p>线性和立方阻尼</p> <p>a) <math>F_1 = b_1 \dot{q} + b_3 \dot{q}^3</math></p> <p>b) <math>F_1 = b_1 \dot{q} - b_3 \dot{q}^3</math></p> <p>c) <math>F_1 = -b_1 \dot{q} + b_3 \dot{q}^3</math></p>	

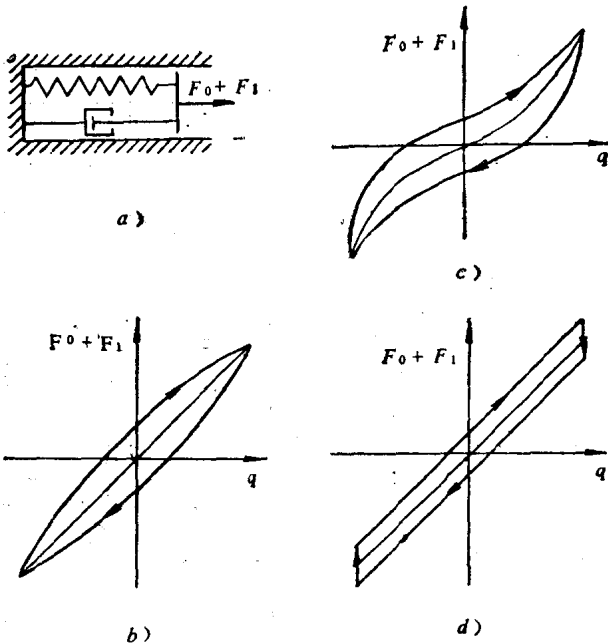
编号	阻尼型式和力特性	力的特性曲线
5	<p style="text-align: center;">线性和库仑摩擦</p> <p>a) <math display="block">F_1 = b_0 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} } + b_1 \dot{q}</math></p> <p>b) <math display="block">F_1 = b_0 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} } - b_1 \dot{q}</math></p> <p>c) <math display="block">F_1 = -b_0 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} } + b_2 \dot{q}</math></p>	
6	<p style="text-align: center;">干摩擦(2和4的各一部分)</p> <p><math display="block">F_1 = b_0 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} } - b_1 \dot{q} + b_3 \dot{q}^3</math></p>	

注:  $b, b_0, \dots, b_3$  为正的常数

以才能将两个变量  $q$  和  $\dot{q}$  的函数变成一个变量  $q$  的函数。但在变换之后合力为  $q$  的多值函数, 而原势力函数则是  $q$  的单值函数 (见表 1 和表 2)。

对于具有线性恢复力的耗散系统 (见下图的 a), 其合力特性示于图 b); 滞后回线的面积等于阻尼在一个周期中所作的功。在非线性的恢复力的情况下, 滞后回线的骨干曲线为曲线而不是直线 (图 c)。当振幅一定, 而只改变振动频率时, 则回线的骨干曲线不变, 然而回线分支之间的距离和回线所包





围的面积是变化的，其变化规律和阻尼特性有关；但库仑摩擦和材料的内摩擦情况除外，此时改变频率，滞后回线不变（图 d）。

### 3. 混合型非线性力

如果一种力不能表示成只和广义坐标有关，或只和广义速度有关，则这种力称为混合型的力，此时它和广义坐标和广义速度两个变量有关。对一个自由度系统来说，以  $q$ 、 $\dot{q}$  和  $F(q, \dot{q})$  空间中的表面来表示混合型力的特性，取  $F$  的符号和广义力的符号相反。

有时混合型的力可表示成两个函数的积，其中一个函数只与广义坐标有关，另一个函数则只与广义速度有关。对一个自由度系统可用函数  $F = F_0(q)F_1(\dot{q})$  表示这种力的特性。这样的