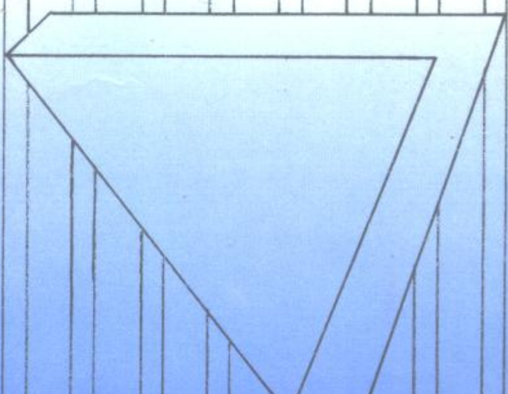
H·Brian Griffiths　Adrian Oldknow 著

萧　礼　张志军　编译

模型数学

——连续动力系统和离散动力系统



科学出版社

模 型 数 学

——连续动力系统和离散动力系统

H. Brian Griffiths　　Adrian Oldknow 著

萧 礼　　张志军　编译

科 学 出 版 社

1 9 9 6

内 容 简 介

本书系统地介绍了动力系统的数学理论和方法. 内容包括对群体生长及力学中若干古典线性模型的数学分析；动力系统研究的几何方法；非线性微分方程研究的 Poincaré 观点；浑沌现象；突变论初步.

本书特点在于利用计算机和几何方法探讨动力系统，以增强直感和可视性；通过线性模型和非线性模型的对比，深入展开对非线性数学的讨论；此外，本书还配置大量练习题作为对正文内容的补充和延伸.

本书可供大专院校师生、工程技术人员和科研人员阅读，也可作建模参考书.

H. Brian Griffiths and Adrian Oldknow

MATHEMATICS OF MODELS

Continuous and Discrete Dynamical Systems

ELLIS HORWOOD LIMITED 1993

模型数学

——连续动力系统和离散动力系统

H. Brian Griffiths　Adrian Oldknow 著

萧　礼　张志军 编译

责任编辑　林　鹏

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1996 年 3 月第　一　版　　开本:850×1168　1/32

1996 年 3 月第一次印刷　　印张:8 ½

印数:1—1 500　　字数:218 000

ISBN 7-03-005358-3/O · 859

定价:16.00 元

编译者序

自然科学的发展史表明，任何学科研究都经历着从定性到定量研究的过渡和飞跃。只有该学科的理论飞跃是不介入实验的，才是这门科学趋于成熟的表现。要作到这一点，数学科学是个有力的杠杆。似乎可以这样说，在现代科学技术十大部门* 中绝大多数部门的素养和训练中，数学理论是个终极的目标。这是由于在各个部门有关现象结论性的场合，只有用准确的数学语言才能描述清楚。

在数学科学发展到即将跨进 21 世纪的今天，应该教给大学生什么样的数学，数学科学的哲学和方法论、数学科学研究的思维方式如何，以及数学科学研究的工具和手段是怎么样的等等，这一系列问题已经尖锐地摆在大学数学教育工作者面前。我们以为大家已经形成的共识是，讲授数学知识不能仅仅局限于伴随牛顿力学产生和发展起来并于一百年来已经形成的经典理论，而是不仅教给学生数学基础知识，还要教给学生应用数学的技能，特别是数学建模和计算机摸拟的本领；数学科学研究的思维方式在提倡抽象思维的同时还要强调形象思维或直感思维，使用几何方法，形象化的描述及计算机图示，因为图形对想象力和创造力是强有力的刺激因素；数学研究的工具和手段不再只是一张纸和一支笔，要把计算机及其技术作为不可缺少的工具和手段，使大学生学习计算机同数学科学的学习与研究紧密结合，不但会用计算机，而且能理解计算机给出的答案。

这样一来，大学数学教科书的编写必然面临一场革命。H. B. Griffiths 教授和 A. Oldknow 教授（Chichester Institute）所著“Mathematics of Models：Continuous and Discrete Dynamical Sys-

* 关于现代科学技术有十大部门的提法，引自钱学森教授 1989 年 8 月在中国数学会教育与科研座谈会上的讲话《发展我国的数学科学》。他指的是自然科学、社会科学、数学科学、思维科学、系统科学、人体科学、军事科学、文艺理论、行为科学、地理科学。

tems"(1993),根据他们长期从事大学数学教学实践所形成的见解,在批判地继承长期存在于英国数学教学中的大学传统(university tradition)的同时,创造了所谓教师教育传统(teacher-education tradition)的教学观念和方法。这本书就是体现这一观念和方法的典型。其基本观点对我们确认上述共识有积极的参考价值,这正是我们编译这本书的基本出发点。

原著内容新颖,处理方法具学科教育特色。它引进计算机手段探讨离散动力系统,并对连续模型进行离散逼近;突出几何研究方法和计算机图示,以增强直感和可视性;通过线性模型和非线性模型的对比,引入和展开非线性数学方法,使读者对所述模型有更深入的数学理解,为他们设计更强有力的模型打下基础。此外,原著安排了大量练习题作为正文的补充和延伸,为培养数学科学研究能力提供广阔的视野。原著由两部分组成:第一部分为 1—11 章,是读者学习动力系统的主要材料;第二部分为 A—F 章,是作为理论支撑的数学知识。

编译本根据我国大学生数学基础实际,在尽力保持上述特色的原则下,对原著第二部分作了必要的删节,使其同第一部分融为一体。编译本共由六章组成,缩短了篇幅,突出了原著内容的三个主干:主干Ⅰ(第一、二章)涉及出现在群体生长及力学研究中的若干简单模型;主干Ⅱ(第三章)凭借几何学和平面曲线的描摹开发深层次的数学观念和工具;主干Ⅲ(第四、五、六章)研究更具复杂性的模型。

由于编译者学识和经验有限,疏漏和错误在所难免,恳切希望读者批评指教。

本书由王明亮教授审校,计算机程序由李喜平同志核验,在此一并致谢。

原著版权转让由英国 Chichester Institute 提供资助。

编译者　1995 年 7 月。

目　　录

第一章　离散动力系统

本章从考察一些以单变元随时间而变的简单而又重要的模型(动力系统)入手,这些模型如人口总数或银行帐户上的钱数.而后研究如野生系统中的扑食——食饵总数那样以耦合方式变化的两个变元的模型.称动力系统是离散的,即它是按离散时间变化的.离散时间由非连续统的有序点列组成,通俗地说,变化是按不同的时间间隔如年、月或日有规律的发生的.离散动力系统通常用便于通过计算机模拟的差分方程(组)来描述.

1.1　Malthus 模型

1798 年英国教士 T. J. Malthus 发表了“人口论”.在该文中他构造了人口总数的数学模型.

1.1.1　模型

Malthus 的模型是:令 $P(n)$ 表示某人口群体在时间段 n 开始时的总数,若按年计算,设初始年为 0,令增量

$$\Delta P(n) = P(n+1) - P(n)$$

Malthus 提出

$$\Delta P(n) = bP(n) \tag{1.1.1}$$

其中 b 表示出生率与死亡率之差.于是

$$P(n+1) = P(n) + \Delta P(n) = P(n) + bP(n) = kP(n)$$

其中 $k=1+b$.用迭代法求解该差分方程,得

$$\begin{aligned} P(n+1) &= kP(n) = k(kP(n-1)) = k^2P(n-1) \\ &= \cdots\cdots = k^{n+1}P(0) \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

例如,若 $b=0.1$,$P(0)=100$,由下表可知:该群体的人口在 8 年内翻一番.

表 1.1.1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(n)$	100	110	121	133.1	146.4	161.1	177.2	194.9	214.4
$\Delta P(n)$	10	11	12.1	13.3	14.7	16.1	17.7	19.5	

所以，当 $b>0$ 时，$k>1$，于是 k^n 随 n 无限增大，就象 Malthus 所说的，$P(n)$“几何地”增大. 另一方面，他认为在第 n 年可提供的食物数量 $F(n)$ 只能通过在少量土地上扩大耕作而增加，充其量

$$F(n+1) = F(n) + c \tag{1.1.3}$$

其中 c 是常数. 如此

$$F(n+1) = F(0) + (n+1)c$$

从而 $F(n)$“算术地”增加. 图 1.1.1 表明，虽然 $F(n)$ 也随 n 的增加而无限增大，但它比 $P(n)$ 慢得多，且在某一时间 $P(n)$ 必然超过 $F(n)$.

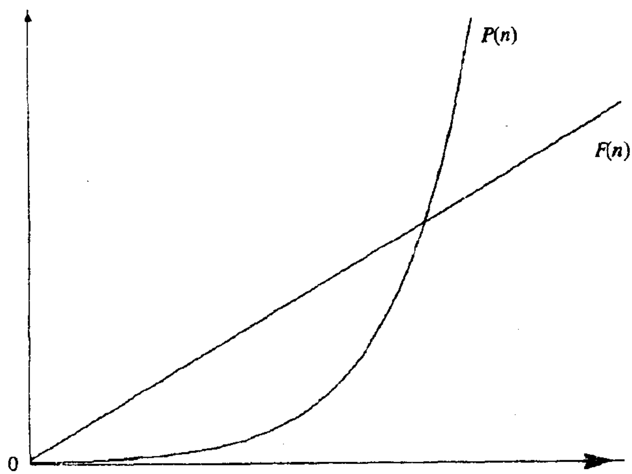


图 1.1.1

Malthus 模型的局限性在于，其人口增长模型对于象酵母菌

那样在实验室内限定时间段观察的早期微生物总数而言，大体上是正确的. 其食物生产增长模型(1.1.3)是基于当时可利用的土地的概况，当生产条件改变时，会使该模型失效.

1.1.2 应用与计算机程序

储蓄问题 一个真正服从 Malthus 法则的总数，是银行帐户上的钱数.

设 $P(0)$ 是本金，b 是利率(通常用百分数 $i\%$ 表示)，令 $P(n)$ 为第 n 年开始时帐单上钱的总数，则

$$P(n+1) = P(n) + bP(n) = kP(n)$$

用 True BASIC 语言在计算机上编该模型的程序时，如果要想提供所有 $P(0)$，$P(1)$，…，$P(n+1)$ 的值，最好利用数组(array). 在其它情形，最好直接计算 $\Delta P(n)$，用变量 deltaP 储存它.

程序 1.1.1

```
REM   Program 1.1.1a,Malthus
OPTION   BASE   0
DIM   P(50)
LET   P(0)=100
LET   b=0.1
LET   k=1+b
FOR   n=0   TO   20
    PRINT   n,P(n)
    LET   P(n+1)=k*P(n)
NEXT   n
END
```

```
REM   Program 1.1.1b,Malthus
LET   P=100
LET   b=0.1
```

```
FOR   n=0   TO   20
    PRINT   n,P
    LET   deltaP=b*P
    LET   P=P+deltaP
NEXT   n
END
```

程序 1.1.1a,b 容易改编成绘图程序 1.1.1c

```
REM   Program 1.1.1c,Malthus graph
SET   MODE "graphics"
SET   WINDOW   0,20,0,1000
LET   P=100
LET   b=0.1
FOR   n=0   TO   20
    PLOT   n,P
    LET   deltaP=b*P
    LET   P=P+deltaP
NEXT   n
END
```

(注意,该程序的输出是一个离散点集).

借款问题 设 $P(0)$是借款,在每个固定的时间段(如每年或每月)的末尾得偿还的固定金额为 R(如把房子作为抵押),那么 $P(n+1)$就是第 $n+1$ 时间段开始时欠款的总数,它等于 $P(n)$加上利息减去偿还,即

$$P(n+1) = kP(n) - R$$

该式当 $R=0$ 时化为基本方程(1.1.2),而当 $b=0$ 时化为(1.1.3),其增量表达式为

$$\Delta P(n) = bP(n) - R \tag{1.1.4}$$

可见，当 $P(n)>\frac{R}{b}$ 时欠款增长，$P(n)<\frac{R}{b}$ 时欠款减少，若对某 m，有 $P(m)=\frac{R}{b}$，则 $P(n)\equiv\frac{R}{b}$.

例如，贷款额 $P(0)=50000$，月利率 $b=1\%$，按月计息，由(1.1.4)，要想还清贷款必须 $R>500$. 不妨取 $R=750$，那么在每年末的欠款 $P(n)$ 按最接近的整数计，便有下表：

表 1.1.2

n	12	24	36	48	60	72	84	96	108
$P(n)$	46829	43257	39230	34694	29583	23823	17332	10018	1777

由此可知，该贷款在 9 年内还清.

若还款是波动的（如借方时运的改善），即 $R=R(n)$，便有

$$P(n+1)=kP(n)-R(n) \tag{1.1.5}$$

为一阶线性差分方程，用迭代法求解，得

$$P(n+1)=k^{n+1}P(0)-\sum_{r=0}^{n}k^{r}R(n-r) \tag{1.1.6}$$

特别，取 $R(n-r)\equiv R$，得(1.1.4)的解

$$\begin{aligned}P(n+1)&=k^{n+1}P(0)-R\sum_{r=0}^{n}k^{r}=k^{n+1}P(0)-R\frac{k^{n+1}-1}{k-1}\\&=k^{n+1}P(0)-(k^{n+1}-1)\frac{R}{b}\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

即

$$P(n+1)=\frac{R}{b}-k^{n+1}\left(\frac{R}{b}-P(0)\right) \tag{1.1.8}$$

这再次说明，若 $P(0)=\frac{R}{b}$，则欠款保持 $\frac{R}{b}$. 否则，便由 $bP(0)>R$ 或 $bP(0)<R$，欠款将不断增加或不断减少.

若 $R>bP(0)$，令 $P(n+1)=0$，由(1.1.8)通过解 n 便可求得还清一笔抵押贷款所需的时间. 如对上述数值例子，有

$$0=\frac{750}{0.01}-1.01^{n+1}\left(\frac{750}{0.01}-50000\right)$$

解得 $n+1=110.41$.

关于抵押贷款的计算机程序，通过修改程序 1.1.1a 或 1.1.1b，即用测试 UNTIL 循环或 WHILE 循环结构代替计数 FOR…NEXT 循环结构而得. 例如

程序 1.1.2

```
REM  Program 1.1.2a,Mortgage
OPTION  BASE  0
DIM  P(100)
READ  P(0),R,b
DATA  100,20,0.1
LET  k=1+b
LET  n=0
DO
    PRINT  n,P(n)
    LET  P(n+1)=k*P(n)-R
    LET  n=n+1
LOOP  UNTIL  P(n)<0
END

REM  Program 1.1.2b,Mortgage
READ  P,R,b
DATA  100,20,0.1
LET  n=0
DO  WHILE  P>=0
    PRINT  n,P
    LET  deltaP=b*P-R
    LET  P=P+deltaP
    LET  n=n+1
LOOP
END
```

练习 1.1.1

1. 依照下列利率：1%，2%，5%，7%，9%，13%按年结算利息，使一笔存款达到本金的两倍，分别计算所用的时间(取三位小数).

2. 分别以 r 和 $2r$ 计息，钱数在 n 年、m 年翻一番，$\frac{2}{m}$是多少？是小于 2 还是大于 2？(剑桥大学 B. A 1807.)

3. 证明 Malthus 模型中，$P(0)$翻一番所花的时间 τ 是$\frac{\ln 2}{\ln k}$. 在 1990 年，世界人口至少是 50 亿，用 Malthus 模型，假设 k 取 1.05，1.03 和 1.01，试估计 2000 年的人口总数.

4. 如果平均寿命是 d 岁，在总数为 P 的人口群体中假定每年的死亡率约为$\frac{P}{d}$. 在中国，P 和 d 分别约为 10 亿和 65 岁，而每天约有 4 万个婴儿出生，试估计相应的 k.(1992 年经世界卫生组织计算，全世界每天约有 91 万胎儿降生.)

5. 解方程　$x(n+1)=kx(n)+n$.

6. 如果在“抵押”方程中，每次还款数是常数，求以价值 c 元的房子为抵押还清一笔贷款所用年限的公式，设利率为常数 r. 如果 r 变为 $r+\delta r$，公式如何变化？

7. 若某人的月薪是 s，那么按年增长 r%好呢？还是按月增加$\frac{r}{12}$%好？如果货币按 c%贬值，那么这些增长的价值是什么？

8. 设 T 是还清一笔初始贷款为 P 的抵押贷款所用的时间，利率为 b，固定的正常还款数为 R，用计算机研究

(a) 对固定的 P 和 b，T 如何随 R 变化；

(b) 对固定的 P 和 T，R 如何随 b 变化，以及其它类似的关系.

9. 一笔金额为 L 的贷款，每年按金额为 R 分期付款，如果年利率是 r%，证明在 n 年后所欠的总数为 $L(n)$，其中 $L(n+1)=L(n)(1+\frac{r}{100})-R$；并证明，假设 $L<100\frac{R}{r}$，则每次还款都会使