

三角级数论

(下 册)

陈 建 功 著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是作者三十多年来为国内外研究生讲授三角级数论所用讲义几经修改补充整理而成。全书分上下两册，上册早在1964年出版。下册在1966年5月完稿，因受“四人帮”的干扰而稽延迄今才出版。

下册共四章：第五章至第八章。第五章富理埃级数的发散，阐述了富理埃级数和它的共轭级数、更序级数的发散问题。第六章富理埃系数，阐述了富理埃系数的性质、条件、估计等问题。第七章三角多项式的逼近论，阐述了三角多项式的逼近问题，讨论了几种逼近法和它们的偏差估计。第八章一般的三角级数，介绍黎曼的理论及以后的发展。书中包含了国内外迄至六十年代为止的一些重要成果。

本书可供高等学校数学系高年级学生，研究生，科研工作者阅读。

三 角 级 数 论

(下 册)

陈 建 功 著

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 13.25 字数 365,400

1979年8月第1版 1979年8月第1次印刷

印数 1—45,000

书号: 13119·747 定价: 1.50 元

目 录

第五章 富理埃级数的发散	1
1. 法都的问题	1
2. 富理埃级数的无界概散和有界概散	16
3. 函数的平均连续性与级数的概散	26
4. 相互共轭的两个三角级数可能都成概散的富理埃级数	30
5. 富理埃级数的概散点集可以为任意的 G_0 集	34
6. L^2 中的富理埃级数的更序级数可以概散	39
7. 瓦伊耳因子	45
8. 函数族 $L^p(0, 2\pi)$ 中有 F , 它的富理埃级数具有概散的更序级数	56
9. 连续函数的富理埃级数的发散点集	63
10. 从函数 $f(x) \in L(0, 2\pi)$ 产生的几个特殊积分	68
11. 部分和趋向于无穷大的问题	75
12. 三角函数系的更序	82
第六章 富理埃系数	95
1. 连续函数的富理埃系数	95
2. 收敛于零的数列如何成为富理埃系数	105
3. 级数 $\sum n^{\gamma-2} \Phi(na_n)$ ($\Phi(t) \uparrow$) 的收敛与函数 $x^{-\gamma} \Phi\left(\left \sum a_n \frac{\cos nx}{\sin nx}\right \right)$ 的可积	119
4. 能使 $\int S_n(x) dx = O(1)$ 的三角级数	127
5. 积分平均的李普希兹函数族	136
6. 系数的变动与函数的变质	156
7. 系数的准确估计及其应用	171
8. 几种具有特殊系数的三角级数及其应用	186

2 目 录

第七章 三角多项式的逼近论	207
1. 周期连续函数的逼近问题	207
2. $L_p(0, 2\pi)$ 中的函数	222
3. $L_p(0, 2\pi)$ 中的幂级数与其相关联的正值函数	238
4. 偏差落在光滑模区间中的线性逼近	253
5. 几种古典求和法与最佳逼近	262
6. 适合 $\int_0^{2\pi} \varphi(t)dt=0$ 的 $\varphi(t)$ 所产生的瓦伊耳函数	271
7. 用线性求和法求富里埃级数的和	302
8. 插值逼近法	320
第八章 一般的三角级数	349
1. 黎曼的理论及有关事项	349
2. 三角级数的 M 集和 U 集	360
3. 点集 E 与正数 θ 的乘积 E_θ	366
4. 特殊 M 点集以及特殊三角级数的 U 集	370
5. 用三角级数概表可测函数	379
6. 正测度点集上取 $\pm\infty$ 的可测函数	392
7. 从三角级数的部分和子列 $\{S_{n_k}(x)\}$ 可以概括到全列 $\{S_n(x)\}$ 的性质	398
8. 周期函数级数	404
索 引	417

第五章

富理埃级数的发散

1. 法都的问题

法都(P. Fatou)在他的“三角级数与泰勒级数”(Acta M., 30, 1930)的名著中, 提出如下的问题: 存在幂级数 $\sum a_n z^n$ 在圆周 $|z|=1$ 上到处发散而满足条件 $a_n = o(1)$ 的吗?

卢金(Лужин)于1911年, 在意大利的杂志(R. C. Palermo)上, 给法都的问题以肯定的回答.

卢金的幂级数 $\sum a_n z^n$ $a_n = o(1)$ 而 $\sum a_n z^n$ 在 $|z|=1$ 上处处发散.

置 $z = e^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), $S_n(z) = 1 + z + \cdots + z^n$, 则

$$|S_n(z)| = \left| \frac{\sin(n+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right|.$$

当 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\frac{2}{\pi} \leq \left| \frac{\sin \theta}{\theta} \right| \leq 1.$$

因此, 在区间

$$-\frac{\pi}{n+1} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n+1}$$

上,

$$\left| \frac{\sin(n+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \right| = (n+1) \left| \frac{\sin(n+1)\frac{\varphi}{2}}{(n+1)\frac{\varphi}{2}} \right| \left| \frac{\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \right|$$

$$\geq \frac{2}{\pi}(n+1).$$

以 $n+1$ 个分点

$$\varphi_\nu = e^{i\frac{2\nu\pi}{n+1}} \quad (\nu=0, 1, \dots, n)$$

将单位圆周等分成 $n+1$ 个圆弧. 当

$$\frac{\pi}{n+1}(2\nu-1) \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n+1}(2\nu+1)$$

时, 我们见到 $|S_n(e^{-i\frac{2\nu\pi}{n+1}}z)| \geq \frac{2}{\pi}(n+1)$. 作多项式

$$H_{(n)}(z) = S_n(z) + z^{n+1}S_n(z/\varphi_1) + z^{2(n+1)}S_n(z/\varphi_2) + \dots$$

$$+ z^{n(n+1)}S_n(z/\varphi_n),$$

$H_{(n)}(z)$ 的次数是 $\psi(n) = n(n+2)$, 每项系数的模都等于 1. 置

$$\lambda_1 = \psi(0) + 1 = 1^2,$$

$$\lambda_2 = \psi(0) + \psi(1) + 2 = 1^2 + 2^2,$$

$$\lambda_3 = \psi(0) + \psi(1) + \psi(2) + 3 = 1^2 + 2^2 + 3^2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\lambda_n = \psi(0) + \dots + \psi(n-1) + n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2,$$

$$\dots\dots\dots$$

那末 $z^{\lambda_n}H_{(n)}(z)$ 的最低次项的次数 λ_n 大于 $z^{\lambda_{n-1}}H_{(n-1)}(z)$ 的最高次项的次数 $\lambda_{n-1} + \psi(n-1) = \lambda_n - 1$. 由是

$$H_{(0)}(z) + \frac{1}{\sqrt{1}} z^{\lambda_1} H_{(1)}(z) + \frac{1}{\sqrt{2}} z^{\lambda_2} H_{(2)}(z) + \dots$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n}} z^{\lambda_n} H_{(n)}(z) + \dots$$

成一 z 的幂级数 $\sum \alpha_n z^n$, $\alpha_n = o(1)$.

对于单位圆周上的一点 ξ , 前述 $n+1$ 个圆弧 $(\varphi_0, \varphi_1), \dots, (\varphi_n, \varphi_0)$ 中必有一个圆弧含有 ξ . 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \xi^{\lambda_n + \nu(n+1)} H_{(n)} \right| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2}{\pi} (n+1) \right| = \infty,$$

所以 $\sum \alpha_n \xi^n$ 发散. 从而 $\sum \alpha_n z^n$ 在 $|z|=1$ 上到处发散.

置 $a_n = a_n + ib_n$, 则 $\sum \alpha_n z^n$ 的实部和虚部 ($z = e^{i\varphi}$ 的话) 分别是

$$\sum_0^\infty (a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi), \quad \sum_0^\infty (a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi).$$

两者之中, 必有一个级数, 它的发散点集的测度 ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) 不小于 π 的. 但是我们可以证明, 第一个三角级数几乎处处发散. 从等式

$$\begin{aligned} S_n(e^{i\varphi}) &= \frac{1}{2} \left\{ (1 - \cos(n+1)\varphi) + \frac{\sin \varphi \sin(n+1)\varphi}{1 - \cos \varphi} \right\} \\ &\quad + \frac{i}{2} \left\{ -\sin(n+1)\varphi + \frac{\sin \varphi [1 - \cos(n+1)\varphi]}{1 - \cos \varphi} \right\}, \end{aligned}$$

得到 $\frac{1}{\sqrt{n}} z^{\lambda_n + \nu(n+1)} S_n(z/\varphi_n)$ 的实部等于

$$\frac{O}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \left[\left(\theta + \frac{2\pi}{n+1} \right) \mu_n + (n+1) \frac{\theta}{2} \right],$$

这里 $|O| < 2$, $\mu_n = \lambda_n + \nu(n+1)$, $\theta = \varphi - \frac{2\nu\pi}{n+1}$. 当

$$(\nu)_1 \quad \frac{\pi}{n+1} (2\nu-1) \leq \varphi < \frac{\pi}{n+1} (2\nu+1)$$

时, $|\theta| \leq \frac{\pi}{n+1}$. 因此

$$\begin{aligned} &\left| \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} z^{\lambda_n + \nu(n+1)} S_n(z/\varphi_n) \right) - \frac{O}{\sqrt{n}} \right| \\ &> \frac{\sqrt{n}}{4} \left| \cos \left[\left(\theta + \frac{2\pi}{n+1} \right) \mu_n + \frac{1}{2} (n+1) \theta \right] \right| \\ &= \frac{\sqrt{n}}{4} \left| \cos \pi x \left[\nu + \left(\frac{\lambda_n}{n+1} + \frac{1}{2} \right) \right] \right|, \end{aligned}$$

这里 $\theta = \frac{\pi}{n+1} x$, 从而 $-1 \leq x \leq 1$. 在区间 $-1 \leq x \leq 1$ 上, 适合

$$\left| \cos \pi x \left(\nu + \frac{\lambda_n}{n+1} + \frac{1}{2} \right) \right| \leq \sin \frac{1}{\log n}$$

的 x 所成之点集的测度是小于 $4 \cdot \frac{1}{\log n}$ 的. 因此在区间 $(\nu)_1$ 上, 相应的点集的测度小于 $\frac{16}{n+1} \cdot \frac{1}{\log n}$ ($\nu=0, 1, \dots, n$); 在整个圆周 $|z|=1$ 上, 具有上述性质的点集, 其测度小于 $\frac{16}{\log n}$. 这就是说, 圆周 $|z|=1$ 上, 除开一个测度小于 $16/\log n$ 的点集, 在其他的点 z , 成立着如下的不等式:

$$(\nu)_2 \quad \left| \operatorname{Re}(\dots) - \frac{C}{\sqrt{n}} \right| > \frac{\sqrt{n}}{4} \sin \frac{1}{\log n} \sim \frac{1}{4} \frac{\sqrt{n}}{\log n}$$

(对于 n , 有一个 ν , $\nu=0, 1, \dots, n$). 因此 $\sum (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta)$ 几乎处处发散. 事实上, 假如这个实部级数的收敛点集 $E \subset (0, 2\pi)$ 具有正的测度 $|E|$, 那末取 N 满足 $\frac{16}{\log N} < |E|$, 当 $n > N$ 时, 由不等式 $(\nu)_2$, $|E| < \frac{16}{\log n}$. 这是与 $n > N$ 相冲突的. 由是 $|E|=0$. 我们可述如下的定理——卢金的定理:

定理 1 存在系数为 $o(1)$ 的几乎到处发散的三角级数.

那末存在几乎到处发散的富理埃级数吗? 1923 年, 柯尔莫哥洛夫 (А. Н. Колмогоров) 在数学基础 (Fund. Math., 4) 上给此问题以肯定的回答.

定理 2 存在到处发散的 (勒贝格) 富理埃级数.

【证明】 对应于所要富理埃级数 $\mathcal{C}[f]$ 的 $f(\theta)$, 是利用费耶核

$$K_n(\theta) = \frac{1}{2n+2} \left[\frac{\sin(n+1)\theta/2}{\sin \theta/2} \right]^2$$

作成的. 对于 n , 选取适当的 $m_0 < m_1 < \dots < m_n$. 置 $\theta_\nu = \frac{2\nu\pi}{2n+1}$, 作

$$\psi(\theta) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n K_{m_\nu}(\theta - \theta_{2\nu}).$$

当 $m_j \leq k < m_{j+1}$ 时, $\mathcal{C}[\psi]$ 的第 k 部分和 $S_k(\psi, \theta)$ 是

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^j K_{m_\nu}(\theta - \theta_{2\nu}) \\
& + \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=j+1}^n \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^k \frac{m_\nu - k + l + 1}{m_\nu + 1} \cos l(\theta - \theta_{2\nu}) \right\} \\
& = \frac{1}{n+1} \left\{ \sum_{\nu=0}^j K_{m_\nu}(\theta - \theta_{2\nu}) + \sum_{\nu=j+1}^n \left[\frac{m_\nu - k}{2m_\nu + 2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{k+1}{m_\nu + 1} K_k(\theta - \theta_{2\nu}) + \sum_{l=1}^k \frac{m_\nu - k}{m_\nu + 1} \cos l(\theta - \theta_{2\nu}) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

方括号[...]中第一和第三两项之和等于 $\frac{m_\nu - k}{m_\nu + 1} D_k(\theta - \theta_{2\nu})$, 第二项是正的; 因此, 当 $m_j \leq k < m_{j+1}$ 时,

$$S_k(\psi, \theta) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=j+1}^n \frac{m_\nu - k}{m_\nu + 1} D_k(\theta - \theta_{2\nu}).$$

假如 $2k+1$ 是 $2n+1$ 的整数倍, 那末

$$\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)(\theta_{2\nu} - \theta) = -\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta.$$

从而在 $2k+1$ 是 $2n+1$ 的整数倍, $m_j \leq k < m_{j+1}$ 的条件下,

$$S_k(\psi, \theta) \geq -\frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta}{n+1} \sum_{\nu=j+1}^n \frac{m_\nu - k}{m_\nu + 1} \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}(\theta_{2\nu} - \theta)}.$$

取正数 δ 足够小, 作区间 $I_\nu = (\theta_\nu + \delta, \theta_{\nu+1} - \delta)$. 我们需要如下的

引理 设 $m_0, m_1, \dots, m_n$ 是足够大的整数 ($m_\nu < m_{\nu+1}$). 对于

$$\theta \in I_{2j} + I_{2j+1},$$

有整数 $k = k(\theta)$ 适合于

$$\frac{2k+1}{2n+1} = \text{整数}, \quad m_j \leq k < \frac{1}{2} m_{j+1}, \quad -\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta \geq \frac{1}{2}.$$

应用引理, 我们得到

$$\begin{aligned}
S_k(\psi, \theta) & \geq \frac{1}{2n+2} \sum_{\nu=j+1}^n \frac{1}{2(\theta_{2\nu} - \theta)} \\
& \geq \frac{1}{4n+4} \sum_{\nu=j+1}^n \frac{(2n+1)/2\pi}{2\nu+2 - (2j+2)} \\
& = \frac{2n+1}{16\pi(n+1)} \sum_{\nu=j+1}^n \frac{1}{\nu-j} > C_1 \log(n-j) > C_2 \log n,
\end{aligned}$$

$j \leq n - \sqrt{n}$ 的话, $C_1, C_2, \dots$ 都是绝对常数.

取 m_0 很大, 当 $\theta \in (\theta_\nu - \delta, \theta_\nu + \delta)$ 时, 可使

$$\phi(\theta) = K_{m_0}((2n+1)\theta) \geq n \quad (\nu=0, 1, \dots, 2n).$$

置 $f_n(\theta) = \phi(\theta) + \psi(\theta)$, 那末, 当 $\theta \in I_{2j} + I_{2j+1}$, $0 \leq j \leq n - \sqrt{n}$ 时,

$$S_k(f_n, \theta) = S_k(\phi, \theta) + S_k(\psi, \theta) = \phi(\theta) + S_k(\psi, \theta) \geq C_3 \log n.$$

现在于区间 $J_\nu = (\theta_\nu - \delta, \theta_\nu + \delta)$ ($\nu=0, 1, \dots, 2n$) 上, 估计 $S_k(f_n, \theta)$. 我们将证

$$S_{m_0}(f_n, \theta) \geq \frac{1}{2} n \quad (\theta \in (\theta_\nu - \delta, \theta_\nu + \delta)).$$

事实上, 由于 $S_{m_0}(f_n, \theta) \geq n + S_{m_0}(\psi, \theta)$, 所以只要证明末项 $> -C_4 \log n$ 就好了. 首先假设 $\theta \in (\theta_{2h} - \delta, \theta_{2h} + \delta)$, $k = m_0$, 那末从上面已得的结果,

$$S_{m_0}(f_n, \theta) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n \frac{m_\nu - m_0}{m_\nu + 1} D_{m_0}(\theta - \theta_{2\nu}).$$

由于 $D_{m_0}(\theta - \theta_{2h}) > 0$, 所以当 $\theta_{2h} - \delta \leq \theta \leq \theta_{2h} + \delta$ 时,

$$\begin{aligned} S_{m_0}(f_n, \theta) &\geq -\frac{1}{n+1} \sum_{\nu \neq h} \frac{m_\nu - m_0}{m_\nu + 1} D_{m_0}(\theta - \theta_{2\nu}) \\ &\geq -\frac{1}{n+1} \sum_{\nu \neq h} \frac{2n+1}{4\pi|h-\nu|} > -C_5 \log n. \end{aligned}$$

当 $\theta_{2h+1} - \delta \leq \theta \leq \theta_{2h+1} + \delta$ 时, 我们仍能得到

$$S_{m_0}(\psi, \theta) > -C_6 \log n, \quad S_{m_0}(f_n, \theta) > \frac{1}{2} n.$$

由是, 对于 $[0, 4\pi(n - \sqrt{n})/(2n+1)]$ 中的任一 θ , 存在一个 k , $k > n$,

$$S_k(f_n, \theta) > C \log n \quad (n > n_1).$$

这样, 我们得到数列 $f_n(\theta)$, ($n=1, 2, \dots$), 它具有下述种种性质:

$$(i) \quad f_n = \psi + \varphi \geq 0, \quad \int_0^{2\pi} f_n(\theta) d\theta = 2\pi.$$

(ii) 点集 $\sum_{j=0}^N (I_{2j} + I_{2j+1} + I_j)$ ($N = [n - \sqrt{n}]$) 含有 $E_n = [0, \frac{4\pi N}{2n+1}]$. 置 $\lambda_n = m_0$, $\nu_n = m_N$; 当 $\theta \in E_n$ 时, 有 k 适合于 $\lambda_n \leq k < \nu_n$ 以及

$$S_k(f_n, \theta) > C \log n \quad (C > 0).$$

取 λ_{n+1} 足够大, 使 $\lambda_{n+1} > \nu_n (n=1, 2, \dots)$. 当 $n_\mu > \exp(\mu^4)$ 时, 级数

$$\sum (\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}}$$

收敛; 从而函数

$$f(\theta) = \sum_{\mu=1}^{\infty} f_{n_\mu}(\theta) (\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}}$$

具有处处发散的富理埃级数. 事实上, 由于 $f_{n_\mu}(\theta) \geq 0$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta &= \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f_{n_\mu}(\theta) (\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ &= 2\pi \sum_{\mu=1}^{\infty} (\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

因此 $f(\theta)$ 具有富理埃级数 $\in [f]$.

现在证明 $\in [f]$ 处处发散. 设

$$\theta \in E_{n_M}, u = \sum_{\mu=1}^{M-1} f_{n_\mu} \cdot (\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}},$$

$$v = f_{n_M} \cdot (\log n_M)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f = u + v + w.$$

存在如下的 $k = k(\theta)$: $\lambda_{n_M} \leq k < \nu_{n_M}$. 由是, 假设 $n_\mu > n_{M-1}^4$,

$$S_k(u, \theta) = u \geq 0,$$

$$S_k(v, \theta) = S_k(f_{n_M} (\log n_M)^{-\frac{1}{2}}, \theta) > C (\log n_M)^{\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned} |S_k(w, \theta)| &\leq \frac{2k+1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\mu=M+1}^{\infty} \frac{f_{n_\mu}(t)}{(\log n_\mu)^{\frac{1}{2}}} \right| dt \\ &= (4k+2) \sum_{\mu=M+1}^{\infty} (\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq (4k+2) (\log n_{M+1})^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) \\ &= (8k+4) (\log n_{M+1})^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

我们又不妨假设 $(\log n_\mu)^{\frac{1}{2}} > \nu_{n_{\mu-1}}$, 因此

$$(8k+4) (\log n_{M+1})^{-\frac{1}{2}} < (8k+4) \nu_{n_M}^{-1} < 16.$$

从而

$$S_k(f, \theta) = S_k(u, \theta) + S_k(v, \theta) + S_k(w, \theta) > C \log(n_M)^{\frac{1}{2}} - 16.$$

由是可知 E_{n_k} 中一切点都是 $\odot[f]$ 的发散点; M 可以很大, E_M 的极限点集是 $[0, 2\pi]$, 所以 $\odot[f]$ 处处发散.

【引理的证明】 我们探求适合条件的 k . 置 $2k+1=\rho(2n+1)$, ρ 是奇数. 我们逐一决定 $m_0, m_1, \dots$. 设 $m_0, m_1, \dots, m_i$ 已经定好, $\theta \in I_{2i} + I_{2i+1}$. 置

$$\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)(\theta_{2i+2} - \theta) = \sin 2\pi\rho\alpha,$$

则

$$\begin{aligned}\alpha &= (2n+1)(\theta_{2i+2} - \theta)/4\pi, \\ \alpha &\in \left[\eta, \frac{1}{2} - \eta\right] + \left[\frac{1}{2} + \eta, 1 - \eta\right], \\ \eta &= \eta(\delta, n).\end{aligned}$$

设 ρ_0 是一奇数. 当 $\rho = \rho_0, \rho_0+2, \rho_0+4, \dots$ 时, $2\pi\rho\alpha$ 取值

$$2\pi\rho_0\alpha, 2\pi\rho_0+2\pi\alpha, 2\pi\rho_0+4\pi\alpha, \dots$$

相邻两角之差是 $2\pi\alpha$. 我们分为两个情况来处理:

$$(i) \quad 2\alpha \in \left[2\eta, \frac{1}{3}\right),$$

$$(ii) \quad 2\alpha \in \left[\frac{1}{3}, 1-2\eta\right].$$

由于 $2\alpha \in [2\eta, 1-2\eta] + [1+2\eta, 2-2\eta]$, 所以在 $[0, 2\pi]$ 上来说, 只要假设 (i) 和 (ii) 两种情况就行了. 假如 (i) 成立, 那末取最小的整数 ν 使 $\rho_0\alpha + 2a\nu$ 的分数部分 $\geq \frac{1}{3}$. 置 $\rho = \rho_0 + 2\nu$, 我们就得到 $\sin 2\pi\rho\alpha \geq \frac{1}{2}$.

假如 α 是一无理数, 那末 $s\alpha$ ($s=1, 3, 5, \dots$) 的分数部分

$$(s\alpha) = s\alpha - [s\alpha] \quad (s=1, 3, 5, \dots)$$

在区间中是稠密的^{*)}. 因此, 必有 $(s\alpha)$ 落入于 $\left(2\eta, \frac{1}{3}\right)$. 由 (i) 知有

^{*)} 这就是说, 当 $0 < a < b < 1$ 时, 区间 (a, b) 中必含有一个 $(s\alpha)$. 由连分数的理论, 假如 α 是一无理数, Q 是一正整数, 那末必有既约分数 $\frac{p}{q}$ 适合于 $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, $q > Q$. 从而 $(qx) < \frac{1}{q}$. $Q > \frac{1}{a}$ 的话, 必有整数 N 使 $(Nqx) \in (a, b)$. 置 $x = (s\alpha)$, $Nqs = s_0$, 则 $(s_0\alpha)$ 是在区间 (a, b) 中的.

奇数 p 适合于 $\sin 2\pi\rho\alpha \geq \frac{1}{2}$. 假如 α 是一既约分数 $\frac{p}{q}$, 那末当 q 是奇数时, $\rho_0 p, (\rho_0+2)p, (\rho_0+4)p, \dots, (\rho_0+2q-2)p$ 以 q 相除的余数是两两相异的. 换句话说, 余数是 $0, 1, 2, \dots, q-1$ 的一个排列. 当 $q \geq 3$ 时, $\frac{r}{q} (r=0, 1, \dots, q-1)$ 中必有一数落入 $[0, \frac{1}{3}]$ 中. 假如 q 是偶数, 那末 $\frac{q}{2}$ 个数

$$\rho_0 p, (\rho_0+2)p, (\rho_0+4)p, \dots, (\rho_0+q-2)p$$

关于 $\text{mod } q$ 是两两相异的, 以 q 除后的余数是 $1, 3, \dots, q-1$ 的一个排列. 由是

$$\frac{1}{q}, \frac{3}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}$$

是

$$\frac{\rho_0 p}{q}, \frac{(\rho_0+2)p}{q}, \dots, \frac{(\rho_0+q-2)p}{q}$$

的分数部分的一个排列. 由于

$$\frac{1}{2} \in \left(\eta, \frac{1}{2}-\eta\right) + \left(\frac{1}{2}+\eta, 1-\eta\right),$$

所以我们可说 $q=4, 6, 8, \dots$. 当 $q=4$ 时,

$$\frac{1}{4} \in \left(0, \frac{1}{3}\right);$$

当 $q=6$ 时,

$$\frac{1}{6} \in \left(0, \frac{1}{3}\right);$$

当 $q>6$ 时,

$$\frac{2}{q} < \frac{1}{3}.$$

总而言之, 即使在(ii)的情况, 也必有

$$(s\alpha) \in \left(0, \frac{1}{3}\right),$$

从而有奇数 p 适合于

$$\sin 2\pi\rho\alpha \geq \frac{1}{2}.$$

从 p 可以导出 k , 当 $m_j \leq k < m'_j$ 时, 我们可取 $m_{j+1} > 2m'_j$, 引理证毕, 定理 2 证明完毕.

内塞(L. Nider)于1921年在德国的数学年刊84上,证明:对于 $\alpha_n \rightarrow 0$, $\sum \alpha_n^2 = \infty$ 的正数数列 $\{\alpha_n\}$,存在 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = O(\alpha_n)$ 且使幂级数 $\sum c_n z^n$ 在 $|z|=1$ 上处处发散. 这个结果,可以写成如下的形式:

定理3 对于如下的数列 $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n > 0$, $\sum \alpha_n^2 = \infty$, 必有处处发散的一对共轭三角级数,其系数适合于 $a_n = O(\alpha_n)$, $b_n = O(\alpha_n)$.

这里引入斯捷切金(С. В. Стечкин, ИАН, 1957)的证明. 证明的基础是下面的

引理1 设 $p \geq 24$, 固定着 φ , 作 x 的三角多项式

$$D_p(x, \varphi) = \sum_{k=0}^{p-1} \cos(kx + \varphi),$$

则当

$$\frac{\pi}{p} \leq x \leq \frac{3\pi}{p}$$

时,有如下的 k_1 和 k_2 :

$$0 \leq k_1 < k_2 < p,$$

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos(kx + \varphi) \right| \geq \frac{p}{48}.$$

【证明】 置 $\psi_k = kx + \varphi$, 则 $\varphi = \psi_0 \leq \psi_1 \leq \dots \leq \psi_{p-1} = \varphi + (p-1)x$. 区间 $I = [\psi_0, \psi_{p-1}]$ 的长等于

$$(p-1)x \geq \frac{p-1}{p} \pi \geq \left(1 - \frac{1}{24}\right) \pi = \frac{23}{24} \pi.$$

因此, I 或是包含长为 $\frac{\pi}{4}$ 的一个子区间 I_+ , 当 $\psi \in I_+$ 时, $\cos \psi \geq \frac{1}{2}$; 或是 I 包含 I_- , 当 $\psi \in I_-$ 时,

$$\cos \psi \leq -\frac{1}{2}, \quad |I_-| = \frac{\pi}{4}.$$

两种情况总有一种成为事实. 由于 $\psi_0, \dots, \psi_{p-1}$ 的相邻两点之差是

$$x \leq \frac{3\pi}{p} \leq \frac{\pi}{4},$$

所以 ψ_k 落在 I_+ (或是 I_-)的个数不小于

$$\frac{\pi}{4} \div x \geq \frac{\pi}{4} \div \frac{3\pi}{p} \geq \left[\frac{p}{12} \right] \geq \frac{p}{12} - 1 \geq \frac{p}{24}.$$

设 $\psi_k \in I_+$ 的最小和最大的 k 分别为 k_1 和 k_2 , 那末

$$k_2 - k_1 + 1 \geq \frac{p}{24},$$

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \cos(kx + \varphi) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos \psi_k \geq \frac{1}{2} (k_2 - k_1 + 1) \geq \frac{p}{48}.$$

同样可证在 I_- 的情况, 左方的和 $\leq -\frac{p}{48}$.

总之

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos(kx + \varphi) \right| \geq \frac{p}{48}.$$

引理证毕.

其次, 我们需要下述引理 2 中的自然数列 $\{p_n\}$.

引理 2 对于 $\{\alpha_n\}$, 当 $\alpha_n \downarrow 0$, $\sum \alpha_n^2 = \infty$ 时, 存在增加的自然数列 $\{p_n\}$ 适合于

$$\frac{1}{p_n} \leq \alpha_{p_1 + p_2 + \dots + p_n}, \quad \sum \frac{1}{p_n} = \infty.$$

【证明】 设 $N_0 = 0$, $N_1 < N_2 < \dots < N_n$ 都是自然数. 当 $N_0, N_1, \dots, N_{n-1}$ 已经定好的时候, N_n 是适合于 $(N - N_{n-1})\alpha_N > 1$ 的最小整数. N_n 是存在的, 假如不然, 那末当 $N > N_{n-1}$ 时, $(N - N_{n-1})\alpha_N \leq 1$, 从而

$$\alpha_N = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

有背于 $\sum \alpha_n^2 = \infty$. 由是, 当 $n = 1, 2, \dots$ 时,

$$(1) \quad (N - N_{n-1})\alpha_N \leq 1 \quad (N_{n-1} \leq N < N_n),$$

$$(N_n - N_{n-1})\alpha_{N_n} > 1.$$

我们要证

$$p_n = N_n - N_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

是适合引理 2 中一切条件的. 首先, 由定义, $p_n \alpha_{N_n} > 1$, 或是

$$\frac{1}{p_n} < \alpha_{N_n} = \alpha_{p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

从

$$p_{n+1} \alpha_{N_{n+1}} > 1 \geq (p_n - 1) \alpha_{N_n} \geq (p_n - 1) \alpha_{N_{n+1}},$$

得到 $p_{n+1} > p_n - 1$. 因此, $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots$.

最后证明 $\sum p_n^{-1} = \infty$. 由于 $p_n \alpha_{N_n} \leq 1 + \alpha_{N_n} \leq 1 + \alpha_1$, 所以

$$\alpha_{N_n} \leq \frac{1 + \alpha_1}{p_n}.$$

因此

$$(2) \quad \sum_{N=N_n}^{N_{n+1}+p_n-1} \alpha_N^2 \leq p_n \alpha_{N_n}^2 \leq (1 + \alpha_1)^2 p_n^{-1}.$$

利用(1), 我们见到

$$(3) \quad \sum_{N_n+p_n}^{N_{n+1}-1} \alpha_N^2 \leq \sum_{N_n+p_n}^{N_{n+1}-1} \frac{1}{(N - N_n)^2} = \frac{1}{p_n^2} + \dots + \frac{1}{(p_{n+1}-1)^2} < \sum_{k=p_n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{2}{p_n}.$$

将(2)和(3)两式相加, 得到

$$[2 + (1 + \alpha_1)^2] \frac{1}{p_n} > \sum_{N=N_n}^{N_{n+1}-1} \alpha_N^2.$$

关于 n 相加, 我们见到

$$\sum_1^{N_{n+1}} \frac{1}{p_n} > \frac{1}{2 + (1 + \alpha_1)^2} \sum_{N=p_n}^{N_{n+1}-1} \alpha_N^2 \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

引理 2 证毕.

【定理 8 的证明】 我们利用形如

$$T_{N,p}(x, \gamma) = \sum_{k=0}^{p-1} \cos [(N+k)x - k\gamma],$$

$$Q_{N,p}(x, \gamma) = \sum_{k=0}^{p-1} \sin [(N+k)x - k\gamma]$$

的互相共轭的三角多项式来作成所要的两个三角级数. 置

$$\gamma_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{p_k} - \pi \frac{1}{p_n},$$

则所要的三角级数就是

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} T_{N_{n-1}, p_n}(x, \gamma_n),$$

$$\bar{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} Q_{N_{n-1}, p_n}(x, \gamma_n).$$

这两个级数都不能“并项”的. 比方说, $S(x)$ 的 n 项是 $N_{n-1} + p_n - 1$ 阶的多项式, 由于

$$N_{n-1} + p_n - 1 = N_k - 1 < N_n,$$

所以它不会和 $S(x)$ 的第 $n+1$ 项并项, 后者是从 N_n 阶的项开始的. $S(x)$ 和 $\bar{S}(x)$ 的互相共轭是显然的. 这些级数的系数满足——第 N 项系数——

$$|a_N| \leq \frac{1}{p_n}, \quad |b_N| \leq \frac{1}{p_n} \quad (N_{n-1} \leq N < N_n).$$

由于 $p_n^{-1} \leq a_{N_n} \leq a_n$, 所以 a_n 与 b_n 都是 $O(a_n)$.

现在证明 $S(x)$ 到处发散. 设 $0 \leq x_0 < 2\pi$, 对于任一正整数 l , 存在如下的 n_l :

$$2\pi \sum_{k=1}^{n_l-1} \frac{1}{p_k} \leq x_0 + 2\pi l < 2\pi \sum_{k=1}^{n_l} \frac{1}{p_k}.$$

由是, 从等式

$$\gamma_m + \frac{2\pi}{p_m} = 2\pi \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{p_k} + \frac{\pi}{p_m},$$

得到

$$-\frac{\pi}{p_{n_l}} < x_0 + 2\pi l - \gamma_{n_l} - \frac{2\pi}{p_{n_l}} < \frac{\pi}{p_{n_l}}.$$

应用引理 1, 当 $p_{n_l} \geq 24$ 时, 有 k_1, k_2 适合 $k_1 < k_2 < p_{n_l}$, 以及

$$\left| \frac{1}{p_{n_l}} \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos[(N_{n_l-1} + k)x_0 + k\gamma_{n_l}] \right| \geq \frac{1}{48}.$$

$|\cdots|$ 中的式子是 $S(x_0)$ 的一段, 由于 n_l 可以任意大, 所以 $S(x_0)$ 发散. 由是 $S(x)$ 处处发散.

同样可证 $\bar{S}(x)$ 是一处处发散的级数. 定理 3 证毕.

下述定理, 表示三角级数与其共轭级数之间收敛发散问题有密切联系.

定理 4 设在正测度的点集 E 上, 有概散而可以 $(C, 1)$ 求和的三角级数, 那末它的共轭级数在 E 上几乎处处发散. 在特别的情况, 概散的富里埃级数的共轭级数是概散的.

这是克脱耐 (Kuttner) 于 1935 年在伦敦数学会期刊上发表的定理.

首先建立