CHUANPO TUIJINZHOUXI ZHENDONG

● 陈之炎 编

● 上海交通大学出版社

船舶推进轴系振动

船舶推进轴系振动

陈 之 炎　编 著

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书全面介绍和论述了船舶推进轴系扭转振动、纵向振动和回旋振动的问题，包括基本理论、计算模型、计算与分析方法、衡定标准、振动的消减与回避以及振动测量与数据分析等等。

全书共六章：振动分析基础；激振力；扭转振动；纵向振动；回旋振动；轴系振动测试与数据分析。各章之间既有联系，又有相对的独立性；既有相当的理论深度，又有生产实际问题的具体解法。

本书可作大专院校《船舶动力机械》、《船舶动力装置》以及《船舶柴油机》专业的教材，亦可供其他有关动力装置专业的师生以及从事动力机械和动力装置设计、研究、制造及其使用部门的工程科技人员参考使用。

船舶推进轴系振动

上海交通大学出版社出版

（淮海中路1984弄19号）

新华书店上海发行所发行

常熟文化印刷厂印装

开本：787×1092毫米 1/16 印张：18.25 字数：446000

1987年6月第1版 1987年6月第1次印刷

印数：1—1600册

统一书号：15324·152 科技书目：143—216

定价：3.00元

前　　言

作者自1979年以来，在上海交通大学动力机械工程系讲授《船舶动力装置振动》与《船舶推进轴系振动》课程。本书就是在多年来的讲义和讲稿基础上，汲取了教学实践中的经验，同时考虑到兄弟院校有关专业教学的共同需要，根据1984年8月全国造船院校船舶动力类专业教材评选会议通过的《船舶推进轴系振动》编写大纲，重新整理修改而成。

本书共分六章：第一章主要论述振动分析基础，内容限制在线性稳态振动范畴；第二章主要论述激振力，对船舶推进轴系振动的两个主要激振源——柴油机与螺旋桨诱发的激振力作了比较详细的阐述，并从工程实际出发，给出了一些实用的计算公式和方法；第三章主要介绍扭转振动分析与计算的常规内容；第四章为轴系的纵向振动，无论其计算模型还是计算方法都与扭转振动极为相似，但从工程实际的观点看，它仍然有独特的内容和问题；第五章中用了较多篇幅讨论回旋振动的机理与特性，对回旋振动固有频率、固有振型以及振动响应等计算方法也作了全面的分析与介绍；第六章介绍推进轴系振动测量与数据处理技术，主要讨论振动数据分析中的数学概念及其物理意义，并介绍在轴系振动分析中应用最为广泛的频谱分析，其次针对我国的实际情况，对一些简单的机械式振动测量仪和分析方法也作了专门介绍。

考虑到工程技术界读者的需要，各章均有一定的独立性。

由于国内外目前尚未见有全面论述船舶推进轴系振动的专著，收集的文献资料可能挂一漏万，有些内容系作者及其同事的研究成果，有些内容和提法亦未见于其他文献。望广大读者和使用本教材的兄弟院校师生提出宝贵意见。

本书由镇江船舶工程学院叶祖荫教授主审。在编写过程中得到上海交通大学李渤仲教授、骆振黄教授和其他同志的热情支持、帮助和指导，在此谨致衷心的感谢。

本书写作过程中，参考了许多国内外文献资料，本书作者对未能一一指明出处表示歉意，并对各位作者表示感谢。

作　者

一九八六年于上海交通大学

目　　录

第一章

振动分析基础

§1.1 概　述

在各种工程技术领域中，都存在不同程度的振动现象．发生振动的各种过程，其物理本质可能完全不同，例如船舶轴系的振动与回路中电流的振动，就是物理本质完全不同的两种现象．但是，在所有情况下，振动的基本规律是一样的，可以用相同形式的数学模型来描述．本书从一开始就强调振动规律的这一普遍性，对于推进与发展船舶推进轴系的振动分析是有意义的．

本章为轴系振动的理论基础，主要讨论集总参数系统的振动特性．单自由度系统虽然简单，却反映和揭示了振动的本质，引出了振动的许多基本概念，因而也是进一步解决振动问题的基础和关键．对于多自由度系统，则着重介绍固有频率的计算方法(主要是轴系振动计算中常用的方法)．考虑到在实际轴系振动分析时可能采用弹性体分布系统模型，因而在这里简要地介绍了轴段扭振、纵振与横振的三个波动方程．

1.1.1　振动的基本概念

一、简谐运动

机械振动是在一给定的坐标参考系中，机械系统的运动量值与其平均值相比，时大时小交替变化的现象．在本书讨论的范围内，它通常指微幅振动．

简谐运动是一种最简单和最基本的振动形式(图 1-1)，可用正弦函数表示为

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varepsilon). \tag{1-1}$$

式中：A 为运动量最大值，称为幅值(或振幅)；ε 为时间 $t=0$ 时的相角，称为初相角；ω 为圆频率．当 $\omega t=2\pi$ 时，运动完成一个循环，它所需的时间 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 称为周期，其倒数 $f=\frac{\omega}{2\pi}$ 称为频率．

如 $x(t)$ 为振动位移，则速度和加速度为

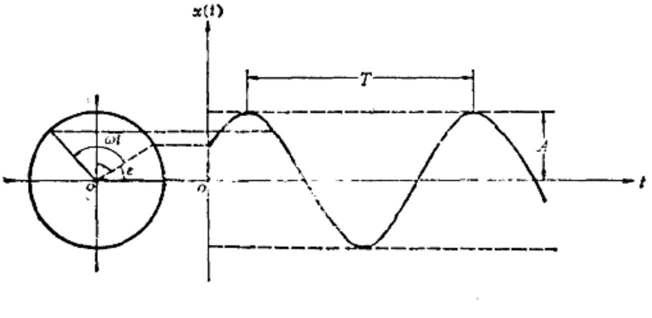


图 1-1　简谐运动

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\omega A\cos(\omega t+\varepsilon)=\omega A\sin\left(\omega t+\varepsilon+\frac{\pi}{2}\right),\\ \ddot{x}(t)&=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t}=-\omega^2A\sin(\omega t+\varepsilon)=\omega^2A\sin(\omega t+\varepsilon+\pi).\end{aligned}\right\}\tag{1-2}$$

上式表明，简谐运动的速度和加速度仍为简谐函数，并且有相同的圆频率。速度幅值为位移幅值的 ω 倍，加速度幅值又为速度幅值的 ω 倍，速度相角超前位移相角 90°，加速度相角又超前速度相角 90°。

简谐运动可用复平面中的旋转矢量来表示。图 1-2 中一模长为 A 的矢量以角速度 ω 逆时针旋转时，任一瞬间在实轴上的投影为 $A\cos(\omega t+\varepsilon)$，在虚轴上的投影为 $A\sin(\omega t+\varepsilon)$。

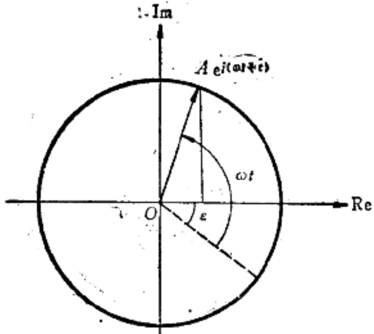


图 1-2 简谐运动的复旋转矢量表示

复旋转矢量的数学表达式为

$$z=A\cos(\omega t+\varepsilon)+\mathrm{j}\,A\sin(\omega t+\varepsilon)=A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varepsilon)}.\tag{1-3}$$

式中 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$。这是一个复指数函数。旋转矢量的模为简谐运动幅值，旋转角速度则为简谐运动圆频率，其实部和虚部均可用以表示简谐运动。在本书中，我们约定用复函数的虚部表示，并采用 $x(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varepsilon)}$ 表达式。对此，以后不再特别指明，但在数学运算时仍按复数进行。

应用复函数表示简谐运动可使振动运动方程的数学运算大为简化。

速度、加速度亦可由复数求导并用复旋转矢量表示。设 $x(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，则

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=\mathrm{j}\omega A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\mathrm{j}\omega x(t),\\ \ddot{x}(t)&=-\omega^2A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\mathrm{j}\omega\dot{x}(t).\end{aligned}\right\}\tag{1-4}$$

如图 1-3 所示。可以看出，对复数每求导一次，等于将该复数乘以 $\mathrm{j}\omega$。在复平面上，乘以 ω 相当于将旋转矢量的模增大 ω 倍，乘以 j 则表示将该旋转矢量逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$。

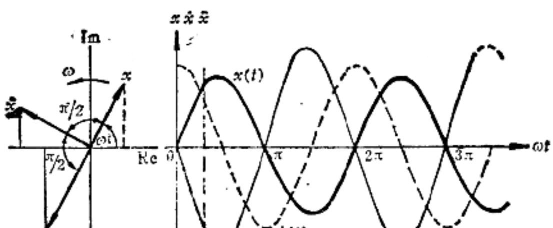


图 1-3 简谐运动的位移、速度和加速度矢量

二、周期振动、简谐分析

所谓周期振动，就是指每经相同的时间间隔，其运动量值能重复出现的振动。可用下式表示

$$x(t)=x(T+t).\tag{1-5}$$

式中T为周期．简谐运动是最简单的周期振动．但在工程实际中更多的是非简谐周期振动．

可以证明，现实的工程问题中任何周期振动都可以用具有相等频率间距的许多正弦分量的和来表示．设$x(t)$为周期为T的周期振动，则

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varepsilon_n). \tag{1-6}$$

式中：$\omega=\frac{2\pi}{T}$称为周期振动的基频；a_0、a_n、$b_n(n=1, 2, \cdots)$等待定系数由下式确定，即

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t,\\
a_n&=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t,\\
b_n&=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t,\\
A_n&=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\\
\varepsilon_n&=\mathrm{tg}^{-1}\frac{a_n}{b_n}.
\end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

把一个周期振动展开(或分解)为许多简谐振动的迭加，称为简谐分析．它实质上是把振动的时域表示变换为频域表示，或者说，把以时间为自变量来描述的振动变换为用频谱来描述．这是振动分析中最常用的一种方法．图1-4为某周期振动经简谐分析后的频谱图．

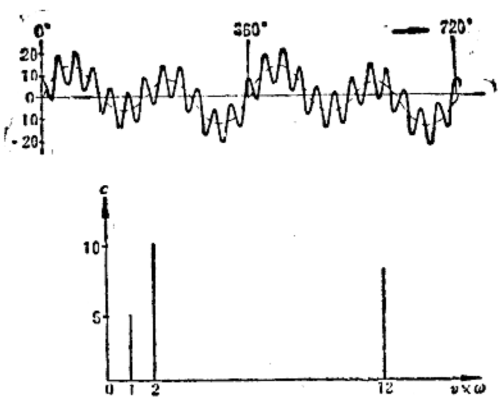


图1-4　周期振动的频谱

1.1.2　振动分析的目的与内容

振动分析的目的是振动控制，以获得具有良好振动性能的结构或装置．在实际工作中，可以有以下两种不同的情况．

(1) 对于已经工作(或运行)的机器或装置，当出现异常振动时的振动分析．通常都是通过对该机器或装置运行时的振动响应的测量，分析其振动特性，找出产生振动的原因和传递途径，采用经济而有效的方法，将振动控制在规范所允许的范围内．

(2) 对于正在设计的机器或装置的振动分析．这是根据设计图纸来进行计算、分析的，即

边分析、边改进，逐步达到预期的要求．通常，分析主要包括以下内容：固有特性、振动响应以及振动稳定性问题．在船舶推进轴系振动中，一般很少发生振动不稳定性问题，对此，本书不予讨论．

振动分析首先是固有特性的分析，以确定固有频率及相应的振型．它们是由结构或装置本身的动力学参数决定，通常与运转条件无关，这是振动分析的基础和关键．

振动响应取决于动态外力的性质和系统的固有特性．根据外力性质的不同而有稳态响应、瞬态响应和随机响应等．在船舶轴系振动中，起主要作用的外力是周期激振力，故本书主要研究稳态响应．过大的响应会引起动强度（疲劳强度）和振动环境问题，因此，必须将它限制在适当范围内．

但振动并非永远是一无是处．当振动有用时，则要适当予以加强．不过这已经超出了本书的范围．

1.1.3 振动分析的方法

建立在经典振动理论基础上的分析法，目前仍是振动分析的基本方法．它大致可分为以下几个步骤：

(1) 建立实际装置的动力学模型；

(2) 根据动力学模型，导出运动方程式，方程求解后，即得系统振动固有特性与响应；

(3) 分析、评价计算结果，如振动性能达不到规范或设计预期的要求，则应采取消减振动措施，例如改变系统结构系数及其分布以调整其固有特性（固有频率或振型）、采用减振措施以转移或消散振动能量、控制激振力、隔离振动的传递等．

从目前发展来看，尽管电子计算机已被广泛应用，但上述的分析方法仍不能完全满足实际装置与结构的动态分析要求．这是因为计算手段的提高并不能改变原始动力学模型的近似性．由于动力学模型还包含有许多近似的甚至不定的因素，因此，许多振动问题最终仍要依靠试验来判断．

另一种常用的方法是根据动态试验测得的数据进行振动分析．一般振动测试主要是在时域上测量机器或装置运转时的振动量，借以找到共振转速，判断振动响应水平．随着测试技术和数据分析技术的发展，目前振动测试已由简单的响应测量发展到激振试验，即在正弦激振、瞬态激振或随机激振下，测量系统响应以确定系统各阶模态．

理论分析和动态测试的方法各有其不足和局限．把这两种方法紧密结合，才是振动分析的经济而有效的途径．七十年代中期发展起来的多通道、高分辨力的快速 Fourier 变换(FFT)数据处理技术，把理论分析与测试技术紧密结合，为解决振动问题发展了许多有效的振动分析方法，同时也为参数识别、载荷识别等振动分析的逆问题的发展创造了条件．在船舶轴系振动分析中，上述技术尚未充分引入．这主要是出于经济上的考虑及试验条件的限制，但可以预料，它们终将逐步引入，至少可在轴系某些局部结构振动性能的分析研究中引入．

1.1.4 线性时不变系统的基本特性

振动系统按其运动微分方程的形式可分为两大类：线性系统与非线性系统．线性系统，用数学语言来说，就是可用线性方程（包括代数方程、微分方程、差分方程）描述的系统．通俗一点说，在线性振动系统中，弹性力与位移、阻尼力与速度、惯性力与加速度均呈线性关系时．不

变性是指系统动力学参数不随时间而变化. 在工程实际中, 的确存在不少非线性时变振动系统,例如:许多弹性元件,严格地讲,都是非线性的;柴油机轴系扭转振动系统,它也不是时不变的. 但本书只研究线性时不变系统的振动. 因为线性系统在数学上已有一整套成熟的标准解法,而非线性系统, 迄今为止, 仍只能对个别问题找到一些解决办法. 而船舶推进轴系的振动是稳定平衡位置附近的微幅振动,因此可以将它看作是线性振动.

一个具体的振动问题究竟是线性的还是非线性的并没有明确的界限. 我们讲系统在平衡位置附近的微幅振动可视为线性的,但是,多大的幅值才算是微幅振动呢? 这里并没有统一的标准. 但我们必须认识到线性和非线性在本质上不容混淆,它们在振动特性、振动分析方法等方面有着明确的区别. 例如在非线性振动中,没有迭加性,也没有振幅和频率的明确特性.

线性时不变系统的基本特性可简述为:

1. 迭加性与均匀性

迭加性是指当有几个激振力同时作用于系统时, 系统的总响应等于每个激振力单独作用时的响应之和. 均匀性是指当激振力变化几倍时, 响应也变化相应的倍数. 其特性如图 1-5 所示. 迭加性意味着在线性系统中,各个激振力是互相独立的. 在有些文献中,线性系统的定义是具有迭加性和均匀性的系统. 这里不想从数学上予以证明. 但要指出的是, 正是由于这一性质,使线性系统的理论比起非线性系统来,发展得远为完善.

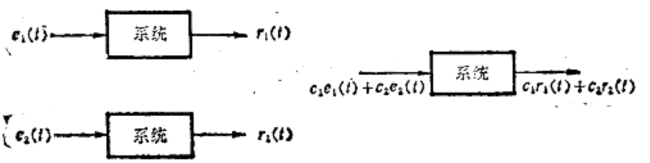


图 1-5 迭加性与均匀性

2. 时不变性

由于系统动力学参数不随时间变化,因而在同样的初始条件下,系统响应与激振力作用于系统的时刻无关. 即如果激振力为 $e(t)$ 产生的响应为 $r(t)$, 则当激振力为 $e(t-t_0)$ 时, 产生的响应为 $r(t-t_0)$. 换句话说, 当激振力延迟时间 t_0 时, 振动响应也同样延迟时间 t_0, 但波形不变. 如图 1-6 所示.

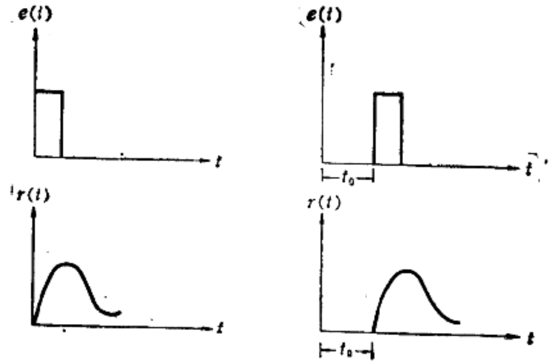


图 1-6 时不变性

除上述两个基本特性外，还可以讨论线性微分方程的一些共同特性，这是大家所熟知的，这里不再叙述。

1.1.5 实际装置的动力学模型

实际装置(或结构)十分复杂，必须抽象简化成为动力学模型以进行理论分析和计算。这个简化了的模型应保持原结构的主要振动特性，但又不过于复杂。简化的程度取决于原结构本身具有的复杂程度、要求分析精度和计算手段。这一工作要求有良好的理论和实际知识，以正确判断哪些是可以忽略的次要因素，哪些是必须保留的，应该如何在分析精度和工作量之间取适当的折衷。显然，对同一结构，根据不同的要求可以简化为几种不同的模型。

通常，实际系统的简化主要包括以下几个方面：

(1) 实际系统与外界环境“绝缘”；

(2) 材料各向同性；

(3) 决定系统振动特性的动力学参数，如质量、刚度、阻尼分布规律的简化；

(4) 上述动力学参数动态特性的简化，例如线性化。

动力学模型是否能真实地反映实际系统在外载环境中的情况。这通常是根据试验结果与动力学模型理论计算结果的接近程度进行判断。传统的方法是将固有频率、振型和振动幅值来作为比较的参数。当两者相差不满足给定的精度要求时，则应利用试验结果修改动力学模型。

实际系统的动力学模型一般可分为两大类：离散系统模型和分布系统模型。前者又包含两种：集总参数模型和有限元模型。

集总参数模型由三种基本元件组成，即惯性元件(集中质量)、阻尼元件(没有质量的阻尼器*)和弹性元件(没有质量的弹簧)。它们分别把力与加速度、速度、位移联系起来，并以质量 m、阻尼系数 c、刚度 k 为其动力学参数。在扭转振动系统中，相应的三种基本元件是具有转动惯量的匀质薄圆盘、没有惯量的扭转阻尼器和没有惯量的扭转弹簧。为不使本书符号过多，除转动惯量用 J 表示外，仍采用 c、k 分别表示扭转阻尼系数和扭转刚度。

分布系统模型由分布参数元件组成。它通常是指质量、刚度等动力学参数均匀分布或按简单规律分布的连续弹性体。描述它的振动特性的独立变量不仅是时间，而且还有它的空间位置。因而其数学模型为偏微分方程。

有限元模型由有限个各类离散单元(例如杆元、梁元、板元等)组成，每一个单元内部是连续的。

一般说来，集总参数模型最为简单，计算工作量相对较少，对计算机容量要求也不高。但对质量刚度分布比较均匀的结构或构件，例如轴系振动系统中的中间轴、尾轴，它的模拟精度比较低，这时宜采用连续弹性体模型。有限元法是进行结构静动力分析的很有效方法，只要模型单元划分得足够细，就可以得到相当高的模拟精度，尤其对于复杂结构，更是其他模型所无法比拟的。当然其计算工作量、费用会大大增加。船舶推进轴系相对说是一个比较简单的振动系统，如果不考虑船体结构的影响或船体与轴系间的振动耦合，采用集总系统模型或连续弹性体模型，一般均可满足分析的精度要求。

---

* 阻尼器的模型有多种型式。由于粘性阻尼器的阻尼力与速度成线性关系，在数学上比较容易处理，一般多以它作为阻尼器的基本模型。

在教科书中,为有利于物理概念的表述,总是把集总参数系统与分布系统分别讨论. 在实际工作中,完全可以根据实际结构特点用上述各类模型分别模拟. 例如对飞轮、螺旋桨等刚度很大、质量很集中的构件用集总参数模型,中间轴、尾轴用连续弹性体模型,船体结构用有限元模型. 这样就充分发挥了各种模型的特点.

1.1.6 运动方程的建立

振动系统的运动方程一般可用三种方法建立:D'Alembert 原理、Lagrange 方程和 Hamilton 原理. 各种方法均有其优点. D'Alembert 原理引入了惯性力概念,用力的平衡方程来代替动力学方程,用静力学的方法来解决动力学问题,是建立运动方程的基本方法. 对比较简单的振动系统,这个方法是简单明瞭和方便的. 但对某些复杂的系统,用它直接写出系统所有的力的平衡方程可能是困难的. 这时,用从系统动能、势能和功间的标量关系基础上所建立的 Lagrange 方程和 Harmilton 原理建立运动方程式的方法可能更为方便. 除此之外, 还有所谓影响系数法及应用有限元模型时的有限元法等.

对于同一系统, 不论采用哪种方法, 所导出的方程应该是相同的. 究竟选用哪一种方法, 主要取决于系统的复杂程度以及个人的习惯. 在轴系振动中, 常用的方法是 D'Alembert 原理

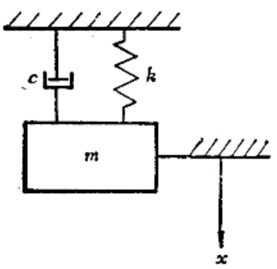
§1.2 自 由 振 动

系统在外力或某种约束的作用下而偏离其平衡位置(或得到一个初始速度), 当去掉外力或约束后,系统将在其平衡位置附近来回振动, 这种振动称为自由振动. 换句话说, 自由振动是系统对初始激励的响应. 系统作自由振动时,没有外部激振力的作用,即没有振动能量的输入与补充. 如系统无阻尼作用,那么,自由振动一旦激起将永不消失. 而实际系统总有一定阻尼,振动时要耗散一定的能量, 于是, 自由振动将逐渐减小而终趋消失. 所以现实系统的自由振动均为瞬态振动.

1.2.1 单自由度系统

一、运动方程式

考察如图 1-7 所示的单自由度质量弹簧系统. 取质量m沿弹簧伸长方向的位移x为广义坐标,质量静平衡位置为坐标原点. 按 D'Alembert 原理,可写出系统的运动方程为



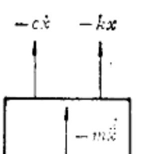


图 1-7 单自由度系统自由振动

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \tag{1-8}$$

这是一个二阶线性常系数齐次微分方程.

将方程(1-8)两边各除 m, 并引入符号 ζ 与 ω_n, 得

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n x = 0. \tag{1-9}$$

式中:$\omega_n = \sqrt{k/m}$ 称为系统的无阻尼固有圆频率;$\zeta = c/c_{cr}$ 称为粘性阻尼比; $c_{cr} = 2m\omega_n$ 称为临界粘性阻尼系数. 其中 ω_n 与 ζ 是决定系数振统响应的两个极为重要的参数.

二、运动方程式的解

设方程(1-9)的解为

$$x = Ae^{\alpha t}, \tag{1-10}$$

代入式(1-9), 整理后,得

$$(\alpha^2 + 2\zeta\omega_n\alpha + \omega_n^2)Ae^{\alpha t} = 0.$$

由于 $e^{\alpha t}$ 不恒为零,则上式成立的必要条件为

$$\alpha^2 + 2\zeta\omega_n\alpha + \omega_n^2 = 0. \tag{1-11}$$

方程(1-11)称为特征方程或频率方程. 其根为

$$\alpha_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}, \tag{1-12}$$

可得方程(1-9)的通解为

$$x = A_1e^{\alpha_1 t} + A_2e^{\alpha_2 t}. \tag{1-13}$$

$\zeta > 1$ 时,式(1-12)的根为两个不等的负实数, 令 $\omega^* = \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$, 则 $\alpha_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega^*$, 代入式(1-13), 经整理后,可得

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}(A_1 \sin h\omega^* t + A_2 \cos h\omega^* t). \tag{1-14}$$

式中常数 A_1、A_2 由初始条件决定.

方程(1-14)所描述的运动如图 1-8 所示. 这是一个按指数规律衰减的运动, 系统并不产生振动. 随着阻尼比的增加,质量 m 返回静平衡位置的速度将变得更慢.

$\zeta = 1$ 时,式(1-12)具有重实根,运动方程的通解为

$$x = (A_1 + A_2t)e^{-\omega_n t}. \tag{1-15}$$

这仍然是一个按指数规律衰减的运动. 图 1-9 表示初始条件为 $x = x_0$、$\dot{x} = \dot{x}_0$ ($t = 0$ 时) 的运动.

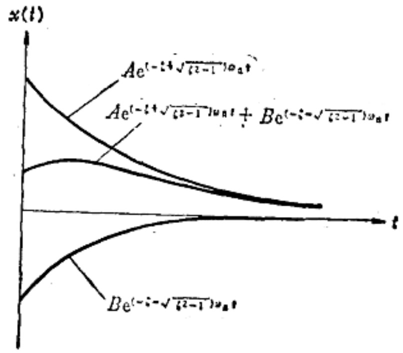


图 1-8 过阻尼时的运动规律

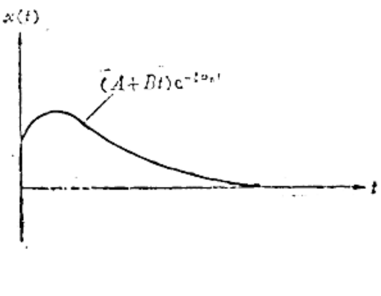


图 1-9 临界阻尼时的运动规律

当 $0<\zeta<1$ 时，式(1-12)中根号内为负值，引入虚数 j 及符号 ω_d，则式(1-12)变为

$$\alpha_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_d. \tag{1-16}$$

式中

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{1-17}$$

称为系统的阻尼固有圆频率。

将式(1-16)代入式(1-13)，得

$$x=e^{-\zeta\omega_n t}(A_1e^{j\omega_d t}+A_2e^{-j\omega_d t}).$$

由 Euler 公式，上式可写为

$$x=e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t). \tag{1-18}$$

设 $t=0$ 时，$x=x_0$，$\dot{x}=\dot{x}_0$，代入上式，得

$$x=e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0\cos\omega_d t+\left(\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\right)\sin\omega_d t\right]. \tag{1-19}$$

亦可写成以下形式：

$$x=Ce^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t-\varphi). \tag{1-20}$$

式中

$$C=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2}; \tag{1-21}$$

$$\varphi=\operatorname{tg}^{-1}\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{\omega_d x_0}. \tag{1-22}$$

式(1-20)所描述的运动如图 1-10 所示，这是一个幅值按指数规律衰减的伪简谐运动，称为系统的有阻尼自由振动，其振动频率为 ω_d。

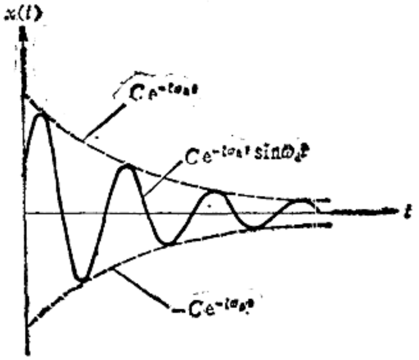


图 1-10 欠阻尼自由振动

如果忽略阻尼的影响(即 $\zeta=0$)，则式(1-20)变为

$$x=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}\cos(\omega_n t-\varphi). \tag{1-23}$$

式中 $\varphi=\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{\dot{x}_0}{\omega_n x_0}$。

这是一个幅值由初始条件决定、振动频率为 ω_n 的简谐振动。

三、解的讨论

上述三种情况分别称为过阻尼($\zeta>1$)、临界阻尼($\zeta=1$)和欠阻尼($\zeta<1$)。

1. 当系统的阻尼比 ζ 等于或大于临界阻尼时，系统在受到初始激励后并不产生振动，而是逐渐地回到静平衡位置，阻尼愈大，返回的速度就愈慢。

2. 当忽略阻尼影响时，自由振动为简谐振动。自由振动频率 $\omega_n=\sqrt{k/m}$ 仅取决于系统的质量与刚度，与初始激励和环境条件无关。欠阻尼使系统的自由振动从简谐振动变为幅值按指数规律衰减的伪简谐振动，其频率 ω_d 小于无阻尼自由振动频率 ω_n，阻尼愈大，下降愈多。但在工程实际问题中，阻尼一般都比较小(大多数情况下 $\zeta<0.05\sim0.1$)，可不考虑 ω_d 与 ω_n 之间的微小差别。

3. 系统自由振动的幅值取决于初始条件和阻尼大小。一般说来，在分析研究系统的自由振动特性时，对其幅值的大小并不感兴趣。可是，从幅值衰减的规律中，可以得到计算阻尼比的近似方法。