常 微 分 方 程

〔法〕M. 罗 梭 著
叶 彦 谦 译

上海科学技术出版社

Equations Differentielles

M. Roseau

Masson, 1976

常微分方程

〔法〕M.罗梭 著

叶彦谦 译

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　江苏扬中印刷厂印刷

开本850×1156 1/32　印张5.25　字数137,000

1981年3月第1版　1981年3月第1次印刷

印数 1—15,000

书号：13119·903　定价：（科四）0.62元

目　录

第一章

有限维向量空间中线性算子的谱理论

§1. 设 V^n 为复数体上的 n 维向量空间. 对于 V^n 到它自身的任一线性变换 $x\to y=Ax$, 我们得到一个线性算子 A. 它在 V^n

号)来表示. A 的元素记为 a_{ij}. 这时 y 的坐标 y_p 便成为 x 的坐标 x_q 的,如下形式的函数:

$$y_p=\sum_q a_{pq}x_q.$$

对于 V^n 的任一别的基 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$, 必存在一可逆矩阵 $S=\{s_{ij}\}$, $S^{-1}=\{\sigma_{ij}\}$, 使 $\varepsilon_j=\sum\limits_q s_{qj}e_q$, $e_p=\sum\limits_i \sigma_{ip}\varepsilon_i$, 并且我们可写:

$$y=\sum_i \eta_i\varepsilon_i=\sum_p y_p e_p=\sum_{i,p} y_p\sigma_{ip}\varepsilon_i=\sum_{i,p,q}\sigma_{ip}a_{pq}x_q\varepsilon_i,$$

或

$$\eta_i=\sum_{p,q}\sigma_{ip}a_{pq}x_q.$$

由于

$$x=\sum_q x_q e_q=\sum_j \xi_j\varepsilon_j=\sum_{q,j}s_{qj}\xi_j e_q,$$

或

$$x_q=\sum_j s_{qj}\xi_j.$$

代入前式,得到:

$$\eta_i=\sum_{p,q,j}\sigma_{ip}a_{pq}s_{qj}\xi_j.$$

这说明: 相对于新的基 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$, 算子 A 可以用矩阵 $S^{-1}AS$ 来表示. 因为

$$\begin{aligned}\det(S^{-1}AS-\lambda I)&=\det(S^{-1}(A-\lambda I)S)\\&=\det(A-\lambda I)=\Delta(\lambda),\end{aligned}$$

其中 I 是单位矩阵, 可见 n 次多项式 $\Delta(\lambda)$ 的零点与基的选取无

关. 为了存在一个非零向量 $x\in V^n$, 使能满足 $Ax=\lambda x$, 其充要条件是 $\Delta(\lambda)=0$. 我们称 λ 为特征值, x 为对应的特征向量.

定义 设整数 $\nu\geqslant 0$ 是使

$$(A-\lambda I)^{\nu+1}x=0 \quad\Rightarrow\quad (A-\lambda I)^{\nu}x=0,\ \forall x\in V^n$$

成立的最小整数, 则称 ν 为复数 λ 关于线性算子 A 的指标.

显见若 λ 不是特征值, 则 $\nu=0$, 反之亦然. 下面要证明: 当 λ 为特征值时 ν 必存在, 且适合 $0<\nu\leqslant n$.

事实上, 若 ν 不存在, 或存在而大于 n, 则必可找到 V^n 中一列元素 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$, 使

$$(A-\lambda I)^{p+1}x_p=0 \quad 而 \quad (A-\lambda I)^{p}x_p\neq 0,\ 0\leqslant p\leqslant n. \tag{1}$$

这 $n+1$ 个元素不可能是线性独立的, 即存在 $n+1$ 个不全为零的数 $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$, 使

$$\alpha_0x_0+\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n=0. \tag{2}$$

但另一方面, 对(2)式两边施行算子 $(A-\lambda I)^p$, p 取从 n 到 0 的一切整数, 注意到(1)式, 便可得出:

$$\alpha_n=\alpha_{n-1}=\cdots=\alpha_0=0,$$

与假设相矛盾.

以后用 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 记 A 的不同的特征值, $k\leqslant n$, 以 $\nu_1,\cdots,\nu_k$ 记它们的指标, 以 $\delta(\lambda)$ 记多项式

$$\delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\nu_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{\nu_k}.$$

最后, 可写: $$\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{s_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{s_k}.$$

定理 1 成立等式

$$\delta(A)=\prod_{j=1}^{k}(A-\lambda_jI)^{\nu_j}=0.$$

证 设 x 是 V^n 的任一元素, 则 $n+1$ 个元素 $x,\ Ax,\ A^2x,\ \cdots,\ A^nx$ 必不独立, 从而存在不全为零的数 $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$, 使:

$$\alpha_0x+\alpha_1Ax+\cdots+\alpha_nA^nx=0.$$

也就是说, 存在 n 次多项式 $r(\lambda)$, 使 $r(A)x=0$. 将 $r(\lambda)$ 分解因子, 可写此等式为

$$\prod_{i=1}^{m}(A-\mu_i I)^{\sigma_i}x=0.$$

显见可以从这个乘积中丢掉那些与不是 A 的特征值 μ_j 对应的因子 $(A-\mu_j I)^{\sigma_j}$；而对于其他的因式，则可使其指数等于对应的特征值的指标．最后，如有必要，添上缺少的因式，我们总能得到 $\delta(A)x=0$．但因 $\delta(A)$ 不依赖于 x，故必 $\delta(A)=0$．

§2．以 $\mathscr{F}(A)$ 记这样的单复变函数 $f(z)$ 的全体，其中每一函数都在包含 A 的所有特征值的某一开集上是全纯的（这集可能是不连通的）．

引理 对任一 $f\in\mathscr{F}(A)$，必可作一多项式 $p(z)$，使

（$f^{(m)}(z)$ 表示 f 对 z 的 m 阶导数）．

证 对 $k=1$，结论是显然的，只须取

$$p(z)=f(\lambda_1)+\frac{z-\lambda_1}{1!}f^{(1)}(\lambda_1)+\cdots+\frac{(z-\lambda_1)^{\nu_1-1}}{(\nu_1-1)!}f^{(\nu_1-1)}(\lambda_1).$$

若 $k>1$，可用对 k 的归纳法来证明引理．设 $q(z)$ 是多项式，满足

$$q^{(m)}(\lambda_j)=f^{(m)}(\lambda_j),\ \forall m,\ j,\ 0\leqslant m\leqslant\nu_j-1,\ 1\leqslant j\leqslant r-1<k.$$

作多项式 $p(z)=q(z)+\prod_{j=1}^{r-1}(z-\lambda_j)^{\nu_j}\cdot\tilde{\omega}(z)$，其中 $\tilde{\omega}(z)$ 是任一多项式，则 $p(z)$ 与 $q(z)$ 满足同样的条件．于是只要使 $p(z)$ 再满足条件 $p^{(m)}(\lambda_r)=f^{(m)}(\lambda_r)$，$0\leqslant m\leqslant\nu_r-1$ 好了．为此目的，只须逐步地由上列等式来确定 $\tilde{\omega}(\lambda_r)$，…，$\tilde{\omega}^{(\nu_r-1)}(\lambda_r)$ 以及 $\tilde{\omega}(z)$．易见多项式 $p(z)$ 并不是唯一确定的；若 $p(z)$ 是(3)的一个特解，则(3)的一般解是 $p(z)+\prod_{j=1}^{k}(z-\lambda_j)^{\nu_j}\cdot v(z)$，其中 $v(z)$ 是任意的多项式．

这个引理以及定理1证明 $p(A)$ 只依赖于 A 和 $f(z)$，因而下面的定义是合理的：

定义 对于任一 $f\in\mathscr{F}(A)$，我们用 $f(A)=p(A)$ 来定义算子 $f(A)$，其中 $p(z)$ 是借(3)式与 $f(z)$ 相关联的一个多项式．

附注 1) 当 $f,g\in\mathscr{F}(A)$，且满足

$$f^{(m)}(\lambda_j)=g^{(m)}(\lambda_j),\ 0\leqslant m\leqslant \nu_j-1,\ 1\leqslant j\leqslant k,$$
则必有$f(A)=g(A)$.

2) 若f为多项式: $f(z)=\sum\limits_0^m \alpha_p z^p$, 则前述定义与通常的定义: $f(A)=\sum\limits_0^m \alpha_p A^p$一致.

定理 2 a) 设$f,\ g\in\mathscr{F}(A)$, $\alpha,\ \beta\in C$, 则有

$$\alpha f+\beta g\in\mathscr{F}(A)\quad 及\quad f\cdot g\in\mathscr{F}(A).$$

b) $\alpha f(A)+\beta g(A)=(\alpha f+\beta g)(A)$, $f(A)g(A)=(f\cdot g)(A)$.

证 a) 是显然的; 今设$p(z)$, $q(z)$分别为借形如 (3) 的关系式而与$f(z)$, $g(z)$相关联的多项式, 那末显见$\alpha p(z)+\beta q(z)$与$p(z)\cdot q(z)$将各自和$\alpha f(z)+\beta g(z)$与$f(z)\cdot g(z)$满足引理的条件, 因此 b) 成立, 因为它对多项式显然是成立的.

§3. 考虑诸函数$e_j(z)\in\mathscr{F}(A)$, $1\leqslant j\leqslant k$, 它们满足条件: 在λ_j的某一开邻域内$e_j(z)=1$, 在$\lambda_i(i\neq j)$的开邻域内$e_j(z)=0$, 并且记$E_j=e_j(A)$.

由于$e_i\cdot e_j=0,\ i\neq j;\ e_i^2=e_i,\ \sum\limits_{i=1}^k e_i=1$, 以及定理 2, 可以看出有

$$E_i\cdot E_j=0,\quad i\neq j, \tag{4}$$

$$E_i^2=E_i, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^k E_i=I, \tag{6}$$

还有

$$AE_i=E_iA. \tag{7}$$

由此可见E_i是一投影算子, (4), (5), (6) 诸式表明诸子空间$\mathfrak{M}_j=E_jV^n=\{E_jx: x\in V^n\}$具有性质:

$$\mathfrak{M}_i\cap\mathfrak{M}_j=0,\ i\neq j,\quad 且\quad V^n=\mathfrak{M}_1\oplus\mathfrak{M}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{M}_k.$$

就是说, V^n中任一元素必可唯一地写成k个元素之和, 它们依次属于$\mathfrak{M}_1,\ \cdots,\ \mathfrak{M}_k$.

以$p(z)$记借 (3) 式而与$e_j(z)-1$相关联的多项式, 那末$p(z)$以λ_j为重数至少为ν_j的零点, 并且它在$z=\lambda_i,\ i\neq j$, 处等于-1. 因此可写: $p(z)=(z-\lambda_j)^{\nu_j+\sigma}q(z)$, $\sigma\geqslant 0$, 多项式$q(z)$在一切特征

值处都不为零．于是

$$e_j(A)-I=E_j-I=p(A)=(A-\lambda_j I)^{\nu_j+\sigma}q(A).$$

又根据(5)式知 $\mathfrak{M}_j$ 可定义为 $\mathfrak{M}_j=\{x:(E_j-I)x=0\}$，故由指标的定义以及算子 $q(A)=\prod\limits_{i=1}^{l}(A-\mu_i I)^{\sigma_i}$ 的可逆性（因为 μ_i 不是 A 的特征值），知道成立：

$$x\in\mathfrak{M}_j\Leftrightarrow(A-\lambda_j I)^{\nu_j+\sigma}q(A)x=0\Leftrightarrow(A-\lambda_j I)^{\nu_j}q(A)x=0.$$

$$\Leftrightarrow q(A)(A-\lambda_j I)^{\nu_j}x=0\Leftrightarrow(A-\lambda_j I)^{\nu_j}x=0.$$

这样，我们已得到子空间 $\mathfrak{M}_j$ 的一个新的定义：

$$\mathfrak{M}_i:\mathfrak{M}_i=\{x:x\in V^n.\ (A-\lambda_i I)^{\nu_j}x=0\}$$

[illegible]

$\mu\neq\lambda_j$，则它是可逆的．事实上，由 $x\in\mathfrak{M}_j$ 与 $(A-\mu I)x=0$ 可得 $(A-\lambda_j I)x=(\mu-\lambda_j)x$，逐次应用此式，即得

$$0=(A-\lambda_j I)^{\nu_j}x=(\mu-\lambda_j)^{\nu_j}x,\quad\text{从而 } x=0.$$

对于已给的，在 λ_j 不等于零的多项式 $q(\lambda)$，依次应用上述结果于算子 $q(A)$ 的各个因子，即知 $q(A)$ 是 $\mathfrak{M}_j$ 到 $\mathfrak{M}_j$ 的一个可逆线性算子．由此事实可推出：对任一多项式 $r(\lambda)$，如果 $r(A)=0$，则 $r(\lambda)$ 必可被 $\delta(\lambda)$ 整除．事实上，若

$$r(\lambda)=(\lambda-\lambda_j)^{\mu}q(\lambda),\ q(\lambda_j)\neq0,\ 0\leqslant\mu<\nu_j,$$

则可找到 $x\in\mathfrak{M}_j$ 使 $(A-\lambda_j I)^{\mu}x\neq0$，以及 $y\in\mathfrak{M}_j$，y 为非零元素，使 $x=q(A)y$，从而 $r(A)y=(A-\lambda_j I)^{\mu}x\neq0$.

特别，我们可以把 § 2 的附注 1 中的“当”改为“当且仅当”.

今设 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 为诸子空间 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_k$ 的维数．由于每一子空间 $\mathfrak{M}_j$ 在算子 A 之下缩小，就是说，$x\in\mathfrak{M}_j\Rightarrow Ax\in\mathfrak{M}_j$，所以相对于 $\mathfrak{M}_1$ 的底 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n_1}\}$ 和 $\mathfrak{M}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{M}_k$ 的底 $\{\varepsilon_{n_1+1},\cdots,\varepsilon_n\}$ 联合组成的 V^n 的底来说，算子 A 的矩阵取下面的形式：

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right),$$

其中 A_1, B 分别为 $n_1\times n_1$, $(n-n_1)\times(n-n_1)$ 矩阵．B 不能以 λ_1 做它的特征值，因若存在 $\xi\in\mathfrak{M}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{M}_k$ 使得 $A\xi=\lambda_1\xi$，$\xi\neq0$，

则将有$(A-\lambda_1 I)^{\nu_1}\xi=0$，从而$\xi\in\mathfrak{M}_1$，矛盾．因此，$\lambda_1$作为$A_1$的特征值，其重数等于$\lambda_1$作为$A$的特征值的重数$s_1$，即有$n_1\geqslant s_1$．于是同理可证：

$$n_j\geqslant s_j,\quad \forall j=1,\ 2,\ \cdots,\ k,$$

但$\sum n_j=\sum s_j=n$，因此$n_j=s_j$．

换言之，子空间$\mathfrak{M}_j$的维数等于特征值λ_j的重数．进一步，我们知道可以找到x，使$(A-\lambda_j I)^{\nu_j}x=0$，而$(A-\lambda_j I)^{\nu_j-1}x\neq 0$，且易证$x$，$(A-\lambda_j I)x$，$\cdots$，$(A-\lambda_j I)^{\nu_j-1}x$为线性独立．由于这些元素都属于$\mathfrak{M}_j$，故$\mathfrak{M}_j$的维数至少等于$\nu_j$，即：$\nu_j\leqslant n_j=s_j$．

因此多项式$\delta(\lambda)$能除尽$\Delta(\lambda)$，从而$\Delta(A)=0$ (Hamilton-Cayley 定理)．

§4．若$f(z)\in\mathscr{F}(A)$，则函数

$$g(z)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=0}^{\nu_j-1}\frac{(z-\lambda_j)^m}{m!}f^{(m)}(\lambda_j)e_j(z)$$

也属于$\mathscr{F}(A)$，并且它们一起满足§2附注1的条件，因而有$f(A)=g(A)$．由定理2可得到：

定理3 若$f\in\mathscr{F}(A)$，则有表示式：

$$f(A)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=0}^{\nu_j-1}\frac{(A-\lambda_j I)^m}{m!}f^{(m)}(\lambda_j)E_j. \tag{8}$$

§5．由(8)式可得出这样的结论：对任一$x\in\mathfrak{M}_j$，有

$$(f(A)-f(\lambda_j)I)^{\nu_j}x=0.$$

由此式以及(6)，(7)推得，对任何$x\in V^n$有

$$\prod_{j=1}^{k}(f(A)-f(\lambda_j)I)^{\nu_j}x=0,$$

或

$$\prod_{j=1}^{k}(f(A)-f(\lambda_j)I)^{\nu_j}=0. \tag{9}$$

另一方面，若x是A的对应于λ_j的特征向量，则有$(A-\lambda_j I)x=0$，故$x\in\mathfrak{M}_j$．再由(8)式得$f(A)x=f(\lambda_j)x$．这一结果以及(9)式证明$f(\lambda_1)$，$\cdots$，$f(\lambda_k)$是$f(A)$的特征值，它们的指标分别不大于ν_1，$\cdots$，ν_k．(注意：若$f(\lambda_1)=f(\lambda_2)$，则对应的指标不超过

$\sup(\nu_1, \nu_2)$.)

今设 $g\in\mathscr{F}(A)$，算子 $B=g(A)$ 有特征值

$$g(\lambda_1),\ \cdots,\ g(\lambda_k),$$

它们可能不是互不相同的. 再设

$$f\in\mathscr{F}(B),\ C=f(B)=(f\circ g)(A),$$

则 C 有特征值 $f(g(\lambda_1))=(f\circ g)(\lambda_1), \cdots, (f\circ g)(\lambda_k)$. 函数 $h(z)=(f\circ g)(z)$ 属于 $\mathscr{F}(A)$，故可定义 $h(A)$. 与 A 的指标为 ν 的特征值 λ 相对应，有 $B=g(A)$ 与 $C=(f\circ g)(A)$ 的特征值 $g(\lambda)$ 与 $(f\circ g)(\lambda)$，其指标依次为 μ 与 σ. 我们这样来构造多项式 $q(z)$ 与 $p(z)$，使对任一 $\lambda\in\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$，有

$$p^{(m)}(g(\lambda))=f^{(m)}(g(\lambda)),\qquad 0\leqslant m\leqslant\sup(\nu,\ \mu)-1,$$

并且记 $r(z)=(p\circ q)(z)$. 那末就有

$$B=g(A)=q(A),\qquad C=f(B)=p(B).$$

就是说，

$$(f\circ g)(A)=(p\circ q)(A).$$

另一方面，我们又有

$$h^{(m)}(\lambda)=(f\circ g)^{(m)}(\lambda)=(p\circ q)^{(m)}(\lambda)=r^{(m)}(\lambda),$$
$$0\leqslant m\leqslant\sup(\nu,\ \mu)-1,$$

这就证明了 $h(A)=r(A)$. 但是 $r(z)=(p\circ q)(z)$，由于 p, q, r 都是多项式，故必 $r(A)=(p\circ q)(A)$. 因此 $h(A)=(f\circ g)(A)$. 这样，我们就证明了

定理 4 若 $g\in\mathscr{F}(A)$，$f\in\mathscr{F}(g(A))$，又 $h(z)=(f\circ g)(z)$，则有

$$h\in\mathscr{F}(A)\quad 及\quad h(A)=(f\circ g)(A).$$

附注 设 $f\in\mathscr{F}(A)$，又 f_p, $p=1, 2, \cdots$ 是一个无限序列，$f_p\in\mathscr{F}(A)$，且 $\lim\limits_{p\to\infty} f_p^{(m)}(\lambda_j)=f^{(m)}(\lambda_j)$，对一切 $m, j: 0\leqslant m\leqslant\nu_j-1,\ 1\leqslant j\leqslant k$，则由(8)可导出 $f_p(A)\to f(A)$.

如果应用这个附注于 $f=e^z$,

$$f_p=1+\frac{z}{1}+\cdots+\frac{z^p}{p!},$$

则可导出

$$e^A=\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=0}^{\nu_j-1}\frac{(A-\lambda_j I)^m}{m!}e^{\lambda_j}E_j=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{A^p}{p!}.$$

也可应用到定理 3, 4, 取其中的 $g=\log z$, 且设 0 不是 A 的特征值,那末就有

$$\log A=\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{\nu_j-1}\frac{(A-\lambda_j I)^m}{m}\frac{(-1)^{m-1}}{\lambda_j^m}E_j+\sum_{j=1}^{k}\log\lambda_j\cdot E_j,$$

这时由于$(f\circ g)(z)=z$, 故有$(f\circ g)(A)=A$, 即

$$e^{\log A}=A.$$

第 二 章

线性微分方程

设

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x \tag{1}$$

是一阶线性微分方程，其中 x 是 n 维向量空间 V^n 中的元素，其坐

是实变量 t 的连续函数．方程(1)等价于一组 n 个一阶线性方程：

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}(t)x_j,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

在 V^n 中引进“模”是有用的．我们取 $\|x\|=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$．同样，一切具有实或复的元素的 n 阶方阵的全体构成一个 n^2 维的向量空间，其中的模可取为 $\|A\|=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$．

不难证明下列两个初等的结果：对任何两个 $n\times n$ 方阵 A 与 B，

$$\|Ax\|\leqslant\|A\|\cdot\|x\|,\ \forall x\in V^n;\quad 及\quad \|A\cdot B\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|.$$

注意：n 阶线性微分方程：

$$u^{(n)}+a_1(t)u^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)u=0$$

(其中 $u(t)$ 是 t 的数量函数) 可借引进向量 $x=\{u,\ u',\ u'',\ \cdots,\ u^{(n-1)}\}$ 和矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

而化为(1)的形式．

§1. 方阵豫解式

考虑初值问题

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X, \tag{2}$$

$$X(0)=I. \tag{3}$$

其中 $A(t)$ 是 $n\times n$ 方阵，关于实变量 $t\in[0, t_0]$ 为连续，$X(t)$ 是未知的 $n\times n$ 方阵，I 是单位方阵.

系统(2)，(3)等价于积分方程

$$X(t)=I+\int_0^t A(s)X(s)ds. \tag{4}$$

后者可用逐步逼近法来求解：

$$X_0=I, \cdots, X_m(t)=I+\int_0^t A(s)X_{m-1}(s)ds. \tag{5}$$

事实上，若 $X_{m-1}(t)$ 对 t 连续，则 $X_m(t)$ 亦然，因此可依次算出所有的 $X_m(t)$.

由(5)可导出

$$\|X_m(t)-X_{m-1}(t)\|\leqslant\int_0^t\|A(s)\|\cdot\|X_{m-1}(s)-X_{m-2}(s)\|ds.$$

记 $\alpha=\sup\limits_{s\in[0,t_0]}\|A(s)\|$，用归纳法可证

$$\|X_m(t)-X_{m-1}(t)\|\leqslant\|I\|\cdot\frac{(\alpha t)^m}{m!}\leqslant\|I\|\frac{(\alpha t_0)^m}{m!}.$$

由此可见 $X_m(t)$ 当 $m\to\infty$ 时按模收敛于一方阵 $X(t)$，均匀地关于$[0, t_0]$中的 t；$X(t)$ 是连续的，且由(5)式取极限容易推得 $X(t)$ 是(4)的解.

此解是唯一的，因为任一可积分的方阵 $Z(t)$，如果它满足

$$Z(t)=\int_0^t A(s)Z(s)ds,$$

则必为连续，且对一切正整数 m，满足不等式

$$\|Z(t)\|<\sup_{s\in[0,t_0]}\|Z(s)\|\cdot\frac{(\alpha t)^m}{m!}, \quad t\in[0, t_0],$$

因此 $Z=0$.

(4)的连续方阵解 $X(t)$ 称为(1)或(2)的方阵豫解式.

由此事实出发，显见初值问题:

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x,\ x(0)=c,\ c\in V^n$$

的解是 $x(t)=X(t)c$.

从(2), (3)容易导出一个重要结果，即方阵豫解式永远是非奇异的. 应用方阵 $X(t)$ 的行列式对 t 求导的规则，即：它应等于依次把 $\det X(t)$ 的某一行求导而保持其他各行不动，如此得到的 n 个行列式之和，然后用(2)来表示这些含导数的行列式，即得

$$\frac{d}{dt}(\det X)=(\sum a_{ii}(t))\det X.$$

解此微分方程，并注意 $\det X(0)=1$, 即得

$$\det X(t)=\exp\left(\int_0^t\sum_i a_{ii}(s)ds\right)\neq 0. \tag{6}$$

附注 1) 若 A 与 t 无关，则 $X(t+s)$ 与 $X(t)X(s)$ 对于固定的 s 都是矩阵方程 $\frac{dZ}{dt}=AZ$ 的解，并且满足同样的初值条件: $Z(0)=X(s)$. 故由唯一性即得: $X(t+s)=X(t)X(s)$, 特别，有 $X^{-1}(t)=X(-t)$.

2) 若 A 与 t 无关，则对(2), (3)的解 $X(t)$ 成立 $AX(t)=X(t)A$. 事实上，矩阵 $Z(t)=AX(t)-X(t)A$ 是方程

$$\frac{dZ}{dt}=A\frac{dX}{dt}-\frac{dX}{dt}A=A(AX-XA)=AZ$$

的解，且满足条件 $Z(0)=0$, 因此 $Z(t)=0$. 类似地，若 B 是一个和 A 可交换的常方阵，则亦有 $BX(t)=X(t)B$.

§2. 非齐次问题：常数变易法

现在要找下列初值问题的解:

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t), \tag{7}$$

$$x(0)=c, \tag{8}$$

其中 $A(t)$ 是关于 $t\in[0,\ t_0]$ 连续的方阵，$f(t)$ 是取值于 V^n 中的函数，在 $[0,\ t_0]$ 上连续，$x(t)$ 是取值于 V^n 中的函数，c 是 V^n 中的已给元素.

(7)，(8)的任一解都可以按下面的形式求之：

$$x = X(t)u, \tag{9}$$

其中 $X(t)$ 是(2)，(3)的方阵解，u 满足方程：

$$\frac{dX}{dt}u + X\frac{du}{dt} = AXu + f(t),$$

就是说：
$$X(t)\frac{du}{dt} = f(t),\ u(0) = c.$$

那末我们有
$$u(t) = c + \int_0^t X^{-1}(s)f(s)ds,$$

从而问题(7)，(8)有唯一的解：

$$x(t) = X(t)c + \int_0^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds. \tag{10}$$

当 A 是常方阵时可写：

$$x(t) = X(t)c + \int_0^t X(t-s)f(s)ds. \tag{11}$$

§3. 当 A 为常方阵时方阵豫解式的表示式

级数 $Z(t) = \sum\limits_{m\geqslant 0} t^m \dfrac{A^m}{m!}$ 关于 $t \in [0, t_0]$ 均匀收敛，因为

$$\left\|\frac{t^m A^m}{m!}\right\| \leqslant t_0^m \frac{\|A\|^m}{m!}.$$

同样，由此级数形式地对 t 求导而得的级数 $\sum\limits_{m\geqslant 1} t^{m-1}\dfrac{A^m}{(m-1)!}$ 也是如此，因而它自然应该用 $\dfrac{dZ}{dt}$ 来表示，并且显然有

$$\frac{dZ}{dt} = A\sum_{m\geqslant 1} t^{m-1}\frac{A^{m-1}}{(m-1)!} = AZ, \quad Z(0) = I,$$

因此可以把 $Z(t)$ 与 $X(t)$ 等同起来.

另一方面，多项式 $p_m(z) = 1 + \dfrac{tz}{1} + \cdots + \dfrac{t^m z^m}{m!}$ 和它的逐次导数对一切复数 z 都收敛于 e^{tz} 和它的逐次导数. 故由第一章的定理可推出 $\lim\limits_{m\to\infty} p_m(A) = e^{At}$，就是说：

$$X(t) = e^{At} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{q=0}^{\nu_j-1}\frac{(A-\lambda_j I)^q}{q!}t^q e^{\lambda_j t}E_j, \tag{12}$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 是 A 的不相同的特征值，指标分别为 $\nu_1, \cdots, \nu_k$，而 $E_1, \cdots, E_k$ 是与 A 的谱分解相关连的投影算子.

公式(12)之所以有趣，是因为它提供 $X(t)$ 的解析结构. 特别，$X(t)$ 的元素都是指数函数 $e^{\lambda_j t}$ 与次数不高于 ν_j-1 的 t 的多项式之积的有限和. 由此可推知：$t\to+\infty$ 时 $X(t)\to 0$，当且仅当 A 的一切特征值都具有负实部. 若 $\mathrm{Re}\,\lambda_j<-\sigma<0$，$\forall j=1, 2, \cdots, k$，则必存在一数 $a>0$，它只依赖于 A 和 σ，使得 $\|X(t)\|<ae^{-\sigma t}$，$\forall t\geqslant 0$.

§4. 周期系数方程，Floquet 的理论

设有微分方程

$$\frac{dY}{dt}=A(t)Y, \tag{13}$$

其中方阵 $A(t)$ 是实变量 t 的连续周期函数，周期为 T. 以 $X(t)$ 记(13)的方阵豫解式，那末显见 $X(t+T)$ 也是(13)的解. $X(t+T)$ 与 $X(t)X(T)$ 都是(13)的解，且在 $t=0$ 取相同的值，故必恒等：

$$X(t+T)=X(t)X(T). \tag{14}$$

方阵 $X(T)$ 为非奇异，故可定义 $B=\dfrac{1}{T}\log X(T)$，或

$$X(T)=e^{BT}. \tag{15}$$

记

$$Q(t)=X(t)e^{-Bt}, \tag{16}$$

则由(14)与(15)可得

$$Q(t+T)=X(t+T)e^{-B(t+T)}=X(t)e^{BT}\cdot e^{-BT}\cdot e^{-Bt}=Q(t).$$

由此可见，由(16)式定义的 $Q(t)$ 是可微的，可逆的，周期为 T 的周期方阵，而(13)的方阵豫解式可写为：$X(t)=Q(t)e^{Bt}$，其中 B 是常方阵.

这样，研究方程 $\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$ 是否存在周期为 T 而取值于 V^n 中的周期解 $x(t)$ 的问题就变为：寻找 V^n 的一个元素 c，使 $e^{Bt}c$ 有周期 T，亦即