带有时滞的动力系统的运动稳定性

秦元勳　刘永清　王　联

科学出版社

带有时滞的动力系统的运动稳定性

秦元勳　刘永清　王　联　著

科学出版社

內 容 簡 介

动力系統的自动控制一般都有时間滞后的因素，但工程师在处理这类問題时，往往忽略这一因素．本书系統地研究并处理了：在什么条件下，可以容許这种省略．当时滞影响大时，工程上要求对任何时滞，系統都要稳定．对这种全时滞的情形，本书給出了处理方法．本书为自动控制工作者及力学工作者提供了系統的方法与結論．也为数学工作者提供了一类研究問題．

带有时滞的动力系統的
运动稳定性

秦元勳 刘永清 王 联 著

*

科学出版社出版 （北京朝阳門大街117号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1963年11月第一版 书号：2906 字数：171,000

1963年11月第一次印刷 开本：850×1168 1/32

（京）0001—3,550 印张：6 5/8

定价：1.10元

序

随着自动控制技术的发展，时滞对于动力系統运动稳定性的影响受到技术工作者的广泛应用和研究工作者的更多的重視。

本书比較系統地探討了这方面的問題，其中若干方法与結果可适用于一般的运动稳定性問題。书中主要部分是1957年至1960年間刘永清、王联．蔡燧林等同志和我在中国科学院数学研究所共同进行的工作，其中也包括我們提交1960年6月在莫斯科召开的国际自动化会議的报告的詳細証明。

在研究工作进行过程中，中国自动化学会的同志們，特别是錢学森教授提供了宝貴的意見，推动了工作进一步地深入。特致謝意。

为了使本书自成系統，我們加上了一章預备知識，希望对讀者有所帮助。欢迎讀者批評与指正。

秦元勳

1960年于北京

目　　录

第一章 总 論

§1. 問題的提出

大量的自然現象可以用动力系統来描述,例如:鐳元素的放射衰減的規律可以表示为

$$\frac{dR(t)}{dt} = -KR(t);$$

单摆振动的規律可以表示为

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi(t);$$

振蕩迴路中的电量变化的規律可以表示为

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = 0;$$

行星运动中二体間題的运动規律可以表示为

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -KmM\frac{x(t)}{(x^2(t)+y^2(t))^{3/2}},$$

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -KmM\frac{y(t)}{(x^2(t)+y^2(t))^{3/2}}$$

等等. 所有这些現象的数学模型都可用微分方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \tag{1.1}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

及其初始条件

$$x_i(0) = x_i^0 \tag{1.2}$$

来描述. 这些現象都看作时間 t 的函数. 在写成这种数学模型时,方程組 (1.1) 的右方和左方都只是同一时間 t 的函数, 也就是説,我們假定了事物发展的趋向(方程組 (1.1) 的左方) 只由其当前的

状态(方程組(1.1)的右方的 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$) 来决定，而不明显地依赖于其过去的状态. 以鐳的放射衰減为例，当前鐳的质量 $R(t)$ 的衰減率 $\frac{dR(t)}{dt}$ 只与当前鐳的質量 $R(t)$ 有关，而与过去的質量无关. 又例如在二体問題中，当前二个星球間之吸引力 $\left(m\frac{d^2x(t)}{dt^2}, m\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)$ 只与当前二个星球間的位置 $(x(t), y(t))$ 有关，而与过去二个星球間的位置无关. 可以簡单地說，这些現象都是瞬时起作用的. 在这种假設下的数学模型，与对大量事物的运动規律的描述是很好地符合的.

在研究自然現象中，客观事物的規律是复杂的和多样的. 不少的情形不仅需要考虑到事物的当前状态，而且还需要考虑事物过去的历史. 这两者的影响可能同时直接起着作用.

例 1. 在弹性理論中，考虑到“遺留效应”时，导出了方程[1]

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + a^2u(t) + \int_0^t K(t-\tau)\frac{du(\tau)}{d\tau}\,d\tau = f(t).$$

例 2. 在人口增长理論中，出現了所謂的“除旧更新”方程[2]

$$u(t) = f(t) + \int_0^t u(t-\tau)\frac{dG(\tau)}{d\tau}\,d\tau.$$

例 3. 在火箭燃燒的控制理論中，得到方程[3]

$$\frac{du(t)}{dt} + (1-n)u(t) + nu(t-\tau) = 0.$$

例 4. 在数理統計中，关于資本主义經济的周期性危机有过下面形式的方程[4]

$$\frac{du(t)}{dt} = au(t) + bu(t-\tau) + f(t).$$

例 5. 在近代核物理中用計数器測量質点源強度，引出方程[5]

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = -a[\pi(t) - \pi(t-\tau)e^{-a\tau}].$$

这些例子的共同特点之一是：方程右方不只依賴于 $u(t)$，而且依賴于 $u(t-\tau)$，$\tau > 0$ (或 $u(\tau)$，$\tau < t$)，亦即当前发展的趋向

明显地依赖于过去的历史状况，也就是說，我們需要考虑时間滞后的現象，或簡称为"时滞"現象. 这时的数学模型便不再是方程組(1.1)的类型，而应当是微分差分方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=f_i(x_1(t),\, x_2(t),\, \cdots,\, x_n(t),\, x_1(t-\tau_{i1}),$$
$$x_2(t-\tau_{i2}),\, \cdots,\, x_n(t-\tau_{in})) \tag{1.3}$$
$$\tau_{ij}>0 \quad i,\, j=1,\, 2,\cdots,\, n.$$

这里一般說来，τ_{ij} 又可以是 t 的函数；至于初始条件，也不再象(1.2)那样簡单. 这点下节再談到.

在自动控制問題中，由于在自动控制的任何系統中都存在着时滞(电流的,机械的,热的等等)，因而实际上的控制行动总是落后于理論上的未加时滞所得出的值[6]；尤其是当控制的精确度要求提高时，問題便更加突出. 在工程处理方面，一般是略去了时滞不加考虑，也就是将方程組(1.3)中的 τ_{ij} 均用零代替，这样就得到方程組(1.1). 用普通方法解(1.1)所得的結論，便看作是(1.3)的結論，也就是說，可用微分方程来代替微分差分方程. 因此，在数学上提出了一系列的問題，即这种作法的理論根据何在？在本书中，我們着重討論，带有时滞的动力系統的运动稳定性問題是否可以簡化为不带时滞的动力系統的运动稳定性問題，在什么条件下这种簡化是有根据的以及在什么条件下这种簡化会导出錯誤的結論. 例如，虽然系統

$$\frac{dx(t)}{dt}=x(t)-2x(t)=-x(t)$$

是稳定的，但是当 τ 比較大时，系統

$$\frac{dx(t)}{dt}=x(t)-2x(t-\tau)$$

则是不稳定的. τ 使其系統稳定的界限必須加以确定，以便在这时可用微分方程代替微分差分方程. 从稳定性的角度来看，τ 的大小是有条件的. 决定这种条件是一种类型的問題.

这里还有另一种类型的問題. 考虑到实际上 τ 的大小的测定是困难的，因此要問，对任何大于零的 τ，是否微分差分方程組

(1.3) 可用微分方程組 (1.1) 代替而仍保持其运动稳定性的特点. 这时若在 τ 上不加条件, 则在方程組(1.3)的系数上便需要加上条件. 例如,虽然系統

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t) = (a + b)x(t)$$

当 $a + b < 0$ 时是稳定的,但是欲使系統

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t - \tau)$$

对所有的 $\tau > 0$ 都是稳定的,其充分而且必要的条件是

$$a + b < 0, \quad a - b \leqslant 0$$

同时满足. 这里增加了一个新的条件 $a - b \leqslant 0$. 这种新条件的确定,构成了另一种类型的問題.

运动稳定性的处理,有經典的李雅普諾夫的工作[7]. 不过这是对于微分方程組 (1.1) 的. 要将这些方法应用到微分差分方程組 (1.3), 必然出現一系列的新問題, 特別是代数方程的根的实部符号的判定, 要用超越方程的根的实部符号的判定来替代. 这便形成又一种类型的問題.

为了使理論工作可以直接有助于工程技术的需要, 就不能滿足于一般經典的存在性結論,而必須給出明显的表达公式,使得实际工作者可以直接而簡单地驗証这些条件, 以便保証設計工作的正确性. 例如,不能滿足于已有的李雅普諾夫函数的存在性定理, 而需要給出明显的具体公式. 这又形成一种类型的問題.

本书的目的在于系統地闡述上述各种类型的問題, 而以带时滞的动力系統的运动稳定性的考虑为中心. 在国际上, 这些問題都正在发展中.

§2. 問題的性質与运动稳定性的定义

在本节我們将介紹若干基本假定及定义, 还将叙述而不証明与此有关的定理,因为它們不是本书的主題.

首先是关于初值問題的提法[8], 以一阶的常时滞的情形为例,

方程

$$\frac{du(t)}{dt}=f(t,u(t),\ u(t-\tau))\quad \tau>0 \tag{2.1}$$

的初值不能只給在某一瞬时 $t=t_0$ 而必須給在一个区間，例如給定

$$u(t)=\varphi(t),\quad 当\ t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0.$$

同样，对于一阶的变时滯的情形来説，方程

$$\frac{du(t)}{dt}=f(t,u(t),u(t-\tau(t))),\tau(t)\geqslant 0 \tag{2.2}$$

的初值要給定在一个初始点集上，例如要决定 $t\geqslant t_0$ 时的解 $u(t)$，必須給定

$$u(t)=\varphi(t),\ 当\ t\in E_{t_0},$$

此地 E_{t_0} 表示一个初始点集，它由 $t=t_0$ 的点，及当 $t\geqslant t_0$ 时，$t-\tau(t)\leqslant t_0$ 的 $t-\tau(t)$ 的点所組成．在特殊情形中，E_{t_0} 也可能退化为一点．

在上述这些情形中，$\varphi(t)$ 称为初值函数．初值問題即是在給定連續的初值函数的条件下，要求連續的解 $u(t)$.

对于具有时滯的 n 阶方程

$$\frac{d^nu(t)}{dt^n}=f\left(t,u(t),\cdots,\frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}},u(t-\tau(t)),\cdots,\right.$$
$$\left.\frac{d^{n-1}u(t-\tau(t))}{dt^{n-1}}\right),\qquad \tau(t)\geqslant 0, \tag{2.3}$$

它的初值問題是：在初始点集 E_{t_0} 上給定初始函数

$$u(t)=\varphi(t)\ 及\ \frac{d^ku(t)}{dt^k}=\varphi^{(k)}(t),\ k=1,2,\cdots,n-1,$$

要决定解 $u(t)$，使得在 $t\geqslant t_0$ 均为連續，并且其导函数一直到 $n-1$ 阶均为連續．

关于导数的要求，如果 E_{t_0} 退化为一点，或 t_0 是 E_{t_0} 中的孤立点，則在 t_0 点要求給以右方导数

$$\left.\frac{d^ku(t)}{dt^k}\right|_{t=t_0+0}=u_0^{(k)},\ k=0,1,2,\cdots,(n-1).$$

关于导数問題,有时出現所謂"中立型"方程. 以一阶的最簡单形式为例,方程

$$\frac{du(t)}{dt}=f\left(t, u(t), u(t-\tau(t)), \frac{du(t-\tau(t))}{dt}\right) \tag{2.4}$$

的初始函数是:在初始点集 E_{t_0} 上給定

$$u(t)=\varphi(t) \text{ 及 } \frac{du(t)}{dt}=\frac{d\varphi(t)}{dt},$$

欲求 $t \geqslant t_0$ 时的連續解 $u(t)$.

在討論运动稳定性之前,首先要提到存在性及唯一性的条件. 以(2.2)为例, 如果 f, $\varphi(t)$ 及 $\tau(t)$ 都是連續函数, 并且 $f(t, u(t), u(t-\tau))$ 对 $u(t)$ 及 $u(t-\tau)$ 两变量均满足李卜西慈条件

$$|f(t, x_1, y_1)-f(t, x_2, y_2)| \leqslant K\{|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\},$$

則可保証解的存在性及唯一性. 同类性質的条件也可加到其他各种类型的方程. 这种存在性及唯一性的充分条件, 本书中均設其已满足.

順便提及一点,当在某时某个 t,值 $\tau(t)$可能为零时,則中立型如(2.4)之唯一性条件将非常复杂.

現在来叙述解的稳定性. 对于不带时滞的微分方程而言, 解的稳定性的定义按李雅普諾夫意义可表述如下:

設方程組

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; t), \quad i=1, 2, \cdots, n \tag{2.5}$$

具有显易解 $x_i \equiv 0, i=1, 2, \cdots, n$, 亦即要求

$$f_i(0, 0, \cdots, 0; t) \equiv 0, \quad i=1, 2, \cdots, n$$

則这組显易解按李雅普諾夫意义称为稳定的,如果满足下述条件:

对任何給定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使对任何的初值 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, t^0(=0)$,只要

$$|x_i^0|<\delta,$$

則(2.5)的以 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, t^0)$ 为初值的解

$$x_i=x_i(t), \quad i=1, 2, \cdots, n$$

均满足条件

$$|x_i(t)| < \varepsilon.$$

此式对任何 $t \geqslant t^0$ 成立.

在上述定义中,如果不一定能有 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 則显易解 $x_i\equiv 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 称为按李雅普諾夫意义不稳定.

在稳定的情况下,如果还有条件

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

則显易解 $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 称为按李雅普諾夫意义漸近稳定.

这里所取的任意值 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$, 实际上表示初始值受到一个扰动, 当然, 扰动在任何时刻均可能发生,而不仅限于某个特定时刻 $t = t_0$ 才可能发生. 但是,对于不带时滞的微分方程而言,并不需要特别指出某一时刻 t_0, 这是因为对任何 t_0 而言, 如果得到的运动按李雅普諾夫意义是稳定的,則对任何 $\bar{t} > t_0$, 也都可以証明运动按李雅普諾夫意义是稳定的. 这只要注意到微分方程的解对于初值的連續依賴性条件以及解可以在 t 减少的方向継續延长的可能性,便足以証明这点.

但是,对于带时滞的方程而言,一般地解不能在 t 减少的方向継續延长,举一个簡单例子来説明这点.

給定方程

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t-1),$$

并且給定初始点集 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上之初始函数

$$x(t) = \varphi(t).$$

要将此解向 $t < 0$ 延长,則有

$$x(t-1) = \frac{dx(t)}{dt} = \varphi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$x(t-2) = \frac{dx(t-1)}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x(t-n+1) = \frac{d^n\varphi(t)}{dt^n}, \ 0 \leqslant t \leqslant 1, n = 1, 2, \cdots$$

因此,欲使 $x(t)$ 在 $t \leqslant 0$ 方向延长,便需要 $\varphi(t)$ 有无限多次微分.

解不能在 t 减少的方向任意延长这一事实，使得稳定性对 t_0 的选取也不能任意. 对于在初始点集 E_{t_0} 上之初始扰动函数为稳定的解,有可能对于其他时間 $\bar{t}_0$, 对在初始点集 $E_{\bar{t}_0}$ 上之初始扰动函数是不稳定的.

为了具体說明这种現象，我們举一个例，研究最簡单的方程

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t) - u(t - \tau(t)), \quad t \geqslant 0$$

其中 $\tau(t)$ 取为

$$\tau(t) = t(1 - e^{-t}),$$

则当 $t \geqslant 0$ 时，$\tau(t) \geqslant 0$. 这时方程化为

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t) - u(te^{-t}), \quad t \geqslant 0.$$

現在我們来証明,对于不同的初始点集,显易解的稳定性質是不相同的.

对初始点集 E_0 而言,满足条件

$$t \geqslant 0, \quad te^{-t} \leqslant 0$$

的 te^{-t} 的值只有一点,即 $t = 0$. 故 E_0 就是一点 $t = 0$. 对于 E_0 上之扰动而言,这个方程之显易解 $u(t) = 0$ 是稳定的,这是因为如果初始时間是 $t_0 = 0$, 则这个方程的通解就是 $u(t) = C$,此地 C 是一个任意常数.

另一方面,如果初始时刻是 $t = t_1 > e^{-1}$, 则可以証明,对初始点集 E_{t_1} 而言,經过某种微小扰动，便可使显易解是不稳定的,这是因为这时初始点集是一个孤立点 $t = t_1$ 和一个綫段,这个綫段由同时满足条件

$$t \geqslant t_1, \quad te^{-t} \leqslant t_1 \quad (t \geqslant 0)$$

之 te^{-t} 所組成,而函数 te^{-t} 之最大值可算得是 e^{-1}. 但已取定 $t_1 > e^{-1}$, 故 t_1 不在这一綫段上. 因此可取初值函数

$$u(t_1) = \delta$$

及

$$u(t) = \frac{\delta}{2} \text{（当 } t \in E_{t_1} \text{ 但 } t \neq t_1 \text{ 时）},$$

这里 δ 可取任意小之正数. 这时方程有特解

$$u(t)=\frac{\delta}{2}\left[e^{(t-t_1)}+1\right],\ 当\ t\geqslant t_1.$$

这样的解当 $t\to+\infty$ 时取值 ∞,从而得到显易解的不稳定性.

因此,我們对于稳定性的定义还需要进一步加強,即不只要求对某一时刻 $t=t_0$ 之 E_{t_0} 为稳定,而且要求对所有的 $\bar{t}_0\geqslant t_0$ 之 $E_{\bar{t}_0}$ 均为稳定. 具体定义如下:方程

$$\frac{du_i(t)}{dt}=f_i(t;u_1(t),\cdots,u_n(t);u_1(t-\tau_{1i}(t)),\cdots,$$

$$u_n(t-\tau_{ni}(t))),\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\tau_{ij}(t)\geqslant 0$$

且在满足初始点集 E_{t_0} 上給定的初始函数

$$u_i(t)=\varphi_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

之解(記作)

$$[u_i(t)]_{\varphi_i(t)}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

称为稳定的,如果对于任何 $\bar{t}_0\geqslant t_0$ 及任何 $\varepsilon>0$, 可以取 $\delta(\bar{t}_0,\varepsilon)$ 使得对于在初始点集 $E_{\bar{t}_0}$ 上定义的函数組 $\psi_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$,只要

$$|\psi_i(t)-[u_i(t)]_{\varphi_i(t)}|<\delta(\bar{t}_0,\varepsilon),\ i=1,2,\cdots,n$$

则由 $\psi_i(t)$ 作为初始函数之解$[u_i(t)]_{\psi_i(t)}$, 当 $t\geqslant\bar{t}_0$ 时,满足不等式

$$|[u_i(t)]_{\psi_i(t)}-[u_i(t)]_{\varphi_i(t)}|<\varepsilon,\ i=1,2,\cdots,n.$$

如果对某个 $t\geqslant t_0$ 及某个 $\varepsilon>0$, 此种 $\delta(\bar{t}_0,\varepsilon)$ 不存在, 则 $[u_i(t)]_{\varphi_i(t)}$ 称为不稳定.

如果在稳定的情形中,进一步还有

$$\lim_{t\to\infty}|[u_i(t)]_{\psi_i(t)}-[u_i(t)]_{\varphi_i(t)}|=0,$$

则 $[u_i(t)]_{\varphi_i(t)}$ 称为漸近稳定.

最后,我們还要附带指出,对 n 阶方程而言,初始函数有 $n-1$ 阶微商. 当 n 阶方程化为 n 个一阶方程的方程組时, 初始函数族可以任意,因此也就扩大了这一范围. 两者之間不完全等价,后者稳定时便可导出前者稳定. 实际上不等价的情形只是些特例, 所

以本书中均采取方程組的形式.

§3. 問題的特点及解法的基本思想

对于稳定性問題的解法，一般有直接解法和間接解法两种. 前者基本上是直接写出解的形式，并对其稳定性加以研究. 这种方法一般导致特征根問題的研究. 后者基本上是利用某种閉曲面的存在，来研究动力系統軌綫与这种閉曲面的关系，以判定稳定性. 这种方法一般导致李雅普諾夫函数問題的研究. 現在結合带时滞系統的特点加以具体化.

直接解法. 研究方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})x_j(t),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3.1}$$

及方程組

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}x_j(t)+b_{ij}x_j(t-\tau)) \tag{3.2}$$

$$\tau>0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

方程組(3.1)的显易解为漸近稳定的充要条件是特征方程

$$D(\lambda)\equiv|a_{ij}+b_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=0 \tag{3.3}$$

的所有特征根 λ 的实数部分为負. 这个条件可用路斯霍尔維茨条件来判定. 这个方程的根共 n 个.

用拉氏变换写出方程組(3.2)的解以后，也有类似的要求. 可以証明，方程組(3.2)的显易解为漸近稳定的充要条件是特征方程

$$D(\lambda,\tau)\equiv|a_{ij}+b_{ij}e^{-\lambda\tau}-\delta_{ij}\lambda|=0 \tag{3.4}$$

的所有特征根 λ 的实数部分是負的. 这是一个超越方程，它有无限多个根 λ. 直到現在为止，只有当 $n=1$，亦即最簡单的情形:

$$a+be^{-\lambda\tau}-\lambda=0$$

才对任給的 a, b, τ（实数）有判定公式，并且是超越判定，而不是代数判定. 当 $n\geqslant 2$，还沒有見到給出任何公式. 因此，这是需要探討的問題.

我們从另一种考虑出发. 一般工程技术工作者常常将时滞略

去不計，也得到所要的結果，这是因为 τ 常常是較小的．用数学形式表出，这便是用方程組(3.1)代替(3.2)，只要 $\tau \geqslant 0$ 足够小便可以了．这等于要求証明下面的断言：

設方程(3.3)的所有特征根 λ 之实部为負，要求証明，方程(3.4)的所有特征根 λ 之实部也是負的，并都小于某一負常数，只要 $\tau \geqslant 0$ 并且 τ 足够小．

这个断言并非显然．首先，方程(3.3)是代数方程，只有有限个根，而(3.4)是超越方程，有无限个根．因而两者的根之間不可能一一对应，因之不是一个簡单的微扰問題．其次，τ 足够小也不是一个决定性的理由．例如，取 $\tau < 0$，$|\tau|$ 任意小，均可証明(3.4)有正实部的根，这就是說，(3.2)的显易解当 $\tau < 0$ 时一定是不穩定的．

为解决这个困难，我們的作法可用下面的例子来說明．

考慮方程

$$a + be^{-\lambda\tau} - \lambda = 0, \quad \tau \geqslant 0,$$

研究 λ 的实部为正时根存在的可能性．这时因設

$$\mathrm{Re}(\lambda) > 0,$$

并且 $\tau > 0$，故有

$$|e^{-\lambda\tau}| < 1.$$

从而

$$|\lambda| = |a + be^{-\lambda\tau}| \leqslant |a| + |b|.$$

这就說明，如果有具正实部的特征根 λ，則

$$|\lambda| \leqslant |a| + |b|.$$

这样，在 $R(\lambda) > 0$ 的一側，只要考慮以原点为心、$|a| + |b|$ 为半径的半圓內部．現在利用 τ 可任意小的性質，可以决定，当 τ 足够小时，方程(3.3)及方程(3.4)在此半圓中的根之个数相等．这样便可得到，当(3.3)的根 λ 均具負实部时，(3.4)当 $\tau > 0$ 但足够小时，也有同样性質．也可得到 τ 的估值．同样，当(3.3)有根 λ 具正实部时，則(3.4)当 $\tau > 0$ 但足够小时，也具有同样性質．

这类特点，我們称之为等价性，亦即(3.3)和(3.4)关于稳定性