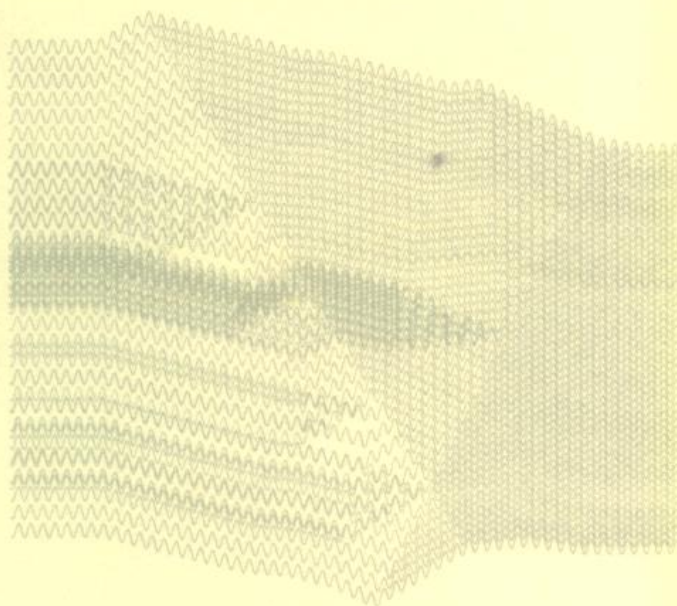


岩波講座 基礎工学 6

線形集中定数系論 II

高橋秀俊 著



岩波書店

岩波講座 基礎工学 6

線形集中定数系論

II

高橋 秀俊

岩



岩波講座 基礎工学 6 線形集中定数系論 II (全19巻/第16回配本)

1970年4月14日 第1刷発行 ©

東京都千代田区一ツ橋2-5-5 株式会社 岩波書店/精興社印刷・松岳社製本

目 次

第4章 周波数の関数としてのインピーダンス

4. 1 L, R, C 2端子回路のインピーダンス	127
4. 2 インピーダンス関数 $Z(s)$ の性質	131
4. 3 LC 回路	137
4. 4 蓄えられたエネルギー	143
4. 5 RC 回路と RL 回路	145
4. 6 周波数変換	152
4. 7 LRC 2端子の合成	155
4. 8 相互インダクタンスを用いない合成法	161
4. 9 多端子の場合の正実性	164
4.10 過渡現象	166
4.11 微分方程式の解法	169
4.12 演算子	173
4.13 フーリエ変換	175
4.14 分散関係(クラマースクロニヒの関係)	177
4.15 ボーデの関係	182

第5章 各種の集中定数系

5. 1 ラグランジュ関数とラグランジュ方程式	188
5. 2 電気系の集中定数化	192
5. 3 電流回路の動力学	198
5. 4 磁気回路	202
5. 5 一般電磁界	205
5. 6 電気回路のラグランジュ方程式	206
5. 7 力学系の集中定数化	208
5. 8 線形系のラグランジュ方程式	213
5. 9 電気機械類推(直接類推と双対類推)	218
5.10 電気機械結合系	222

5.11 電磁結合系	230
5.12 熱系と拡散系	238
5.13 構造力学(平面トラスの問題)	246

線形集中定数系論 I 目次

第 1 章 線形系の静的な取扱い
第 2 章 線形系の動的な取扱い
第 3 章 線形回路網の位相幾何学的な取扱い

線形集中定数系論 III 目次

第 6 章 線形系各論
第 7 章 線形系と対称性

線形集中定数系論 IV 目次

第 8 章 繰返し構造の線形集中定数系
第 9 章 可変定数系
第 10 章 ジャイロトリー線形系

表紙カット製作: 渡辺茂・槌屋治紀・藤野孝爾・幸村真佐男
(IBM データセンター設置 IBM 7090・プロッター使用)

第 4 章

周波数の関数としてのインピーダンス

第 2 章で特別な場合について行なった動的な現象に対する解析を，本章ではもっと一般の複雑な回路について行なう．その場合，回路のインピーダンスの周波数 ω の関数としての関数論的性質が問題の中心になる．このような理論は，与えられた回路のふるまいを論ずるのに重要であるだけでなく，逆に，与えられた性質をもった回路を求める問題(合成の問題)の解決をも与え，その意味で線形集中定数系の工学の基礎を形成する．

4.1 L, R, C 2 端子回路のインピーダンス

第 2 章で， L, R, C の 3 種の素子の直列結合に正弦波交流電圧を加えたとき，これに流れる電流について解析した．そこで得られた重要な結論は，電圧，電流を複素数と考え，またこの 2 端子を特徴づけるものとして(複素)インピーダンス Z を考えることによって，直流回路でのオームの法則と全く同じことが成り立ち，したがって，直列結合，並列結合等について，抵抗の結合と同じ規則が適用できることであった．そこで，この LRC 直列回路を一つの複合素子と考えるならば，これはインピーダンス $R + j(L\omega - 1/C\omega)$ によって特徴づけられ，このようなものをさらに複合した回路を考える場合にも，同じように抵抗回路について得られた解析方法を適用できることになる．すなわち，正弦波交流を扱う限り，そうして第 1 章の 1.12 節，1.14 節あるいは第 3 章全体にのべられているような回路の解析の手続きに関する限り，抵抗だけの回路も， L, C を含んだ回路も何等異なるところはないのである．

しかし，その結果の解釈あるいは利用ということになると，いくつかの違いがでてくる．第 1 に， L, C を含む場合は Z が複素数となること，第 2 に，その場合は Z は周波数 ω の関数であることである．工学的な立場からは，第 2

の点は、共振回路を使って、たとえばいろいろの周波数の成分の混ざった波の中から特定の周波数の信号を取り出す(濾波)，というような応用にもつながる。ところで、第2章では単純な直列，または並列回路だけを考えたが，このような立場からは， L, R, C のもっと複雑な回路をつくった場合， Z が ω の関数としてどんな変り方をするかということに興味がある。特に，通信，測定，制御等の方面では， ω のいろいろの特殊な関数になるような Z が要求される場合があるので，もっと一般に， Z が ω のどんな関数になり得るか，さらに進んで，ある与えられた関数を Z としてもつような回路を具体的に組み立てるにはどうしたらよいかというような問題(回路の合成)が提出される。これから考えるのはそのような問題を扱うための基礎となる事柄である。

まず，1.14節または3.4節の方法に従って， L, R, C の3種の素子から成る勝手な回路を解くことを考えよう。その方程式は

$$\left. \begin{aligned} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \cdots + Z_{1n}I_n &= V, \\ Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \cdots + Z_{2n}I_n &= 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + \cdots + Z_{nn}I_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

ここで Z_{ij} は $i \neq j$ のときには第 i ループと第 j ループの共通な部分にある素子のインピーダンスの代数和，つまり，両ループがそこで同じ向きに重なっていればプラス，逆向きに重なっていればマイナスの符号をつけて加えた和である。それらの素子は一般にコイル，抵抗，コンデンサーのいずれをも含み得るから，それらの $L, R, 1/C$ のそれぞれの代数和を L_{ij}, R_{ij}, D_{ij} と書くことによって

$$Z_{ij} = R_{ij} + j(L_{ij}\omega - D_{ij}/\omega) \quad (4.2)$$

と書くことができる。同様に， Z_{ii} は第 i ループの上のすべての素子のインピーダンスの総和であって，これもまた(4.2)の形に書けることは明らかである。あるいは $j\omega = s$ と書くと

$$Z_{ij} = L_{ij}s + R_{ij} + D_{ij}/s. \quad (4.3)$$

すなわち(4.1)はその係数がいずれも(4.3)のような s の関数であるような連立方程式である。

(4.1)を解くと

$$I_i = \frac{\Delta_{1i}}{\Delta} V. \quad (4.4)$$

ここで $\Delta = \det(Z_{ij})$ で Z_{ij} を成分とする n 次の行列式、 Δ_{1i} はその $(1, i)$ 成分に対する小行列式である。そこで電圧を加えた端子 1 から見たインピーダンスは

$$Z = \frac{V}{I_1} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}. \quad (4.5)$$

ここで、 Δ, Δ_{11} はいずれも ω または s の正負のべきから成る多項式、具体的には、 Δ は s^n から s^0 まで、 Δ_{11} は s^{n-1} から $s^{-(n-1)}$ までを含む多項式である（実際はそれより少ないこともある）。あるいは、

$$\left. \begin{aligned} P(s) &= s^n \Delta(s), \\ Q(s) &= s^n \Delta_{11}(s) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

と書くことによって、 $P(s), Q(s)$ は s のそれぞれ (高々) $2n$ 次、 $(2n-1)$ 次の整多項式となり、 Z は

$$Z = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (4.7)$$

と書かれる。即ち Z は s の高々 $2n$ 次の有理関数である。しかもその係数はすべて実数である。ということは、 $s=j\omega$ の ω に実数値を入れたときの Z の値はもちろん複素数であるが、形式的に s に実数値を入れた場合には、 $Z(s)$ は実数になるということである。そのことを Z は s の**実関数**であるということがある。また、そのことから、 $s=-j\omega$ としたときの (4.7) の値は、 $s=j\omega$ としたときの値の共役複素数になることが出てくる。すなわち

$$Z(-j\omega) = (Z(j\omega))^*. \quad (4.8)$$

Z が実関数であるということと、(4.8) がみたされるということは、同じことと思ってよい。なおまた、(4.8) がみたされなければならないことは、物理的に実在する電流を

$$I = I_0(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (4.9)$$

としたとき、実在する電圧は

$$E = Z(j\omega) I_0 e^{j\omega t} + Z(-j\omega) I_0 e^{-j\omega t} \quad (4.10)$$

であり、これが実数でなければならないという要求からも必然的に出てくる。

例1 図 4.1 のブリッジ形回路：

$$\left. \begin{aligned} \left(L_2 s + \frac{1}{C_2 s} \right) I_1 - \frac{1}{C_2 s} I_2 - L_2 s I_3 &= V, \\ -\frac{1}{C_2 s} I_1 + \left(L_1 s + R + \frac{1}{C_2 s} \right) I_2 - R I_3 &= 0, \\ -L_2 s I_1 - R I_2 + \left(L_2 s + R + \frac{1}{C_1 s} \right) I_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

これから,

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= R \left(L_1 s + \frac{1}{C_1 s} \right) \left(L_2 s + \frac{1}{C_2 s} \right) + \frac{L_1}{C_1} \left(L_2 s + \frac{1}{C_2 s} \right) + \frac{L_2}{C_2} \left(L_1 s + \frac{1}{C_1 s} \right), \\ \Delta_{11} &= \left(L_1 s + \frac{1}{C_2 s} \right) \left(L_2 s + \frac{1}{C_1 s} \right) + R \left\{ (L_1 + L_2) s + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{s} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

ここでは Δ も Δ_{11} も s^2 から s^{-2} までの項をもつ多項式である。したがって

$$s^2 \Delta = P(s), \quad s^2 \Delta_{11} = Q(s)$$

とすれば, $P(s), Q(s)$ はいずれも s の 4 次式になる。

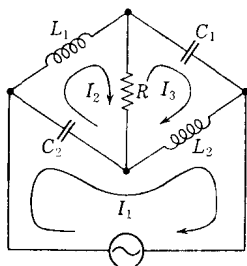


図 4.1

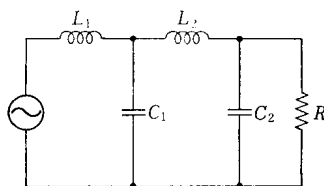


図 4.2

例2 図 4.2 の梯子形回路:

1.5 節の方法により

$$Z = L_1 s + \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{L_2 s + \frac{1}{C_2 s + 1/R}}}. \quad (4.13)$$

これを $Z = P(s)/Q(s)$ と書くと, $P(s)$ は s の 4 次式, $Q(s)$ は s の 3 次式になる。

L_{ij}, R_{ij}, D_{ij} の性質

回路の方程式(4.1)にあらわれる定数 L_{ij}, R_{ij}, D_{ij} 等については、エネルギー的な考察から、ある条件が課せられる。まず、これらが i, j についてすべて対称、すなわち

$$L_{ji} = L_{ij}, \quad R_{ji} = R_{ij}, \quad D_{ji} = D_{ij} \quad (4.14)$$

であることは、第3章の考察と同様のことから明らかである。さらに I_i を第 i ループの電流、 Q_i をその時間積分として、

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j L_{ij} I_i I_j \quad (4.15)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j D_{ij} Q_i Q_j \quad (4.16)$$

がそれぞれコイル、コンデンサーにたまっている磁氣的、電氣的エネルギーであることも容易にわかる。また

$$P = \sum_i \sum_j R_{ij} I_i I_j \quad (4.17)$$

は抵抗における電力損失(発熱)の総量であることもわかる。そこで、これらの量はすべて正、すなわち

$$T \geq 0, \quad U \geq 0, \quad P \geq 0 \quad (4.18)$$

でなければならない。したがって2次形式(4.15), (4.16), (4.17)はいずれも正定値2次形式であることがわかる。この性質は後にしばしば使われる。

4.2 インピーダンス関数 $Z(s)$ の性質

次に有理関数 $Z(s)$ が一般にみたさなければならない関係を求めよう。

まず $Z(s)$ の零点、極について考える。零点は $P(s)=0$ の根であり、したがってその s に対しては

$$A(s) = 0. \quad (4.19)$$

つまり連立方程式(4.1)が $V=0$ に対しても0でない解をもつ。(4.19)の根を $s_1, s_2, \dots, s_n$ とし、根 s_r に対する(4.1)の $V=0$ に対する解を $I_i^{(r)}$ と書くとしよう。すると

$$\sum_j \left(L_{ij} s_r + R_{ij} + \frac{D_{ij}}{s_r} \right) I_j^{(r)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.20)$$

が成り立つ。そこで、これに $I_i^{(r)*}$ を乗じて加えると

$$\sum_i \sum_j \left(L_{ij} s_r + R_{ij} + \frac{D_{ij}}{s_r} \right) I_i^{(r)*} I_j^{(r)} = 0. \quad (4.21)$$

s_r の各べきの項を分け、 s_r を乗じると、

$$\sum \sum L_{ij} I_i^{(r)*} I_j^{(r)} \cdot s_r^2 + \sum \sum R_{ij} I_i^{(r)*} I_j^{(r)} \cdot s_r + \sum \sum D_{ij} I_i^{(r)*} I_j^{(r)} = 0. \quad (4.22)$$

ところが、(4.18)により(4.22)の各項の係数である2次形式の値はすべて正(または0)である。ところで、すべての係数が正(または0)の2次方程式の根は、その実数部が常に負(または0)であるから、結局(4.22)をみたす s_r 、つまり(4.19)の根はすべてその実数部が負または0でなければならない。

同様に、 $Z(s)$ の極は $Q(s)=0$ の根である。これについては $Q(s)=0$ なら(4.1)に $I_1=0$ なる解が存在することになり、その場合、その根を $s_1', s_2', \dots, s_{n-1}'$ とすると

$$\sum_{j=2}^n \left(L_{ij} s_r' + R_{ij} + \frac{D_{ij}}{s_r'} \right) I_j'^{(r)} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (4.23)$$

となる。これから、全く同様にして

$$\sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n L_{ij} I_i'^{(r)*} I_j'^{(r)} \cdot s_r'^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n R_{ij} I_i'^{(r)*} I_j'^{(r)} \cdot s_r' + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n D_{ij} I_i'^{(r)*} I_j'^{(r)} = 0 \quad (4.24)$$

となってこれから s_r' についても、その実数部が負または0でなければならないことがわかる。そこで

定理 $Z(s)$ の零点、極はいずれもすべて s 平面の虚軸より左側(左半平面内)または虚軸上にあり、虚軸より右側には零点も極も存在しない。

$Z(s)$ の極が右半平面内に存在しないことから、 $Z(s)$ は右半平面内で正則な解析関数であることがわかる。

また、虚軸上、つまり $s=j\omega$ のときは、

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0 \quad (4.25)$$

であることは、

$$P = \operatorname{Re} Z(j\omega) |I_1|^2 \quad (4.26)$$

が、この2端子の消費する電力であることから明らかである。ところが、複素変数関数論によれば、ある領域で正則な関数の実数部または虚数部は、調和関数、つまりラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} = 0 \quad (4.27)$$

の解(ただし $s = \gamma + j\omega$) となっているので、そのことから右半平面での $Z(s)$ の実数部は、その領域の境界つまり虚軸上のすべての点および無限遠点での $Z(s)$ の値の一種の重価平均になっていることが示される。すなわち、ポアソンの公式

$$u(\gamma + j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma u(j\omega')}{\gamma^2 + (\omega - \omega')^2} d\omega' \quad (4.28)$$

が成り立つ。したがって $\operatorname{Re} Z(s)$ の虚軸上での値がいつも正ならば、右半平面でも $\operatorname{Re} Z(s)$ はいつも正であることが示される。すなわち

$$\operatorname{Re} s > 0 \quad \text{なら} \quad \operatorname{Re} Z(s) > 0. \quad (4.29)$$

一般に $\operatorname{Re} s \geq 0$ を全部含むある範囲で定義された s のある1価解析関数 $Z(s)$ が

- (1) s が実数なら $Z(s)$ も実数,
- (2) $\operatorname{Re} s > 0$ で $Z(s)$ はいたる所(無限遠も含めて)正則,
- (3) $\operatorname{Re} s > 0$ で $\operatorname{Re} Z(s) > 0$

という条件をみたすとき、 $Z(s)$ は**正実関数**(positive real function)と呼ばれる。受動的な系のインピーダンスは、集中定数系、分布定数系を問わず正実関数である。特に有限素子の集中定数系だと**有理正実関数**となる。

(4.29)の性質は、直接に、つまり調和関数の性質を使わずに出すこともできる。 $\operatorname{Re} s > 0$ での $Z(s)$ の意味は、物理的に考えれば、

$$e^{st} = e^{\gamma t} \cdot e^{j\omega t}, \quad \gamma > 0, \quad (4.30)$$

つまり時間と共に指数関数的に増大する波を回路に加えたときの V/I であるとして解釈できる。そこでそのような場合の外から入る電力は

$$P = \frac{1}{2} \{V e^{st} + V^* \exp(s^* t)\} \{I e^{st} + I^* \exp(s^* t)\}$$

$$= \frac{1}{2}(VI^* + V^*I) \exp\{(s+s^*)t\} + \frac{1}{2}VIe^{2st} + \frac{1}{2}V^*I^* \exp(2s^*t). \quad (4.31)$$

そこで

$$s = \gamma + j\omega$$

と置き, また, P を $-\infty$ から $t=t$ まで積分すると, ある瞬間までに外から入ったエネルギーの総量 W が出る. すなわち

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{-\infty}^t P dt = \frac{1}{2}(VI^* + V^*I) \frac{e^{2\gamma t}}{2\gamma} + \frac{1}{2}VI \frac{e^{2st}}{2s} + \frac{1}{2}V^*I^* \frac{\exp(2s^*t)}{2s^*} \\ &= \left\{ \frac{\operatorname{Re} Z |I|^2}{2\gamma} + \frac{|Z| |I|^2}{2|s|} \cos(2\omega t + \phi) \right\} e^{2\gamma t}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

ただし

$$\frac{VI}{s} = \frac{|VI|}{|s|} e^{j\phi} \quad (4.33)$$

と置いた.

さて, W , すなわち外から入ったエネルギーは, 中にたまるなり, 一部は熱に変わるなりするが, とにかく, いかなる瞬間もそれは負になることはあり得ない. したがって (4.32) の $\cos(2\omega t + \phi)$ の係数は, 定数項より小さくしなければならない. すなわち

$$\frac{\operatorname{Re} Z}{\gamma} \geq \frac{|Z|}{|s|},$$

あるいは

$$\frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|} \geq \frac{\gamma}{|s|} \quad (4.34)$$

と書いてもよい. すなわち, $\gamma = \operatorname{Re} s > 0$ のときは, $\operatorname{Re} Z > 0$ であるだけでなく, (4.34) により

$$\operatorname{Re} Z \geq |Z| \gamma / |s|. \quad (4.35)$$

ここで

$$\frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|} = \cos(\arg Z),$$

$$\frac{\gamma}{|s|} = \cos(\arg s)$$

であるので

$$\cos(\arg Z) > \cos(\arg s), \quad (4.36)$$

あるいは

$$|\arg Z| < |\arg s|. \quad (4.37)$$

つまり Z の偏角は s の偏角より小さく、したがって $Z(s)$ の値は、原点から右側に $2 \arg s$ の開きをもった扇形の中に入ることがわかる (図 4.3).

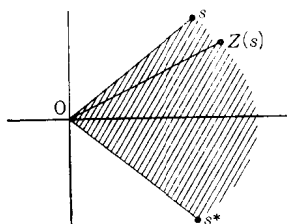


図 4.3 $Z(s)$ は $\angle sOs^*$ の中にある

特に $\operatorname{Re} Z(j\omega) = 0$ となる場合は、 γ が小さいとき

$$Z(s) \approx Z(j\omega) + \gamma \left[\frac{dZ}{ds} \right]_{s=j\omega}$$

であるから、

$$\operatorname{Re} Z(s) = \gamma \left[\frac{dZ}{ds} \right]_{s=j\omega} \geq \frac{|Z| \gamma}{|s|},$$

すなわち

$$\left[\frac{dZ}{ds} \right]_{s=j\omega} \geq \frac{|Z(j\omega)|}{j\omega}. \quad (4.38)$$

$Z(s)$ の虚軸上の特異点

$Z(s)$ の特異点、つまり極は右半平面 $\operatorname{Re} s > 0$ には存在しないが、 $\operatorname{Re} s = 0$ 、つまり虚軸の上にはあってもよい。しかしその場合は、上述の条件 (4.38) によって極の種類その他に大きい制限がかかることが示される。

まず、 $s = j\alpha$ に k 次の極があるとして、その主要部を

$$Z(s) \approx a/(s - j\alpha)^k \quad (4.39)$$

とする。すると、 s が $j\alpha$ に近いとして

$$\left. \begin{aligned} s &= j\alpha + \varepsilon e^{j\phi}, \\ a &= |a|e^{j\psi} \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

とすると

$$Z(s) \approx \frac{|a|}{\varepsilon^k} e^{-j(k\phi - \psi)}. \quad (4.41)$$

そこで

$$\operatorname{Re} Z(s) \approx \frac{|a|}{\varepsilon^k} \cos(k\phi - \psi). \quad (4.42)$$

s が $j\alpha$ に近いとき、つまり ε が小さいときは、(4.42) は大きい値をとるので、 $\operatorname{Re} Z(s)$ の符号は主として (4.42) の右辺できまるとしてよい。

さて $\operatorname{Re} s > 0$ 、つまり

$$-\pi/2 < \phi < \pi/2 \quad (4.43)$$

であるところでは

$$\operatorname{Re} Z(s) \approx \frac{|a|}{\varepsilon^k} \cos(k\phi - \psi) > 0 \quad (4.44)$$

であることが要求される。ところが (4.44) をみたさない場所の分布が大体図 4.4 でハッチしたようになり、

$$k = 1 \quad (4.45)$$

の場合以外は要求をみたし得ない。 $k=1$ のときでも

$$\psi = 0, \quad (4.46)$$

つまり、 a が正の実数でなければならない。すなわち、

“虚軸上にある $Z(s)$ の極は

$$Z(s) \approx a'(Z - j\alpha), \quad a > 0 \quad (4.47)$$

の形のものに限られる。”

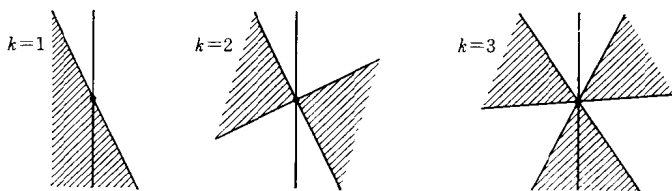


図 4.4 k 次の極のところでは実部が負になる領域。 $k=1$ 以外は要求をみたし得ない

虚軸上の極の特別な場合として、 $s=\infty$ が極である場合がある。その場合は $s \rightarrow \infty$ で

$$Z(s) \approx as^k \quad (4.48)$$

であるが、やはり前と同じ論法で $k=1$, $a>0$ となって

“無限遠点の極は

$$Z(s) \approx as, \quad a > 0 \quad (4.49)$$

の形に限られる。”

(4.47), (4.49) が虚軸上の特異点の一般形である。

4.3 LC 回路

L と C だけからできた、つまり抵抗 R を含まない回路に対しては、 $Z(s)$ の形は当然、特殊なものとなる。まず、 L のインピーダンス Ls も C のインピーダンス $1/Cs$ もどちらも s の奇関数、つまり

$$Z(-s) = -Z(s) \quad (4.50)$$

という性質をもつので、それを任意に組み合わせた回路についても、この性質は保たれる。そこで

“LC 回路のインピーダンス $Z(s)$ は s の奇関数である。”

$Z(s)$ が奇関数ということは

$$Z(s) = sF(s^2) \quad (4.51)$$

と書けることで、したがって

$$Z(j\omega) = j\omega F(-\omega^2). \quad (4.52)$$

ここで $F(s^2)$ は実関数、つまり s^2 が実数なら実数値をとる関数だから、(4.52) により、実周波数に対するインピーダンス $Z(j\omega)$ は純虚数である。 $Z(j\omega)$ の実数部がエネルギーの損失をあらわすから、また、抵抗を含まない回路の $Z(j\omega)$ は実数部が 0 になると説明してもよい。

$Z(s)$ は $\text{Re } s > 0$ のところに極も零点ももたないことがわかっているが、 $Z(s)$ が奇関数であると、 $\text{Re}(-s) > 0$ 、つまり、 $\text{Re } s < 0$ のところ(左半平面)にも極、零点がないことになる。したがって、極や零点があるとすれば、それはすべて $\text{Re } s = 0$ 、つまり虚軸 $s = j\omega$ の上にあるということである。

虚軸上の極については前節にのべたような制限があるので、 $Z(s)$ は結局

$$Z(s) = \frac{a_0}{s} + \sum_r \frac{a_r}{s - j\alpha_r} + a_\infty s \quad (4.53)$$

の形に書ける。ここで Z が実関数であることから、 $0, \infty$ 以外の極は必ず正負のものが対をなしてあらわれること、また、その対に対する a_r は互いに複素共役(ここでは実数だから、同じもの)でなければならないことから

$$\frac{a_r}{s - j\alpha_r} + \frac{a_r}{s + j\alpha_r} = \frac{2a_r s}{s^2 + \alpha_r^2} \quad (4.54)$$

と書きかえて

$$Z(s) = \frac{a_0}{s} + \sum_{r=1}^n \frac{2a_r s}{s^2 + \alpha_r^2} + a_\infty s \quad (4.55)$$

と一般に書かれる。(4.55)が有限個の素子から成る LC 回路2端子のインピーダンスの一般的な関数形である。ただし a_0, a_∞ は0になることも許すものとする。

(4.55)を見てすぐわかることは、これは図4.5のような実際の回路に相当していることである。ここで

$$\left. \begin{aligned} L_r &= \frac{2a_r}{\alpha_r^2}, & C_r &= \frac{1}{2a_r}, \\ L_\infty &= a_\infty, & C_0 &= 1/a_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

また $Z(j\omega)$ の虚部のグラフは大体図4.6のように、 $\tan \omega$ に似た ω と共に常

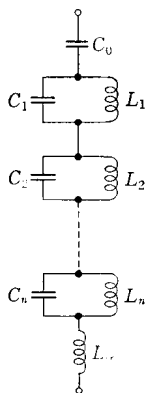


図 4.5

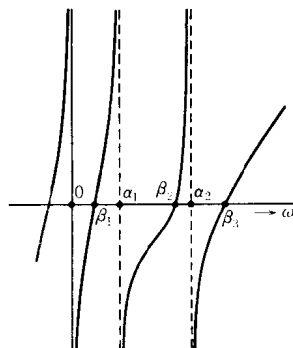


図 4.6 $Z(j\omega)$ の虚部の例