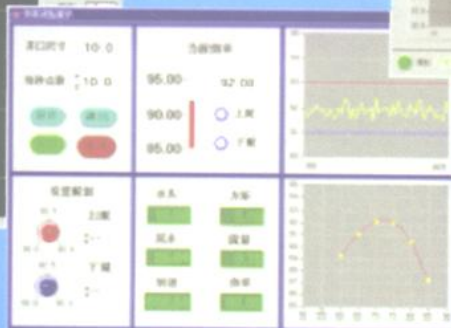
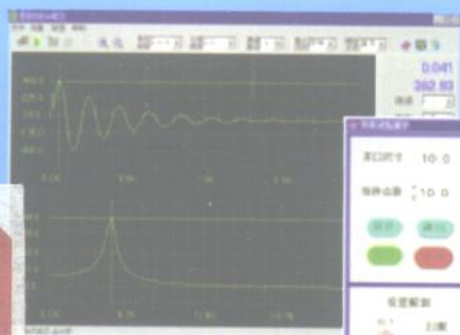




Agilent Technologies
Innovating the HP Way

数字信号处理与 VXI 自动化测试技术

屠良尧 李海涛 编著



国防工业出版社

数字信号处理与 VXI 自动化测试技术

屠良尧 李海涛 编著

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理与 VXI 自动化测试技术/屠良尧,
李海涛编著. —北京:国防工业出版社, 2000.6

ISBN 7-118-02286-1

I. 数… II. ①屠… ②李… III. ①数字信号 -
信号处理 ②总线-自动检测-测试技术 IV.
TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 03460 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京怀柔新华印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 12½ 280 千字

2000 年 6 月第 1 版 2000 年 6 月北京第 1 次印刷

印数:1—2500 册 定价:40.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

前 言

数字信号处理(DSP)技术是当代发展最迅速、应用最广泛的技术之一。从1965年提出快速傅里叶变换算法和1970年美国推出第一台快速傅里叶分析仪(现称数字信号分析仪 DSA)以来,DSA 已完全代替了模拟分析仪而一统天下。现在只要按压一个按钮或键入一个命令,即可使过去十分费时费力的信号处理任务在瞬息之间完成。由于有了 DSP 技术,各种产品检测、故障诊断、失效分析、减振降噪、寿命预测的新方法不断涌现;在理论方面,小波分析、神经网络、自适应滤波、高阶谱分析、混沌控制、分形技术等方面取得了突破性进展,有些已成为傅里叶分析史上的新里程碑。DSP 技术和 DSA 在航空航天、机械制造、交通运输、生物医学、邮电通信、水文地质、振动工程等各种不同领域中获得广泛应用,对提高产品质量同时又降低成本、提前产品维修、避免重大事故方面起了不可估量的作用。随着 DSP 技术的普及与计算机价格的降低,DSA 还将应用到所有部门行业。如有报道在食品加工行业中,日本用锤击法分析振动和声音信息以快速检查食品罐头有无腐败,美国用神经网络方法确定能完全爆裂的玉米形状、颜色、密度、大小等参数指标。

VXI 总线技术是卡式仪器的又一重大进展。计算机技术应用于仪器领域,各种新概念与新技术如虚拟仪器、虚拟面板、仪器驱动程序,统一各厂家各产品的“可编程仪器标准命令”、“即插即用”与带电热插拔技术、高速总线传输技术,使传统的单台仪器或多台仪器“机架叠放式”工作方式逐步淘汰。一台或多台仪器变成机箱中的一个插板(模块),而一个机箱能容纳十几个插板,并在其背板上进行信息高速通信。内置式微机(插卡)或外置式微机、键盘、鼠标与荧光屏替代了几十台仪器的众多按钮、开关、旋钮和表头,使巨型自动化的,可以控制成百上千传感器及放大器的测试控制系统成为现实,其中数据采集系统以 100K 样本每秒或更高的速度采集各种物理量数据并进行实时处理。

我们从 80 年代参加世界银行大学贷款项目,负责分析仪选型、验收工作。到 90 年代以来,除完成了多项 DSP 科研课题外,还参加中国 - 惠普 DSP 技术中心合作技术普及、推广工作,在全国各地举办了几十次 DSP 培训班与研讨会,积累了丰富的科研与教学经验。在青铜峡等水电站对上百吨大型结构进行瞬态激励测试动态特性,打破了过去认为锤击法只适用于中小型结构的约束,首次将 VXI 技术应用于大型高水头水力试验台上,使测试综合精度提高了近一倍而测试时间减少一半,在三峡水轮发电机组关键性研究重大项目中,应用了小波分析方法有效地提取了结构的动态特性。

前五章由屠良尧编写,后四章由李海涛编写,邓樱负责全书的组织与校对工作。书中底稿打印、插图绘制由罗文波、白允东、刘洪涛、陈仲等完成。

本书在编写过程中,得到了中国惠普公司的大力支持与帮助,哈尔滨工业大学有关单位的关心与协助,在此表示衷心的感谢。

作 者

2000 年 1 月于哈尔滨工业大学

内 容 简 介

本书系统地介绍数字信号处理与 VXI 自动化测试系统的基本理论及应用技术,本书的主要内容为:信号处理背景知识、快速傅里叶变换与数字滤波器、分析仪的基本功能、分析仪的先进功能、分析仪的应用、数据采集和信号调理、VXI 总线测试系统简介、HP DAC Express 数据采集软件简介、HP VEE 软件简介。

本书内容充分反映了当代先进的信号处理技术、信号分析仪和自动化测试系统的最新理论与成果,同时也介绍了基础知识、经验法则与仪器使用技巧。

本书可供从事信号处理技术工作的各厂矿院所的研究人员参考,也可作为理工科大学有关专业的教师、研究生和学生的教材或教学参考书,本书也适合于广大科技工作者自学与进修之用。

The basic theories and application techniques of digital signal processing and VXIbus automatic measurement system are introduced in this book. Following topics are discussed in this book: background knowledge of signal processing, Fast Fourier Transforms(FFT) and digital filter, basic functions of analyzer, advanced functions of analyzer, application of analyzer, data acquisition and signal conditioning, brief introduction of VXIbus system, data acquisition software HP DAC Express and visual programming tool HP VEE.

Focus on advanced signal processing techniques, the most recent theories and achievement on signal analyzer and automatic measurement system are discussed in this book. The experience and techniques of using instruments are also introduced.

This book can be used not only as a reference for related fields, but also as a textbook or reference for teachers and students.

目 录

第一章 信号处理的背景知识	1
1.1 信号与系统	1
1.1.1 信号与系统的定义	1
1.1.2 系统的分类	1
1.1.3 信号的分类	2
1.2 积分变换	4
1.2.1 傅里叶分析的历史简介	4
1.2.2 从傅里叶级数到傅里叶变换	5
1.2.3 卷积公式与卷积定理	9
1.2.4 拉普拉斯变换	11
1.3 信号处理中的广义函数	12
1.3.1 广义函数简介	12
1.3.2 常用的广义函数	13
1.3.3 δ 函数的微积分	15
1.4 专题	16
1.4.1 信号处理中的线性代数	16
1.4.2 机械导纳与机电比拟	20
1.4.3 随机信号简介	21
第二章 快速傅里叶变换与数字滤波器	25
2.1 离散傅里叶变换公式与性质	25
2.1.1 离散傅里叶变换公式	25
2.1.2 DFT 的性质	26
2.1.3 有限化、泄漏与减少泄漏的措施	26
2.1.4 离散化、混迭与避免混迭的措施	28
2.1.5 量化与量化误差	29
2.2 离散卷积与离散相关	29
2.2.1 离散卷积公式	29
2.2.2 离散相关公式	30
2.2.3 应用示例	31
2.3 快速傅里叶变换	31
2.4 数字滤波器简介	33
2.4.1 Z 变换	34
2.4.2 数字滤波器的定义	35

2.4.3 数字滤波器的分类	35
2.4.4 数字滤波器与模拟滤波器	36
第三章 数字信号分析仪的基本功能	39
3.1 典型分析仪的功能	39
3.1.1 分析仪的分析功能	39
3.1.2 分析仪的图形显示	40
3.1.3 信号输入与调理方式	40
3.1.4 分析仪的辅助功能	40
3.1.5 分析仪的先进功能	41
3.1.6 正弦扫描模式	41
3.1.7 时间捕捉功能	41
3.1.8 硬拷贝输出	41
3.1.9 其他功能	41
3.2 典型分析仪的参数指标	42
3.2.1 时间域	42
3.2.2 频率域	42
3.2.3 幅值域	43
3.2.4 输入	43
3.3 时间域分析	43
3.3.1 目测分析	43
3.3.2 仪器分析	44
3.4 时差域分析——相关分析	45
3.4.1 自相关与互相关	45
3.4.2 相关分析的用途	47
3.5 幅值域分析	48
3.5.1 概率密度函数与概率分布函数	48
3.5.2 直方图	48
3.5.3 低阶矩	48
3.5.4 高阶矩	49
3.6 频率域分析之一——频谱分析	50
3.6.1 傅里叶谱、能量谱和功率谱	50
3.6.2 功率谱密度的计算	51
3.7 频率域分析之二——频响函数	51
3.7.1 频响函数的原始定义	52
3.7.2 频响函数的扩展定义	52
3.7.3 频响函数的应用举例	54
3.8 数字信号分析仪的辅助功能	55
3.8.1 加窗、平均与重叠	55
3.8.2 插值、加零、选抽与细化	58

3.8.3 信号源	60
3.8.4 三维谱图	62
第四章 数字信号分析仪的先进功能	63
4.1 传递函数以及它与频响函数的关系	63
4.1.1 传递函数的定义	63
4.1.2 传递函数的极点、零点与极点、留数表达式	63
4.1.3 传递函数与频响函数的互相转换	64
4.2 倒频谱分析	67
4.2.1 实倒频谱与复倒频谱	68
4.2.2 倒频谱的应用	69
4.3 希尔伯特(Hilbert)变换	69
4.3.1 希尔伯特变换的基本概念	69
4.3.2 希尔伯特变换的应用	72
4.4 曲线拟合与综合	73
4.4.1 曲线拟合前的数据准备	73
4.4.2 曲线拟合的步骤	73
4.4.3 曲线拟合的注意事项	74
4.4.4 综合	74
第五章 数字信号分析仪的应用	76
5.1 分析仪在模态分析中的应用	76
5.1.1 模态分析的基本知识	76
5.1.2 实验模态分析中的锤击法	79
5.1.3 实验模态分析中的激振器法	86
5.2 分析仪在旋转机械诊断中的应用	87
5.2.1 引言	87
5.2.2 计算的阶次跟踪法	88
5.3 四种失真及其解决措施	90
5.3.1 线性系统的失真	90
5.3.2 非线性系统的失真	91
第六章 数据采集和信号调理	93
6.1 模数转换	93
6.1.1 模数转换器的模型	93
6.1.2 模数转换器的精度	95
6.2 多路转换及相关问题	97
6.2.1 多路转换器	97
6.2.2 输入隔离器	98
6.2.3 同步采样和保持	99
6.2.4 电流测量	99
6.3 温度测量	99

6.3.1 热电偶的使用	99
6.3.2 热电阻的使用	104
6.3.3 半导体热敏电阻	107
6.4 应变和加速度测量	109
6.4.1 电阻应变片	109
6.4.2 应变的测量	110
6.4.3 加速度的测量	112
6.5 放大器基本原理	113
6.5.1 仪器放大器	114
6.5.2 信号的调理放大	115
6.5.3 电压测量误差和高电压测量	116
6.5.4 单端和差分测量	117
6.6 降噪和隔离	119
第七章 VXI 总线测试系统	122
7.1 VXI 总线——自动化测试系统的标准	122
7.1.1 VXI 总线的由来	122
7.1.2 VXI 总线的基础——HP-IB 和 VME 总线	122
7.1.3 VXI 总线的特点	123
7.2 VXI 总线系统的机电结构	124
7.2.1 VXI 总线模块	125
7.2.2 VXI 总线的屏蔽和冷却	126
7.2.3 VXI 总线主机箱	127
7.2.4 VXI 总线系统电源	128
7.3 VXI 总线仪器	129
7.3.1 VXI 总线仪器概述	129
7.3.2 消息基仪器	130
7.3.3 寄存器基仪器	130
7.3.4 常用 VXI 总线模块	131
7.4 VXI 总线控制器和接口板	134
7.4.1 VXI 总线控制器	134
7.4.2 VXI 总线接口板	135
7.5 虚拟仪器及其程序设计	137
7.5.1 虚拟仪器	137
7.5.2 VXI plug & play 仪器驱动器	140
7.5.3 SCPI 命令	143
7.5.4 应用程序设计	145
7.6 VXI 总线的测试系统	145
7.6.1 系统集成概念	145
7.6.2 典型 VXI 系统	146

第八章 HP DAC Express 数据采集软件简介	150
8.1 HP DAC Express 的主要功能	150
8.2 HP DAC Express 用户界面	150
8.3 设置 VXI 试验系统	151
8.4 记录试验数据	152
8.4.1 数据记录概述	152
8.4.2 记录数据的步骤	153
8.5 数据浏览器	154
8.6 试验数据转换	155
第九章 HP VEE 软件简介	157
9.1 HP VEE 的特点	157
9.2 HP VEE 开发环境	158
9.2.1 开发环境的组成部分	158
9.2.2 菜单的使用	159
9.2.3 目标模块的使用	160
9.2.4 目标模块的端口和引线	162
9.3 HP VEE 的编程方法	165
9.3.1 目标模块的连接	165
9.3.2 使用在线 Help 和 Debugging 工具	166
9.3.3 测试数据的分析和显示	168
附录	175
附录 A 对数单位制	175
附录 B 英文名词缩写表	177
附录 C HP 动态信号分析仪性能简介	181
附录 D HP 公司出版物目录	183
参考文献	186

第一章 信号处理的背景知识

1.1 信号与系统

1.1.1 信号与系统的定义

信号可理解为信息的载体或信息的表达形式,机电工程中的信号一般是随时间变化的物理量;而系统可理解为按照某个特定功能要求,把一些相互联系彼此影响的物体有机地结合成整体。系统以外的物体统称为环境。环境与系统的分界可以是具体的,也可以是抽象的(概念上的)。通常我们所研究的信号或者是环境输入到某一系统的物理量(也称激励),或者是系统受输入作用后输出的物理量(也称响应),因此信号和系统是密切相关的,我们既要了解一已知信号输入到某一系统后将产生何种输出,也要分析系统的输入和输出信号以了解系统的动态特性。从输入、输出的角度观察,系统也可定义为将输入信号“变换”成输出信号的硬件或软件(计算机仿真系统)。

1.1.2 系统的分类

系统大致可分为以下 7 类。

1. 静态系统与动态系统

静态(也称即时或瞬态)系统的输出只由该瞬时的输入决定,其关系用代数方程描述。动态系统的输出还与过去的输入(或过去的输出)有关,其关系用微分方程或差分方程描述。

2. 线性系统与非线性系统

线性系统具有叠加性、均匀性和平滑性(今后常以 x 表示输入, y 表示输出, T 或 $\rightarrow$ 或 $\leftrightarrow$ 表示各种变换如输入到输出变换)

$$\text{叠加性} \quad T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) \quad (1-1-1)$$

$$\text{均匀性} \quad T(ax) = a \cdot T(x) \quad (1-1-2)$$

$$\text{平滑性} \quad T\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N x_i\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} T\left(\sum_{i=1}^N x_i\right) \quad (1-1-3)$$

工程中只要求满足前二性质,可合成为下式:

$$T(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1 T(x_1) + a_2 T(x_2) \quad (1-1-4)$$

非线性系统不满足上述特性,又可分为参数非线性与状态非线性,状态非线性系统仍可用线性回归公式来拟合系统的参数值。

3. 非时变系统与时变系统

非时变系统也称定常系统,其动态特性(以参数表示时又称为特性参数)不随时间的推移而变化,故有

$$x(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau) \quad (1-1-5)$$

反之则称时变系统。

工程中大部分系统可假设为线性非时变系统,简称 LTI 系统。

4. 稳定系统与非稳定系统

本书只研究外部稳定性,即:稳定系统的有界输入产生有界输出,它还可分成渐近稳定和临界稳定,前者受初始扰动后,其响应将逐步衰减回到平衡位置,而后者则产生等幅运动;不稳定系统例如一自由质量 m ,受 $1(\text{N}\cdot\text{s})$ 单位冲量后,输出位移 $x = t/m$,有界输入产生无界输出。

5. 因果系统与非因果系统

因果系统的输出无超前性,其输出不会超前于输入,它也称物理可实现(可用物理元器件组成的)系统。

非因果系统只能用计算机仿真实现,它们可用于构成零相位滤波器等。

6. 分布系统与集总系统

分布系统的物理特性参数随坐标连续变化,故输入、输出关系用偏微分方程描述,而集总系统用常微分方程描述,两者也称无限自由度系统和有限自由度系统。

7. 有初能量与无初能量系统

本书只研究无初能量系统,其输出完全由输入决定。

注意,有初能量(初势能和初动能)系统可转化成有初位移和初速度系统来研究。在输入引起的响应中加上初位移和初速度产生的响应即可得出总响应。

其他分类如:有源与无源,保守与非保守,开环与闭环,单入单出(SISO)、单入多出(SIMO)与多人多出(MIMO),一阶、二阶与高阶(可转化成一、二阶),有限冲激响应(FIR)与无限冲激响应(IIR),可控与不可控,最小相位与非最小相位,单自由度与多自由度,确定性参数系统与随机参数系统等。这些分类有些大家很熟悉,不再赘述,有些将留待今后讨论。注意:物理自由度以二阶系统中质量的运动来定义,故一阶系统如阻尼弹簧(阻尼与弹簧并联系统)在某些书中称 $\frac{1}{2}$ 自由度。

1.1.3 信号的分类

时域信号大致可分为 11 类。

1. 模拟信号、采样信号、量化信号与数字信号

模拟信号又称连续信号,信号的自变量(时间)与因变量(幅值)都连续变化;采样信号又称离散信号,时域按采样间隔 Δt 进行离散;量化信号在幅值域按量化单位 q 进行离散。

数字信号在时间域和幅值域都离散,对数字信号进行处理的技术即 DSP 技术是本书重点研究的内容,各种信号图形参见图 1-1。

2. 因果信号与非因果信号

因果信号即时域单边信号, $t < 0, s(t) = 0$,名词来源于因果系统的单位冲激响应函数 $h(t)$ 必须为单边信号(详见下述),非因果信号为双边信号。

3. 时限信号与非时限信号,频限信号与非频限信号

时限信号为持续时间有限的信号,反之为非时限信号;对于经变换后的频域信号也可分为频限和非频限,注意时限信号一般为非频限,反之亦然。

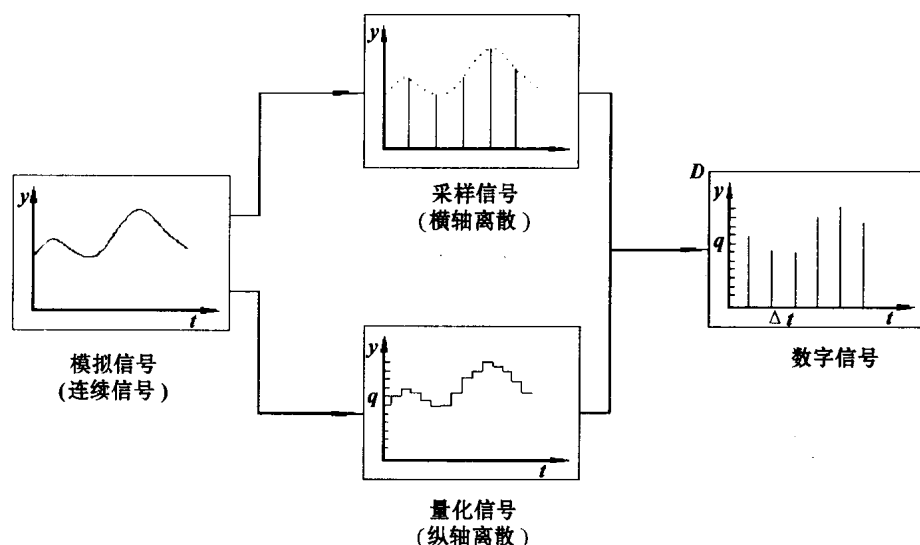


图 1-1 4 种信号关系示例图

4. 解析信号与非解析信号

解析信号即频域单边信号, $f < 0, S(f) = 0$, 频域双边信号称为非解析信号。

5. 平稳信号与非平稳信号

平稳信号为统计特性(均值、方差以致更严格的概率密度等)不随时间推移而变化的信号, 反之则为非平稳信号。平稳信号只要取“足够长”的一段时间(如周期信号取一个周期)进行分析就可了解其特性。非平稳信号过去常用分段处理技术, 即取一小段“基本上”可以认为平稳的信号区间进行分析或者用三维图。现在可采用时间—频率联合分析或时间—尺度联合分析技术进行分析。

平稳随机信号又可分为宽平稳和严平稳, 其一、二阶统计特征非时变称为宽平稳, 所有统计特征都非时变称为严平稳。高斯随机信号如宽平稳则也一定严平稳。

6. 实信号与复信号

工程中的信号在时域都为实信号, 而变换到频域后常用复数形式来表示, 即频域复信号。理论分析常把时域实信号 $\cos \omega t$ 表示成复信号 $e^{j\omega t}$ 的实部, 在研究系统时有很大优点。

要注意的是频域信号经过某种处理(如频移)后再经逆变换返回到时域后, 会产生时域复信号。另外, 由于计算误差, 实时间信号经各种变换再返回时域也常会产生幅值较小的虚部成分, 请注意: 实信号的绝对值和复信号的模都用 $|\cdot|$ 表示。

7. 绝对可积、平方可积和均方可积信号

工程中的连续信号可分为三类:

$$(1) \text{ 绝对可积} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty \quad (1-1-6)$$

$$(2) \text{ 平方可积} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty \quad (1-1-7)$$

$$(3) \text{ 均方可积} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |s(t)|^2 dt < \infty \quad (1-1-8)$$

对于离散信号上 3 式改为绝对可和、平方可和与均方可和(如 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \cdots$)。

8. 功率信号与能量信号

在信号处理中,把某个物理量(电压、电流、速度等)的平方称为功率信号,功率信号再乘以秒称为能量信号。这与物理学中的概念不同,如电功率为 $I^2 R$ 或 U^2/R 。

9. 确定性信号与随机信号

确定性信号可用函数式表示,可精确预测信号的任一瞬时值。随机信号无法预测某一瞬时值,只能了解其概率分布或统计特性。

10. 普通函数表示的信号与广义函数表示的信号

普通函数可大致理解为连续的、处处可微和无限可微的非时限函数。广义函数历史上由物理学中点质量(体积为零但质量不为零,故密度必须无穷大)、集中力(通过零面积或零长度传递的接触力)等抽象物理量需要提出并发展成严密理论体系。

11. 信号与噪声

信号与噪声最广义的区别为前者是需要的信息,而后者不需要但与前者结合在一起(相加、相乘、卷积等)因而干扰了前者。当然工程中(尤其是电子工程)最常见的噪声为随机的、宽带的如高斯白噪声。抑制噪声、提高信噪比成为处理中的重要任务。最后要说明的是由于各种非电量信号都可以通过传感器转换成电量,而信号分析仪的输入量都是电压,故今后不作说明时一律认为是电压信号(单位为 V 或 mV)。

1.2 积分变换

在数学中把 $I(r) = \int_a^b f(t) K(r, t) dt$ 称为 $f(t)$ 的积分变换, $K(r, t)$ 称为核。

本节研究傅里叶变换(也称傅里叶积分),拉普拉斯变换和希尔伯特变换。

1.2.1 傅里叶分析的历史简介

傅里叶分析在多个领域内都有很重要的用途,在信号处理领域内首先感兴趣的是频谱分析,虽然理论上时域和频域两者信息相等,但它将时域内隐藏的、不清晰的或难以估价的信息在频域内清晰地显示出来,也可使我们从另一角度去观察信号的特征。频谱的原文“Spectrum”由英国科学家牛顿在研究光谱时借用拉丁语“幻像”一词而构成,但完整地提出谱分析理论的是法国工程师傅里叶(Fourier),他在研究火炮炮管变形课题涉及到热传导问题时形成了后人称为傅里叶分析的理论,并于 1807 年在法兰西科学院一次会议中提出。其基本思想是:任一周期函数都可由频率成整数倍(从基波到谐波)的幅值不同的三角函数(正弦或余弦函数)合成,称之为傅里叶级数。非周期但为时限的函数可以以持续时间为周期开拓成周期函数后,用傅里叶级数在持续时间内表示成原函数。

傅里叶分析开创了一个新纪元,很多领域(不仅是信号分析)至今仍在应用它的成果。最近提出的小波(Wavelet)分析方法是其发展史上的一个新里程碑,是补充、进展,而不是替代、淘汰它。但这一理论当时却受到了一些著名科学家的怀疑和攻击,他们有一个反驳的论据是正弦函数连续、处处可微和无限可微,它们不可能合成一个不连续且导数不存在

的函数如方波函数。他们限于当时数学水平不理解无限项正弦函数的叠加其极限可以是不连续且导数不存在,也不理解解析函数理论中由一个点的信息可预测该点附近区间的取值概念(即泰勒级数概念,泰勒级数和傅里叶级数看似背道而驰,实际上相辅相成)。傅里叶坚持了他的理论并于1822年在《热分析理论》专著中正式公布。

时至今日,我们要强调几点:

任何仪器(如示波器、分析仪)都是有限带宽的,而有限项三角函数合成后确实是连续可微的,且在原函数不连续点处除取平均值外,还会引起振荡,它由吉布斯(Gibbs)作了证明,现称为吉布斯现象。傅里叶级数是在最小二乘意义下对原函数的近似表达式。

傅里叶采用了谐波(频率成整数倍的正弦波)合成,这些正弦级数形成了正交族,故求系数时彼此独立(解独立方程而非解联立方程)。例如当 $s(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, $f_1 = 1\text{Hz}$, $f_2 = 1.41\text{Hz}$ 时仍可看成谐波,但基波为 $f_0 = 0.01\text{Hz}$,幅值为零, f_1 为其第100阶谐波, f_2 为其第141阶谐波, f_1 和 f_2 两正弦波在 $T = 100\text{s}$ 区间内正交。如 $f_2 = \sqrt{2}\text{Hz}$ 时,则两者不正交。

傅里叶认为任意周期函数都可展开成傅里叶级数的想法是有问题的,他对级数的收敛条件也未作研究,1829年狄里赫利(Dirichlet)给出了傅里叶级数存在的严格条件。

狄里赫利条件为

在任一周期内,信号 $y(t)$ 绝对可积

$$\int_T |y(t)| dt < \infty \quad (1-2-1)$$

在任一周期内,信号 $y(t)$ 只有有限个极值(极大值或极小值);

在任一周期内,信号 $y(t)$ 只有有限个第一类间断点。

工程中绝大部分周期信号都满足狄里赫利条件,故今后我们不再研究傅里叶级数是否存在(收敛)。

1.2.2 从傅里叶级数到傅里叶变换

设 $y(t)$ 是非时限的以 T 为周期的周期函数, $y(t+T) = y(t)$, $f_1 = 1/T$ 或 $(\omega_1 = 2\pi/T)$, $y(t)$ 满足狄里赫利条件,则 $y(t)$ 可用三角级数展开,称为傅里叶级数。

1. 傅里叶级数公式(实数形式)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\omega_1 t + b_m \sin m\omega_1 t) = \\ &\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\omega_1 t + \varphi_m) \end{aligned} \quad (1-2-2)$$

式中: $a_0 = \frac{2}{T} \int_T x(t) dt$ (直流分量);

$$a_m = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos \omega_m t dt;$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin \omega_m t dt;$$

$$A_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2};$$

$$\varphi_m = \arctan(b_m/a_m);$$

$$\omega_m = m\omega_1。$$

该级数将信号由时域变换到频域,级数的系数称为频谱系数,量纲与 $x(t)$ 相同,其中 $A_m = A_m(\omega_m)$ 称为幅频, $\varphi_m = \varphi_m(\omega_m)$ 称为相频, ω_m 当 $m = 1$ 时称为基频, $m > 1$ 时称为(高阶)倍频。

2. 傅里叶级数公式(复数形式)

利用欧拉公式 $e^{\pm j\varphi} = \cos\varphi \pm j\sin\varphi$ 可将 $x(t)$ 展开成复数形式的傅里叶级数。

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{j\omega_m t} \quad (1-2-3)$$

式中: $c_m = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j\omega_m t} dt$ 。

复数式优点很多,缺点是它将实数表示成两共轭复数之和(如 $\cos\omega t = 1/2(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$)后将带来没有物理意义的“负频率”。

最后要强调两点:

(1) 一周期内平方可积信号的傅里叶级数也存在;

(2) 频域中自变量用频率 f 还是角频率 ω 要看情况,两者各有所长,用 ω 时公式简洁,如 $\omega_n^2 = k/m$, $s = \sigma + j\omega$,但有时在公式中要乘或除以 2π 因子,用 f 时适用于实验测试。

3. 傅里叶变换公式

对于非周期的时限或虽非时限但迅速衰减的时域函数,在满足狄里赫利条件下(主要是满足绝对可积 $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt < \infty$ 条件)时傅里叶变换(CFT,也叫傅里叶积分)存在。

CFT 可理解为周期波中各个波间距离 T 趋于无穷大时傅里叶级数的极限。

随着 $T \rightarrow \infty$,各条谱线逐渐靠近,间距 $f_1 \rightarrow \Delta f \rightarrow df$,离散频谱变成连续频谱,用 $y(t) \leftrightarrow Y(f)$ 表示正、逆变换,则有

$$\text{CFT: } Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1-2-4)$$

$$\text{ICFT: } y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1-2-5)$$

如用角频率代替频率,则得:

$$\text{CFT: } Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-2-6)$$

$$\text{ICFT: } y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-2-7)$$

如 $y(t)$ 单位为 V,则 $y(f)$ 单位为 $V \cdot s = V/Hz$,故称为傅里叶谱密度。当 $y(t)$ 为单边实函数时, $Y(f)$ 为复函数,可写成

$$Y(f) = |Y(f)| e^{j\varphi(f)} = \text{Re}[Y(f)] + j\text{Im}[Y(f)] \quad (1-2-8)$$

式中: $|Y(f)|$ ——幅频特性(或幅频曲线);

$\varphi(f)$ ——相频特性(或相频曲线), $\varphi(f) = \arctan(\text{Im}[Y(f)]/\text{Re}[Y(f)])$;

$\text{Re}[Y(f)]$ ——实频特性(Re 为 Real Part 简写),也叫“同相”(Coincidence)分量;

$\text{Im}[Y(f)]$ ——虚频特性(Im 为 Imaginary Part 简写),也叫“正交”(Quadrature)分量。

如以 f 为参变量, 则式 $\operatorname{Re}[Y] = f(\operatorname{Im}[Y])$, 称为奈奎斯特曲线(Nyquist)或矢端图。

双对数坐标幅频曲线和单对数相频曲线合称为波德(bode)图。如 $y(t)$ 为单边实函数, 则 $Y(f)$ 的实频曲线对称, 虚频曲线反对称, 幅频曲线对称。

如 $y(t)$ 为双边实偶函数, 则 $Y(f)$ 也为实偶函数, 即实部不为零, 虚部为零, 但相频曲线因实部有正负, 故在 0 和 π 两值中变化。

4. 常用函数的傅里叶变换

(1) 矩形函数(矩形脉冲)

$$y(t) = \operatorname{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-2-9)$$

$$Y(\omega) = T \cdot \operatorname{sinc}(\omega T/2) \quad (1-2-10)$$

式中: $\operatorname{sinc}(\cdot)$ ——基正弦(Cardinal Sine)函数, $\operatorname{sinc}(\omega T/2) = \sin(\omega t/2)/(\omega T/2)$ 。

(2) 单边指数衰减函数

$$y(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1-2-11)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad (1-2-12)$$

(3) 单边衰减正弦函数

$$y(t) = A e^{-at} \sin \omega_d t \quad (1-2-13)$$

$$Y(\omega) = \frac{A \omega_d}{(\omega_d^2 - \omega^2 + \alpha^2) + j2\alpha\omega} \quad (1-2-14)$$

例 1: 二阶 m, k, c 单度机械系统

$$h(t) = (m\omega_d)^{-1} e^{-nt} \sin \omega_d t \quad (1-2-15)$$

式中: $\omega_d^2 = \omega_n^2 - n^2$, $\omega_n^2 = k/m$, $n = c/2m$ 。

代入以上公式计算后得

$$H(\omega) = \frac{1}{k - \omega^2 m + j\omega c} \quad (1-2-16)$$

(4) 高斯函数

$$y(t) = A e^{-a^2 t^2} \quad (1-2-17)$$

$$Y(\omega) = \frac{A \sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}} \quad (1-2-18)$$

高斯函数的傅里叶变换仍为高斯函数。

5. 周期函数的傅里叶变换

周期函数非绝对可积, 没有傅里叶变换, 但实际工作会遇到瞬态函数与周期函数混合的傅里叶变换计算问题, 借助于下节广义函数可以求得其傅里叶变换, 以余弦函数为例

$$Y(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad (1-2-19)$$

证明:

$$1 \leftrightarrow \delta(f)$$