硕士生入学应试指导书

高等数学 线性代数 1200题

李大华

华中理工大学出版社

高等数学·线性代数 1200题

李大华　编

华中理工大学出版社

（鄂）新登字第10号

图书在版编目（CIP）数据

高等数学·线性代数1200题/李大华编.
武汉华中理工大学出版社， 1995年11月
ISBN 7-5609-1207-9

Ⅰ.高…

Ⅱ.李…

Ⅲ.①高等数学-习题②线性代数-习题

Ⅳ.①013-44②051.2-44

高等数学·线性代数1200题
李大华编
责任编辑：李立鹏
华中理工大学出版社发行
（武昌喻家山 邮编：430074）
新华书店湖北发行所经销
中南三0九印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32 印张：14.5 字数366 000
1995年11月第1版 1995年11月第1次印刷
印数：1-8 000
ISBN 7-5609-1207-9/O·140
定价：12.50元

前　言

本书根据国家教委制订的全国硕士研究生入学考试数学考试大纲的要求，精选了高等数学与线性代数共 1200 多道题，分为例题和习题两部分编写而成. 这些题目大多选自历年各高校的研究生入学试题及全国统考试题，类型全面，覆盖面广，信息量大.

我们假定读者手中已有一套高等数学与线性代数的教材，因而在每节的开头只列出内容要点，或列出一些很重要的但不易记住的公式. 各种类型问题的解题方法和技巧将有层次地贯串于整节的例题之中，以此为读者提供切实有效的指南. 每节后面都有相应数量的习题，供读者通过自己动手解题来掌握要领，触类旁通，提高解题的能力. 在书的末尾，给出了数学(一)至数学(五)的五套模拟试题，供读者自我检验.

左上角标有"△"记号者，表示该题为全国统考试题.

本书除作为硕士生入学考试的应考指南外，也可作为工科院校(包括电大、夜大、业大、职大等)学生学习高等数学和线性代数的教学参考书.

愿本书能给读者带来信心和希望.

编　者

1995 年 4 月

于华中理工大学

目　　录

第一章　函　数

1.1　函数概念

1.1.1　求函数 $y=\sqrt{x-1}\ln|x-3|$ 的定义域.

解　$x-1\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant 1$，$|x-3|>0\Rightarrow x\neq 3$. 故函数的定义域为 $[1,3)\cup(3,+\infty)$.

1.1.2　函数 $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$ 的定义域是______.

解　由 $\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1$ 及 $x\neq -1$ 推得 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$.

1.1.3　求函数 $y=\sqrt{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)}$ 的定义域.

解　$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\geqslant 0\Rightarrow 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{3}-x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，故得 $2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

1.1.4　下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=1, g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

解　(1) f 与 g 不相同，因为定义域不同.

(2) f 与 g 不相同，因为对应规则不同.

(3) f 与 g 相同，因为定义域与对应规则都相同.

1.2　函数的几种特性

1.2.1　证明 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

证　$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})$

$$= \ln \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} = - f(x).$$

1.2.2 证明:定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任意函数都可表示为一个奇函数与一个偶函数的和,并且这种表示方法唯一.

证 $f(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$,

唯一性请读者自己证明.

1.2.3 设 $x \neq 0$ 时,$f(x)$ 满足关系式

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x}, a \text{ 为常数}, \tag{1}$$

证明 $f(x)$ 为奇函数.

证 用 $\frac{1}{x}$ 代替(1)中的 x,得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = ax \tag{2}$$

由(1)、(2)解得 $f(x) = \dfrac{a}{3}\left(\dfrac{2}{x} - x\right)$,则 $f(-x) = -f(x)$.

1.2.4 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数,且图形关于直线 $x = 2$ 对称.证明 $f(x)$ 为周期函数.

证 依题设,有 $f(-x) = -f(x)$,$f(x) = f(4 - x)$,由此推得 $f(4 - x) = -f(x - 4)$,$f(-x) = f(4 + x)$,进一步推得 $f(4 + x) = f(x - 4)$.令 $x - 4 = u$ 即得 $f(u + 8) = f(u)$.故 $f(x)$ 是以 8 为周期的周期函数.

1.2.5 设 $k > 0$ 为常数,$f(x) \neq 0$,且 $f(x + k) = \dfrac{1}{f(x)}$,求证:$f(x)$ 是以 $2k$ 为周期的周期函数.

证
$$\begin{aligned} f(x + 2k) &= f((x + k) + k) \\ &= \frac{1}{f(x + k)} = \frac{1}{1/f(x)} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

1.2.6 设 a, b 为常数,且 $b > a$.函数 $y = f(x)$ 定义于 $(-\infty, +\infty)$,它的图形既对称于直线 $x = a$,又对称于直线 $x = b$.则 $f(x)$

必是

(A) 奇函数，　　　　(B) 偶函数，

(C) 周期函数，　　　(D) 单调函数；

答(　　　)

解　应选(C). 函数的奇偶性和单调性都可排除. 下面验明周期性：对 $\delta > 0$，令 $x = a + \delta$，则有

$$f(a+\delta) = f(a-\delta) \Rightarrow f(x) = f(2a-x)$$

同理可得 $f(2b-x) = f(x)$. 于是可以推出

$$f(x) = f(2a-x) = f(2b-(2a-x)) = f(x+2(b-a)).$$

1.2.7　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加，证明 $\varphi(x) = \max\{f(x),g(x)\}$ 在 (a,b) 内严格单调增加.

证　设 $x_1,x_2 \in (a,b)$，$x_1 < x_2$，则 $f(x_1) < f(x_2)$，$g(x_1) < g(x_2)$，从而 $\max\{f(x_2),g(x_2)\} > f(x_1)$，$\max\{f(x_2),g(x_2)\} > g(x_1)$. 于是得 $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$.

1.2.8　设 $f(x)$ 为严格单调增加函数. 求证：若 $f(x_1) = f(x_2)$，则 $x_1 = x_2$.

证　用反证法. 若 $x_1 \neq x_2$，不妨设 $x_1 < x_2$，则因 f 严格单调增加，故有 $f(x_1) < f(x_2)$. 这与假设 $f(x_1) = f(x_2)$ 矛盾.

1.3　复合函数与反函数

△ **1.3.1**　设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ x^2 + x, & x > 0, \end{cases} \qquad 求 f(-x).$$

解　$$f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

1.3.2　已知 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$，求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

解 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$.

故 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x$.

1.3.3 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[g(x)]=1-x$ 且 $g(x)\geqslant 0$. 求 $g(x)$ 及其定义域.

解 $f[g(x)]=e^{[g(x)]^2}=1-x\Rightarrow g(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant 0\Rightarrow 1-x\geqslant 1\Rightarrow x\leqslant 0$.

1.3.4 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$，$x\neq 1$. 求 $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$ 和 $f\{f[f(f(x))]\}$.

解 $$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}-1}$$
$$=1-x\quad(x\neq 0,x\neq 1).$$

$$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=x,$$

$$f_3(x)=f[f_2(x)]=\frac{x}{x-1},$$

$$f_4(x)=f\{f[f(f(x))]\}=f[f_3(x)]=x.$$

一般地，$f_{2n}(x)=x$，$f_{2n-1}(x)=\frac{x}{x-1}\ (n\geqslant 1)$.

1.3.5 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1;\end{cases}\qquad g(x)=e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|<1,\\ 0, & |g(x)|=1,\\ -1, & |g(x)|>1,\end{cases}$$

即 $$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

$$g[f(x)]=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}^{1}, & |x|<1,\\ \mathrm{e}^{0}, & |x|=0,\\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1,\end{cases}$$

即 $$g[f(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1,\\ 1, & |x|=0,\\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}, & |x|>1.\end{cases}$$

1.3.6 设 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_n(x)=\underbrace{f(f\cdots(f(x)))}_{n\text{次复合}}$.

解 $f_2(x)=f(f(x))=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$,

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2{}^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

由此想到可用数学归纳法.设

$$f_k(x)=\underbrace{f(f\cdots(f(x)))}_{k\text{次复合}}=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}},$$

则容易验明

$$f_{k-1}(x)=f(f_k(x))=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

因此得 $f_n(x)=\underbrace{f(f\cdots(f(x)))}_{n\text{次复合}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}\quad(n\geqslant 1)$.

1.3.7 求 $y=\dfrac{2x-3}{3x+2}$ 的反函数.

解 由 $y=\dfrac{2x-3}{3x+2}$ 解得 $x=\dfrac{3+2y}{2-3y}$,故反函数为 $y=\dfrac{3+2x}{2-3x}$.

1.3.8 已知函数

$$y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 2,\\ x^2-4x+5, & x>2\end{cases}$$

的反函数为 $y=\varphi(x)$,求 $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

解 $x \leqslant 2$ 时,则 $y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1(y \leqslant 1)$;
$x > 2$ 时,由 $y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{y-1}(y > 1)$.

故 $$y = \varphi(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leqslant 1, \\ 2 + \sqrt{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

而 $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = 2 + \sqrt{\frac{3}{2} - 1} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.3.9 设 $\varphi(x)$,$\psi(x)$ 和 $f(x)$ 为单调增加函数.证明:若 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$,则 $\varphi[\varphi(x)] \leqslant f[f(x)] \leqslant \psi[\psi(x)]$.

证 设 x_0 为三个函数公共定义域的任一点,则 $\varphi(x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant \psi(x_0)$. 由题设不等式及 f 的单调增性知 $f[\varphi(x_0)] \leqslant f[f(x_0)]$,$\varphi[\varphi(x_0)] \leqslant f[\varphi(x_0)]$,从而 $\varphi[\varphi(x_0)] \leqslant f[f(x_0)]$. 同理可证 $f[f(x_0)] \leqslant \psi[\psi(x_0)]$. 由 x_0的任意性即得结论.

1.3.10 设 $f(x)$ 是$(-\infty, +\infty)$上的严格递增函数,且恒有 $f(f(f(x))) = f(x)$. 求证:$f(x) = x$.

证 用反证法.若结论不成立,不妨设 $f(x) > x$. 则由 f 的严增性得 $f(f(x)) > f(x)$,于是又有 $f(f(f(x))) > f(f(x)) > f(x)$. 这与假设矛盾.

类似可证 $f(x) < x$ 也不成立.故必有 $f(x) = x$.

1.4 一元函数的连续性与可微性

△ **1.4.1** 设

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & x \leqslant 0 \\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处连续. 问常数 a 与 b 应满足什么关系?

解 由 f 在 $x = 0$ 处连续,应有关系

$$f(0+0) = f(0-0) = 0,$$

即 $$\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin bx}{x} = \lim_{x \to 0-0} (a + bx^2) = a,$$

由此推知 $b = a$.

1.4.2 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 + e^{\frac{1}{x}}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 1 + x\sin\dfrac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

问 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是否连续，为什么？

解 $f(0+0) = \lim\limits_{x \to 0^+}(1 + e^{\frac{1}{x}}) = 1$，$f(0-0) = \lim\limits_{x \to 0}\left(1 + x\sin\dfrac{1}{x}\right) = 1$，$f(0) = 1$，即 $f(0+0) = f(0-0) = f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

1.4.3 研究函数 $y = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ 的连续性.

解 易见

$$y = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$$

此函数处处连续.

1.4.4 设

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}, & x \neq 0, \\ C, & x = 0, \end{cases}$$

其中 $f(x)$ 具有连续导数，且 $f'(x) > 0$，$f(0) = 0$. 设 $F(x)$ 连续，求常数 C 并讨论 $F'(x)$ 的连续性.

解 (1) $C = \lim\limits_{x \to 0} F(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}f(0) = 0.$

(2) 当 $x \neq 0$ 时，$F'(x) = \dfrac{1}{x^3}\left[x^2 f(x) - 2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right]$，此时 $F'(x)$ 是连续的. 而

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}f'(0),$$

故 $F'(0)=\frac{1}{3}f'(0)$.

$$\lim_{x\to 0}F'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{3}f'(0)=F'(0),$$

可见 $F'(x)$ 在 $x=0$ 也连续.

1.4.5 研究函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t, & x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可微性.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos x}{x}=0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{x^2}\cos t^2\,\mathrm{d}t$ 可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可微.

1.4.6 证明 $f(x)=x\sin|x|$ 在 $x=0$ 的二阶导数不存在.

证

$$f(x)=\begin{cases}x\sin x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x\sin x, & x<0\end{cases}$$

先求出

$$f'(x)=\begin{cases}\sin x+x\cos x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -\sin x-x\cos x, & x<0\end{cases}$$

由于