

硕士生入学应试指导书

高等数学 线性代数 1200 题

李大华

华中理工大学出版社

高等数学·线性代数 1200 题

李大华 编

华中理工大学出版社

(鄂)新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·线性代数 1200 题/李大华编.
武汉华中理工大学出版社, 1995 年 11 月

ISBN 7-5609-1207-9

I. 高…

I. 李…

III. ①高等数学-习题②线性代数-习题

IV. ①013-44②051.2-44

高等数学·线性代数 1200 题

李大华编

责任编辑:李立鹏

华中理工大学出版社发行

(武昌喻家山 邮编:430074)

新华书店湖北发行所经销

中南三〇九印刷厂印刷

开本:850×1168 1/32 印张:14.5 字数 366 000

1995 年 11 月第 1 版 1995 年 11 月第 1 次印刷

印数:1-8 000

ISBN 7-5609-1207-9/O·140

定价:12.50 元

前 言

本书根据国家教委制订的全国硕士研究生入学考试数学考试大纲的要求,精选了高等数学与线性代数共 1200 多道题,分为例题和习题两部分编写而成. 这些题目大多选自历年各高校的研究生入学试题及全国统考试题,类型全面,覆盖面广,信息量大.

我们假定读者手中已有一套高等数学与线性代数的教材,因而在每节的开头只列出内容要点,或列出一些很重要的但不易记住的公式. 各种类型问题的解题方法和技巧将有层次地贯串于整节的例题之中,以此为读者提供切实有效的指南. 每节后面都有相应数量的习题,供读者通过自己动手解题来掌握要领,触类旁通,提高解题的能力. 在书的末尾,给出了数学(一)至数学(五)的五套模拟试题,供读者自我检验.

左上角标有“ $\triangle$ ”记号者,表示该题为全国统考试题.

本书除作为硕士生入学考试的应考指南外,也可作为工科院校(包括电大、夜大、业大、职大等)学生学习高等数学和线性代数的教学参考书.

愿本书能给读者带来信心和希望.

编 者

1995 年 4 月

于华中理工大学

目 录

第一章 函数	(1)
1.1 函数概念	(1)
1.2 函数的几种特性	(1)
1.3 复合函数与反函数	(3)
1.4 一元函数的连续性与可微性	(6)
习题 1.1	(11)
第二章 极限	(15)
2.1 利用已知重要极限求极限	(15)
习题 2.1	(19)
2.2 用罗必塔法则求极限	(20)
习题 2.2	(23)
2.3 利用泰勒公式求极限	(24)
习题 2.3	(28)
2.4 无穷小量的比较	(29)
习题 2.4	(31)
2.5 利用极限存在准则求极限	(32)
习题 2.5	(37)
2.6 与导数有关的极限	(38)
习题 2.6	(41)
2.7 与积分有关的极限	(43)
习题 2.7	(47)
2.8 其他类型的极限	(48)
习题 2.8	(51)
第三章 微分法	(52)
3.1 复合函数微分法	(52)
习题 3.1	(54)
3.2 参数方程表示的函数的微分法	(56)
习题 3.2	(58)

3.3 偏导数与全微分的计算	(59)
习题 3.3	(53)
3.4 隐函数微分法	(64)
习题 3.4	(69)
3.5 高阶偏导数的计算	(70)
习题 3.5	(74)
3.6 方向导数与梯度	(76)
习题 3.6	(79)
3.7 n 阶导数的计算	(79)
习题 3.7	(83)
3.8 验证给定函数满足某微分方程	(84)
习题 3.8	(87)
3.9 变量代换问题	(89)
习题 3.9	(93)
第四章 微分学的应用	(95)
4.1 导数的几何意义与物理意义	(95)
习题 4.1	(98)
4.2 函数性态的研究	(100)
习题 4.2	(103)
4.3 一元函数的极值	(105)
习题 4.3	(110)
4.4 多元函数的极值	(112)
习题 4.4	(116)
4.5 切线切平面问题	(117)
习题 4.5	(122)
第五章 向量代数和空间解析几何	(124)
5.1 向量代数	(124)
习题 5.1	(125)
5.2 空间中的直线与平面	(126)
习题 5.2	(131)
第六章 一元函数积分法及重积分	(133)

6.1 基本积分公式的运用	(133)
习题 6.1	(135)
6.2 换元法与分部积分法	(136)
习题 6.2	(141)
6.3 有理函数及含三角函数的有理函数的积分	(143)
习题 6.3	(147)
6.4 其他类型的积分题	(148)
习题 6.4	(152)
6.5 广义积分	(153)
习题 6.5	(155)
6.6 二重积分的计算	(155)
习题 6.6	(160)
6.7 三重积分的计算	(162)
习题 6.7	(168)
第七章 曲线积分与曲面积分	(170)
7.1 曲线积分的计算	(170)
习题 7.1	(174)
7.2 格林公式·曲线积分与路径无关的条件	(175)
习题 7.2	(182)
7.3 曲面积分的计算	(184)
习题 7.3	(191)
7.4 高斯公式和斯托克斯公式	(193)
习题 7.4	(199)
第八章 积分学的应用	(202)
8.1 弧长和平面区域的面积	(202)
习题 8.1	(206)
8.2 体积·旋转体的侧面积	(209)
习题 8.2	(214)
8.3 积分在物理上的应用	(216)
习题 8.3	(221)
8.4 综合应用题	(224)

习题 8.4	(227)
第九章 微积分证明题	(236)
9.1 零点问题	(230)
习题 9.1	(234)
9.2 中值定理	(236)
习题 9.2	(243)
9.3 泰勒公式	(245)
习题 9.3	(250)
9.4 不等式	(252)
习题 9.4	(257)
第十章 无穷级数	(260)
10.1 正项级数	(260)
习题 10.1	(263)
10.2 任意项级数	(265)
习题 10.2	(270)
10.3 幂级数的收敛域与和函数	(272)
习题 10.3	(278)
10.4 求函数的幂级数展开式	(280)
习题 10.4	(284)
10.5 傅立叶级数	(286)
习题 10.5	(292)
第十一章 常微分方程	(295)
11.1 一阶微分方程	(295)
习题 11.1	(298)
11.2 全微分方程和可降阶的高阶方程	(300)
习题 11.2	(303)
11.3 二阶线性微分方程	(304)
习题 11.3	(310)
11.4 用积分给出的方程	(311)
习题 11.4	(314)
11.5 微分方程的应用	(315)

习题 11.5	(321)
11.6 其他类型的问题	(324)
习题 11.6	(328)
第十二章 线性代数	(331)
12.1 行列式的计算	(331)
习题 12.1	(339)
12.2 矩阵及其运算	(344)
习题 12.2	(354)
12.3 向量组的线性相关性·矩阵的秩	(359)
习题 12.3	(365)
12.4 线性方程组	(369)
习题 12.4	(379)
12.5 矩阵的特征值和特征向量	(385)
习题 12.5	(392)
12.6 二次型	(398)
习题 12.6	(404)
12.7 向量空间	(409)
习题 12.7	(417)
模拟试题	(423)
数学(试卷一)模拟试题(附参考解答)	(423)
数学(试卷二)模拟试题(附参考解答)	(430)
数学(试卷三)模拟试题(附参考解答)	(431)
数学(试卷四)模拟试题(附参考解答)	(437)
数学(试卷五)模拟试题(附参考解答)	(444)
参考书目	(451)

第一章 函 数

1.1 函数概念

1.1.1 求函数 $y = \sqrt{x-1} \ln|x-3|$ 的定义域.

解 $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1, |x-3| > 0 \Rightarrow x \neq 3$. 故函数的定义域为 $[1, 3) \cup (3, +\infty)$.

1.1.2 函数 $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$ 的定义域是_____.

解 由 $\left| \frac{2x}{1+x} \right| \leq 1$ 及 $x \neq -1$ 推得 $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

1.1.3 求函数 $y = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$ 的定义域.

解 $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \geq 0 \Rightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} - x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 故得 $2k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

1.1.4 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$;

(2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = 1, g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.

解 (1) f 与 g 不相同, 因为定义域不同.

(2) f 与 g 不相同, 因为对应规则不同.

(3) f 与 g 相同, 因为定义域与对应规则都相同.

1.2 函数的几种特性

1.2.1 证明 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

证 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2})$

$$= \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -f(x).$$

1.2.2 证明:定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任意函数都可表示为一个奇函数与一个偶函数的和,并且这种表示方法唯一.

$$\text{证 } f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

唯一性请读者自己证明.

1.2.3 设 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 满足关系式

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x}, a \text{ 为常数}, \quad (1)$$

证明 $f(x)$ 为奇函数.

证 用 $\frac{1}{x}$ 代替(1)中的 x , 得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = ax \quad (2)$$

由(1)、(2)解得 $f(x) = \frac{a}{3} \left(\frac{2}{x} - x \right)$, 则 $f(-x) = -f(x)$.

1.2.4 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数,且图形关于直线 $x=2$ 对称.证明 $f(x)$ 为周期函数.

证 依题设,有 $f(-x) = -f(x)$, $f(x) = f(4-x)$, 由此推得 $f(4-x) = -f(x-4)$, $f(-x) = f(4+x)$, 进一步推得 $f(4+x) = f(x-4)$. 令 $x-4=u$ 即得 $f(u+8) = f(u)$. 故 $f(x)$ 是以 8 为周期的周期函数.

1.2.5 设 $k > 0$ 为常数, $f(x) \neq 0$, 且 $f(x+k) = \frac{1}{f(x)}$,

求证: $f(x)$ 是以 $2k$ 为周期的周期函数.

$$\begin{aligned} \text{证 } f(x+2k) &= f((x+k)+k) \\ &= \frac{1}{f(x+k)} = \frac{1}{1/f(x)} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

1.2.6 设 a, b 为常数, 且 $b > a$. 函数 $y = f(x)$ 定义于 $(-\infty, +\infty)$, 它的图形既对称于直线 $x=a$, 又对称于直线 $x=b$. 则 $f(x)$

必是

- (A) 奇函数, (B) 偶函数,
(C) 周期函数, (D) 单调函数;

答()

解 应选(C). 函数的奇偶性和单调性都可排除. 下面验明周期性: 对 $\delta > 0$, 令 $x = a + \delta$, 则有

$$f(a + \delta) = f(a - \delta) \Rightarrow f(x) = f(2a - x)$$

同理可得 $f(2b - x) = f(x)$. 于是可以推出

$$f(x) = f(2a - x) = f(2b - (2a - x)) = f(x + 2(b - a)).$$

1.2.7 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a, b) 内严格单调增加, 证明 $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 在 (a, b) 内严格单调增加.

证 设 $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) < f(x_2)$, $g(x_1) < g(x_2)$, 从而 $\max\{f(x_2), g(x_2)\} > f(x_1)$, $\max\{f(x_2), g(x_2)\} > g(x_1)$. 于是得 $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$.

1.2.8 设 $f(x)$ 为严格单调增加函数. 求证: 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 = x_2$.

证 用反证法. 若 $x_1 \neq x_2$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则因 f 严格单调增加, 故有 $f(x_1) < f(x_2)$. 这与假设 $f(x_1) = f(x_2)$ 矛盾.

1.3 复合函数与反函数

△ 1.3.1 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 + x, & x > 0, \end{cases} \quad \text{求 } f(-x).$$

解 $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

1.3.2 已知 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$, 求 $f\left(\cos \frac{x}{2}\right)$.

解 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} = 2\left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right).$

故 $f\left(\cos \frac{x}{2}\right) = 2\left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) = 2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x.$

1.3.3 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[g(x)] = 1 - x$ 且 $g(x) \geq 0$.
求 $g(x)$ 及其定义域.

解 $f[g(x)] = e^{[g(x)]^2} = 1 - x \Rightarrow g(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x) \geq 0 \Rightarrow 1-x \geq 1 \Rightarrow x \leq 0$.

1.3.4 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$. 求 $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$ 和 $f\{f[f(f(x))]\}$.

解 $f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x} - 1}$
 $= 1 - x \quad (x \neq 0, x \neq 1).$

$$f_2(x) = f[f(x)] = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = x,$$

$$f_3(x) = f[f_2(x)] = \frac{x}{x-1},$$

$$f_4(x) = f\{f[f(f(x))]\} = f[f_3(x)] = x.$$

一般地, $f_{2n}(x) = x, f_{2n-1}(x) = \frac{x}{x-1} \quad (n \geq 1).$

1.3.5 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1; \end{cases} \quad g(x) = e^x.$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & |g(x)| < 1, \\ 0, & |g(x)| = 1, \\ -1, & |g(x)| > 1, \end{cases}$$

$$\text{即 } f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1, & |x| < 1, \\ e^0, & |x| = 0, \\ e^{-1}, & |x| > 1, \end{cases}$$

$$\text{即 } g[f(x)] = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 0, \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1. \end{cases}$$

1.3.6 设 $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x) = \underbrace{f(f \cdots (f(x)))}_{n \text{ 次复合}}$.

$$\text{解 } f_2(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x) = f(f_2(x)) = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

由此想到可用数学归纳法. 设

$$f_k(x) = \underbrace{f(f \cdots (f(x)))}_{k \text{ 次复合}} = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}},$$

则容易验明

$$f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

因此得 $f_n(x) = \underbrace{f(f \cdots (f(x)))}_{n \text{ 次复合}} = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (n \geq 1).$

1.3.7 求 $y = \frac{2x-3}{3x+2}$ 的反函数.

解 由 $y = \frac{2x-3}{3x+2}$ 解得 $x = \frac{3+2y}{2-3y}$, 故反函数为 $y = \frac{3+2x}{2-3x}$.

1.3.8 已知函数

$$y = \begin{cases} x-1, & x \leq 2, \\ x^2-4x+5, & x > 2 \end{cases}$$

的反函数为 $y = \varphi(x)$, 求 $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$.

解 $x \leq 2$ 时, 则 $y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1 (y \leq 1)$;
 $x > 2$ 时, 由 $y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow x = 2 + \sqrt{y - 1} (y > 1)$.

$$\text{故 } y = \varphi(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1, \\ 2 + \sqrt{x - 1}, & x > 1. \end{cases}$$

$$\text{而 } \varphi\left(\frac{3}{2}\right) = 2 + \sqrt{\frac{3}{2} - 1} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1.3.9 设 $\varphi(x), \psi(x)$ 和 $f(x)$ 为单调增加函数. 证明:

若 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, 则 $\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)]$.

证 设 x_0 为三个函数公共定义域的任一点, 则 $\varphi(x_0) \leq f(x_0) \leq \psi(x_0)$. 由题设不等式及 f 的单调增性知 $f[\varphi(x_0)] \leq f[f(x_0)]$, $\varphi[\varphi(x_0)] \leq f[\varphi(x_0)]$, 从而 $\varphi[\varphi(x_0)] \leq f[f(x_0)]$. 同理可证 $f[f(x_0)] \leq \psi[\psi(x_0)]$. 由 x_0 的任意性即得结论.

1.3.10 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的严格递增函数, 且恒有 $f(f(f(x))) = f(x)$. 求证: $f(x) = x$.

证 用反证法. 若结论不成立, 不妨设 $f(x) > x$. 则由 f 的严增性得 $f(f(x)) > f(x)$, 于是又有 $f(f(f(x))) > f(f(x)) > f(x)$. 这与假设矛盾.

类似可证 $f(x) < x$ 也不成立. 故必有 $f(x) = x$.

1.4 一元函数的连续性与可微性

△ 1.4.1 设

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & x \leq 0 \\ \frac{\sin bx}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处连续. 问常数 a 与 b 应满足什么关系?

解 由 f 在 $x = 0$ 处连续, 应有关系

$$f(0+0) = f(0-0) = 0,$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin bx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} (a + bx^2) = a,$$

由此推知 $b = a$.

1.4.2 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 + e^{\frac{1}{x}}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 1 + x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

问 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是否连续, 为什么?

解 $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x \sin \frac{1}{x}) = 1$, $f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + e^{\frac{1}{x}}) = 1$, $f(0) = 1$, 即 $f(0+0) = f(0-0) = f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

1.4.3 研究函数 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ 的连续性.

解 易见

$$y = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$$

此函数处处连续.

1.4.4 设

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x^2}, & x \neq 0, \\ C, & x = 0, \end{cases}$$

其中 $f(x)$ 具有连续导数, 且 $f'(x) > 0$, $f(0) = 0$. 设 $F(x)$ 连续, 求常数 C 并讨论 $F'(x)$ 的连续性.

解 (1) $C = \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{2} f(0) = 0$.

(2) 当 $x \neq 0$ 时, $F'(x) = \frac{1}{x^3} [x^2 f(x) - 2 \int_0^x t f(t) dt]$. 此时 $F'(x)$ 是连续的. 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{3} f'(0),$$

故 $F'(0) = \frac{1}{3} f'(0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} F'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[x^2 f(x) - 2 \int_0^x t f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{3} f'(0) = F'(0), \end{aligned}$$

可见 $F'(x)$ 在 $x=0$ 也连续.

1.4.5 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x} \int_0^{x^2} \cos t^2 dt, & x > 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可微性.

解 由 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^{x^2} \cos t^2 dt$ 可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可微.

1.4.6 证明 $f(x) = x \sin |x|$ 在 $x=0$ 的二阶导数不存在.

证

$$f(x) = \begin{cases} x \sin x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x \sin x, & x < 0 \end{cases}$$

先求出

$$f'(x) = \begin{cases} \sin x + x \cos x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\sin x - x \cos x, & x < 0 \end{cases}$$

由于