·现代管理科学基础知识·

规划论

GUIHUALUN

郭月心 编
曾文中 校

广东科技出版社

现代管理科学基础知识

规　划　论

郭月心　编

曾文中　校

广东科技出版社

现代管理科学基础知识
规 划 论
郭月心编　　曾文中校
广 东 科 技 出 版 社 出 版
广 东 省 新 华 书 店 发 行
广 东 新 华 印 刷 厂 印 刷
787×1092毫米 32开本 4.5印张 71,000字
1985年1月第1版 1985年1月第1次印刷
印数1—11,000册
统一书号 15182·74　　定价 0.60元

内 容 简 介

本书介绍现代化管理中常用的优化方法，包括分派问题和分枝定值法、整数规划、动态规划、非线性规划等。书中注意通过实际例子来说明这些优化技术的原理和方法，并附有习题和答案。通过本书，读者可以初步了解和掌握现代化管理优化技术的基本知识。

本书可供各级经济管理人员、企业管理干部、工业中专和高等院校有关专业的师生、现代管理科学和企业管理研究人员阅读和参考，也可用作培训经济管理人员、企业管理干部的参考教材。

出版说明

为了提高企业管理水平，适应四个现代化建设的需要，在广东省技术经济与管理现代化研究会、企业管理协会的支持和协助下，我们出版了“现代管理科学基础知识”小丛书。

这套小丛书是由华南工学院管理工程系主持编写的，暂分八册，每册一至两个专题。各册的题目和内容为：(一)预测与决策；(二)计划管理；(三)排队论与库存管理；(四)技术经济分析；(五)规划论；(六)价值工程；(七)成本优化；(八)投入产出分析。撰稿人都是从事现代管理科学研究或教学的同志。出版这套小丛书的目的是为了普及现代管理科学知识，为此采取小册子的形式出版。每册五万字左右，着重介绍基础知识，也列举若干实例，供应用时参考。书末附有练习题和答案，便于读者练习。力求做到文字通俗，说理清晰，适合具有中等文化水平的同志阅读。

这套丛书可供各地区、单位培训企业管理人员，或举办质量管理和现代化管理学习班时作参考教材使用，也可供各级企业管理人员自学。

现代管理科学是一门新的学科。在国内，这门学科已引起人们的重视，研究工作正在加紧进行。因此，在编写中，注意结合国内的实际情况，吸收国外现代管理科学的研究成果和理论，有选择地加以论述和介绍。但是，由于社会主义现代管理科学尚处在探索发展的过程中，不少问题正在研究探讨，所以，书中的论述和介绍，难免有不完善之处，欢迎读者批评指正。

前　言

本书介绍现代化管理工作中常用的优化方法。在生产实际中，为了完成某项任务，往往存在若干种不同的方案。这些方案都可以达到预定的目的，但是其中有些方案最合理、最经济有效，而另一些方案则不大合理或不够经济有效。哪些方案最优、最合理，哪些方案最劣、最不合理，怎样才能获得最优方案，这些问题是管理工作者所关心的。解决这些问题的科学方法就是优化方法，优化方法是一种能够帮助我们获得最优方案的有效方法。现代化管理工作中的优化方法，常常使用数学工具。以规划论这种数学方法为手段的优化方法，在管理工作中的应用相当普遍。例如企业经营管理中如何合理分配资料，如何安排生产作业计划才能做到收益最大（或成本最小）等的优化问题，都要用到规划论。

本书介绍的优化方法，就是以规划论为手段的。全书内容分为四个部分：即分派问题和分枝定值法，整数规划，动态规划和非线性规划。每一部分都选用不同类型的例子来说明有关原理和方法，而把必要的数学说明放在附录部分加以讨论。四个内容基本上是彼此独立的，读者可根据自己工作、学习的需要，有选择地阅读或参考。

本书力求通俗易懂，避免数学推导，内容由浅入深，由易到难，以方便读者阅读、掌握和应用。

1983年6月广州石牌

目　　录

一、分派问题与分枝定值法

在管理工作中，时常会遇到如何合理安排人员和设备之类的问题。例如某企业有n台设备，需要加工n种产品，如何安排生产才能使这些设备发挥更大的效率，取得总效率最大的效果呢？安排生产的方案可能有许多个。哪一个方案最符合要求呢？如果把各个方案一一列举出来，加以比较，再从中选出一个最优的方案，这虽说也可以找出最优方案，但是无疑是十分繁冗的事情。有没有一种比较省事的办法，不必逐个比较就能找出最优方案呢？回答是肯定的。本章介绍的内容就是这种有效的优化方法。

1.分 派 问 题

分派问题是现代企业管理中经常遇到的问题。在一个生产单位中，有一定的生产任务，工人或设备的数量也是一定的，每项任务都必须有一定数量的工人去做，而每个工人只能做其中的某一项任务。然而，由于任务的复杂程度不同，工人的技术熟练程度也不同，因此，不同的工人担任不同的工作，所发挥的效率就有所不同；对于设备的利用也有类似情况。为了做到人尽其才，物尽其用，必须将现有的任务、工人或设备作最优的配合，才能取得成本最低，工作效率最大的效果。如何以最优的配合取得最优的效果，是研究分派问题的目的。

分派问题是线性规划中一种特殊类型的问题，也是运输问题的特例。运输问题中的“产地”，就是分派问题中的工人或设备，而“销地”，就是任务。现通过下面的一些例子，说明求这类问题的最优解的步骤。

（1）人员的合理安排

〔例1〕假设有三件任务A、B、C分配给三个工人甲、乙、丙去做，各人的工作能力和技术水平不同，因而完成某项工作所取得的效果也不同，三人的工作效果列于表1。

表1 效果表

效果		工作 A	工作 B	工作 C
工人	甲	10	2	4
	乙	7	8	7
	丙	3	9	5

这个表叫做效果表。现在要求每件工作都由一个适当的工人担任，使总效果达到最大。

当然，这个问题也可以用另一种形式表示，比如说，怎样分派工作，才能使得总费用达到最小。这样，表中的数字就表示费用，叫做费用表。

如果目标是使总费用最小，那么最优解就是求最小值问题。如果目标是使总效果最大，那么就是求最大值问题。

本例的分派方案有许多个，因为三个工人中，随便那一个都可以分派去完成任意一项任务，如果把可能的分派方案都一一列举出来，再逐个方案计算、比较，然后才选出一个使总效果最大的方案，那是十分麻烦的，其实也没有必要。匈牙利数学家D.König提出了一个简便的解分派问题的方

法，叫做匈牙利法（Hungarian Mathod of Assignment）。从数学上来说，匈牙利法是通过矩阵的运算而获得分派问题的最优解的。因此我们先对矩阵作简略的介绍。

为了计算的方便，把费用表或效果表中表示费用或效果的数字，按照原来的位置和排列的次序排列出来，例如把本例效果表（表１）中表示效果的数字排列出来，就得出表２。数学上把这样的一组数字的组合，叫做矩阵。矩阵中各个数叫做矩阵的元素，横的叫做“行”，纵的叫做“列”，表２所表示的矩阵有三行、三列。行数和列数都相同的矩阵叫做方阵，表２所列的矩阵叫做“三阶方阵”*。

表 2

10	2	4
7	8	7
3	9	5

下面接着谈用匈牙利法求分派问题最优解的思路及步骤。

第一步：由于匈牙利法实质上是一种求最小值的方法，所以如果问题是求最大效果，那末，就要经这一步把问题转换成求最小值，再应用匈牙利法解出，如果问题是求最小费用或工时等一类问题，就不必经这一步，直接从第二步开始便可以。转换的方法如下：

在效果表中优先考虑效果最高的一个元素，如表１中，甲工人完成Ａ任务的效果最大，是10，这就是说把任务Ａ分派给甲工人是适宜的。于是把矩阵中各个元素用10去减，得

* 具有三行、三列的矩阵叫做三阶方阵。具有四行、四列的矩阵叫四阶方阵。具有n行，n列的矩阵叫n阶方阵或n阶矩阵。

到一个新的矩阵，这叫做缩减矩阵，如表 3 所列。在这个缩减矩阵中，各元素均由表 2 最大效率值10与每个数值的差额数组成的。差额大，表示原来的效率小；差额小，表示原来的效率大。因此，要求一个问题总的效率达到最大，只要通过求这个问题总的差额最小就可以获解。这样，原来求最大值的问题，就变成求最小值的问题。

表 3

0	8	6
3	2	3
7	1	5

表 4 单位：元

费用		任务		
		A	B	C
工人	甲	0	8	6
	乙	3	2	3
	丙	7	1	5

表 5 单位：元

费用		任务		
		A	B	C
工人	甲	0	7	3
	乙	3	1	0
	丙	7	0	2

表 6 单位：元

费用		任务		
		A	B	C
工人	甲	$\boxed{0}$	8	6
	乙	3	2	$\boxed{3}$
	丙	7	$\boxed{1}$	5

第二步：经过第一步的变换，把求最大值问题转换为求最小值问题。为了说明的方便，不妨暂假设有另一问题的费用表如表 4 所示，目的是求出最优的分派方案，即总的费用最小的方案。在表 4 中，从任务 A 来看，如果由丙去完成，所需费用为七元，由乙去完成只需三元，而由甲去完成，费

用为零元。显然，由甲去完成所需费用最低，因此，把任务A分派给甲是适宜的。对于任务B，由丙去完成所需费用最低，于是，在B列的三个元素都减去1，这样B列的三个元素变成7，1，0；同样地，对于任务C也作类似的处理。于是，得到一个新的矩阵，见表5。表5每列中的0，表示某工人担任对应任务的费用最低。

第三步：由于每个人只分派一种任务，而每种任务只由一人完成，因此把已经分派了任务的人，或已有人去做的工作，在相应的列或行上用一根直线划去。例如表5中工人乙的一行上有一个零，表示乙适宜安排完成C任务，于是把带零的一行划去，表明不再安排其他任务给乙。对甲、丙也作同样的处理，这样就得到一个最优的分派方案。这里，要求能够用最少的直线根数去划掉所有的零。如何衡量一个分派方案是否最优呢？从上述可以知道，每一项任务的安排，先是从费用最低的考虑，在最低费用的基础上再看看是否每个人都安排了一项任务，而且每项任务是否都有一个人去完成，如果满足了这个要求，那末这个方案就是最优的。对矩阵来说，划去矩阵中所有的零的最少直线根数，等于矩阵阶数，这就是最优方案的标志。因此，所求得的最优分派方案是乙工人分派C任务，甲工人分派A任务，丙工人分派B任务。根据表6可以计算出，完成任务的总费用是0＋1＋3＝4（元）。

但例1的目标是求总效果的最大值，即求最大值问题，对照表1，很容易地看出，当A工作由甲去完成效果最大为10，B工作由丙去完成效果最大为9，C工作由乙去完成效果最大为7，这样的工作分派就可以获得最大的总效果，就是10＋9＋7＝26。

现在将表 1 和表 4 加以比较。前者是一个求最大值的问题，它的最优分配是：

A任务由甲去完成；

B任务由丙去完成；

C任务由乙去完成。

后者（表 4 ）是一个求最小值的问题。表 4 内的各个数，由表 1 相应各个数减去最大数10，乘以 - 1 而得到。表 1 、表 2 的问题具有相同的分配方案，直观地可以知道，求一个问题的最大值，可以把该问题转换为另一个求最小值的问题，然后用匈牙利法去寻求这个问题的最优解。

然而，在实际问题中，一次求得最优方案的情况是不多见的。往往遇到有些任务没有人去做，或某些人没有分派到任务的情况。对矩阵来说，这种情况就表现为划去零的最少直线根数和矩阵阶数不相等。因此就必须作相应的调整，转换，这就是第四步的工作。

第四步：现在再假设有一费用表如表 7 所列，求一分派方案，使总费用达到最小。

表 7　　　　单位：元

费用		工作 A	工作 B	工作 C
工人	甲	25	31	35
	乙	15	20	24
	丙	22	19	17

表 8

25	31	35
15	20	24
22	19	17

表 9

10	12	18
0	1	7
7	0	0

表10

10	12	18
0	1	7
7	0	0

表11

10	11	17
0	0	6
8	0	0

按照上面的步骤，把费用表 7 的数字排列成表 8，各列减去该列最小的数，即第一列减去15，第二列减去19，第三列减去17，得到表 9。表 9 表明，乙工人分派A任务为宜，丙工人则宜分派B和C任务，甲工人则没有事干。显然，这是不符合题目要求的，因为在矩阵中只用两根直线就划去了所有的零（见表10），直线的根数少于矩阵的阶数 3 。因此，需要调整这个方案，或作一些转换。

可从表10矩阵中，在未被直线划去的各元素里找出最小数 1 ，于是将12、1、18、7 各元素都减去 1 ，获得另一个 0（希望得到较适当的分配）。同时，在两划线相交的元素 7 加上 1 ，其余元素不变（因为A工作宜由乙去做，故A 列划出纵线；丙行划横线表示丙已分配到适当的工作，两线交点对应工人丙就不适宜担任A工作），于是得到一个新的矩阵，见表11。

现在转回第三步，用最少根直线划去所有的零，仍然是两根，见表12。因而还要继续转换。未被划去的元素中最小的数为10，因此将未被划去的各元素减去10，其余元素不变，于是得到一个新矩阵，见表13。这样，最少要用三根直线才能划去所有的零，由此可知已获得最优解。最优分派方案是：因C列只有一个有零，表示工作C只有丙一人适宜作，因此C工作分派给丙，而在丙行和C列都用直线划去，说明丙

不能再安排其他任务，C任务也不再分派给别人。这样，剩下的B任务只有乙适宜，于是把它分派给乙，同时把乙行和B列划去，最后剩下A工作给甲，见表14。从表14及表7可算出这个方案所需费用是25＋20＋17＝62（元），达到费用最小。

表12

10	11	17
0	0	6
8	0	0

表13

	A	B	C
甲	0	1	7
乙	0	0	6
丙	8	0	0

表14

	A	B	C
甲	$\boxed{0}$	1	7
乙	0	$\boxed{0}$	6
丙	8	0	$\boxed{0}$

在计算过程中，每一行或每一列可能出现不只一个零。例如表14中工人乙的一行就有两个零，这表示把工作A和B分派给乙都是适宜的。当然，这两者也有差别，如果单独从乙工人来说，最好的还是分派工作A，因为费用最低，但是目标不仅是安排一个工人的工作，而是全部工人、所有工作都要安排恰当，因此衡量一个方案的优劣就应该通盘考虑，这就是匈牙利法的实质。

综上所述，匈牙利法的分析计算过程可归纳如下。

第一步，如果给出的是如效果表这样一类的问题，目标是求最大值，那么就先转换为求最小值的问题，即转换成缩减矩阵。如果给出的是如费用表这样一类的问题，目标是求最小值，那末就不必这一步。

第二步，考虑每一项工作应该由谁去做最适宜。对于矩阵来说，就是在每一列中应该有零出现，这是通过把每一列都减去该列各元素中最小的一个而获得的。

第三步，判断第二步得到的方案是否最优，即是否每项工作都有人去做，每个人是否都分派了工作。对于矩阵来说，就是用最少根的直线划去所有的零，直线根数等于矩阵阶数。

第四步，如果未满足上述第三步的要求，就继续对矩阵进行转换，在未被划去的各元素中继续寻找最小的数，使矩阵里一些元素转变为零，然后回到第三步，作出判断。如是者反复地进行，直至满足第三步的要求为止。

（2）机器设备的合理设置

〔例2〕某工厂订购了三台机器（A、B、C），有四个位置可供机器安装（一号位置，二号位置，三号位置，四号位置），但B机器不能装在第二号位置。由于这四个安装位置离工场中心的远近不同，所需要的原料运送费用也就不同，现要求总的原料运输费用达到最小，问这些机器安装在哪几个位置最适宜？

解：这是要求一个总运费达到最小的分派方案问题。先估计机器安装在每个位置后每天所需要的材料运送费用，然后用匈牙利法寻找最优解。费用列于表15。

表15 单位：元

费用		位置			
		一	二	三	四
机器	A	13	10	12	11
	B	15	N	13	20
	C	5	7	10	6
	S	0	0	0	0

由于机器B不能安装在二号位置，所以表中用一个很大的数

N表示这项运输费用，以排除机器B安装在二号位置的可能性。前面介绍匈牙利法时已提及到，匈牙利法是利用方阵的运算而取得最优解的。本例三台机器、四个位置，组成的是三行四列矩阵，因而要设法把它变成方阵。为此在第四行虚构一行，构成一个四阶方阵，然后按匈牙利法进行寻找最优的分派方案。

这是求最小值的问题。解法如前例，先把费用表转变成方阵，得表16，再将每列减去该列中最小的数。但由于添

表16

13	10	12	11
15	N	13	20
5	7	10	6
0	0	0	0

表17

3	0	2	1
2	N	0	7
0	2	5	1
0	0	0	0

表18

3	$\boxed{0}$	2	1
2	N	$\boxed{0}$	7
$\boxed{0}$	2	5	1
0	0	0	$\boxed{0}$

进了虚构行，每列都有零出现，因此改为每行减去该行的最小数，第一行减去10，第二行减去13，N减去13表示一个很大的数减去13，仍然是一个很大的数，还是用N表示。第三行减去5，这样得到表17。表17里的零最少需用四根直线才能划去，由于直线根数与方阵阶数相等，因此可以判断这是最优分派方案。分派办法是：机器A安装在第二号位置，机器B安装在第三号位置，机器C安装在第一号位置，这样每天总的原料运送费用是：5＋10＋13＝28（元），达到最小，见表18及表15。

（3）转产成本问题

在企业的生产管理中，常常碰到这类问题：有一条多产品的生产线，生产一组不同型号的若干种产品，每一种产品