

高等学校教材

建筑力学

主编

张忠国

上册

科学技术文献出版社



TU311

Z300

1

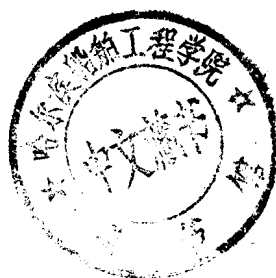
413235

高等学校教材

建 筑 力 学

(上 册)

编著 张忠国 赖真义 张忠发
主编 张忠国



科学技术文献出版社

前 言

本书是根据国家教委高等院校工科力学教材会议的精神,按照《建筑力学教学大纲》的基本要求编写的教材。适用于高等院校土建类大学本科、专科 150 学时的建筑力学课程,也可作为土建类成人大专班的教材,亦可供工程技术人员作参考书。

《建筑力学》是土建类各专业的主干课程。全书三篇共二十章分上、下两册,内容包括静力学、材料力学和结构力学三部分。该书写进了编者 30 多年教学实践经验,在编写中力求做到:体系合理、内容精练、深入浅出、通俗易懂、理论联系实际;注重对读者基本技能的训练、知识的更新、能力的培养和智力开发。为便于自学,每章之后都附有小结、习题和习题答案,上册书末附有截面的几何性质和型钢表,以供读者查用。附录 I 截面的几何性质宜放在第七章后面讲授。该书全部采用国际单位制。

本书上册由后勤工程学院张忠国教授主编,下册由宋月英副教授主编。参加上册编写的有张忠国(引言、一、二、五、十一、十三章)、赖真义(三、四、八、九、十章)、张忠发(六、七、十二章);下册有宋月英(引言、十八、十九、二十章)、王敦子(十五、十六章)、李宾(十四、十七章)。书中插图由李紫英、张先琴、马大福等描绘。本书在编写过程中得到了重庆建筑大学许多老师的关注。后勤工程学院力学教研室的全体教员对本书给予了大力支持和帮助。刘宏宝、童天民、李奎年、陈春义、陈悦林、刘兴华、万慧、石少卿、李敏、武赛虎、刘馨燕等教员对该书部份章节进行了校核,并提出了许多宝贵的意见和建议,在此一并表示谢意。

由于编者水平有限,书中缺点和错误在所难免,热忱希望广大读者批评指正。

编 者

一九九七年九月

目 录

第一篇 静 力 学

引 言	(1)
第一章 静力学基础	(2)
§ 1-1 力和刚体的概念	(2)
§ 1-2 静力学公理	(3)
§ 1-3 力在坐标轴上的投影	(7)
§ 1-4 力矩·合力矩定理	(9)
§ 1-5 力偶和力偶矩	(12)
§ 1-6 平面力偶系	(14)
§ 1-7 力线平移定理	(16)
内容小结	(17)
思考题和习题	(18)
习题答案	(21)
第二章 物体的受力分析	(22)
§ 2-1 约束与约束反力	(22)
§ 2-2 物体的受力分析和受力图	(25)
§ 2-3 物体系的受力分析	(27)
内容小结	(31)
习题	(33)
第三章 平面力系的平衡	(36)
§ 3-1 引言	(36)
§ 3-2 平面一般力系向一点简化	(36)
§ 3-3 平面一般力系简化结果的分析	(37)
§ 3-4 平面一般力系的平衡条件和平衡方程	(38)
§ 3-5 平面一般力系的几种特殊情况	(41)
§ 3-6 物体系的平衡	(45)
§ 3-7 静定与静不定的概念	(48)
§ 3-8 考虑摩擦时的平衡问题	(49)
内容小结	(52)
思考题和习题	(54)
习题答案	(59)

第四章 空间力系	(61)
§ 4-1 引言	(61)
§ 4-2 力在空间坐标轴上的投影	(61)
§ 4-3 力对轴之矩	(62)
§ 4-4 空间力系的平衡方程	(63)
§ 4-5 重心	(66)
内容小结	(70)
思考题和习题	(71)
习题答案	(73)

第二篇 材 料 力 学

引言	(74)
----------	------

第五章 轴向拉伸与压缩	(78)
§ 5-1 轴向拉(压)的概念	(78)
§ 5-2 轴向拉(压)时的内力	(78)
§ 5-3 轴向拉(压)时横截面上的应力	(81)
§ 5-4 轴向拉(压)杆的强度计算	(84)
§ 5-5 拉伸与压缩时的变形	(87)
§ 5-6 材料在拉伸与压缩时的力学性质	(92)
§ 5-7 拉压超静定问题	(98)
内容小结	(105)
习题	(107)
习题答案	(112)

第六章 剪 切	(114)
§ 6-1 剪切的概念及实例	(114)
§ 6-2 剪切的实用计算	(115)
§ 6-3 挤压的实用计算	(116)
§ 6-4 纯剪切应力状态的研究	(120)
内容小结	(121)
习题	(122)
习题答案	(124)

第七章 扭 转	(125)
§ 7-1 扭转的概念和实例	(125)
§ 7-2 外力偶矩、扭矩和扭矩图	(126)
§ 7-3 圆轴扭转时横截面上的应力	(128)
§ 7-4 圆轴扭转时的强度计算	(131)
§ 7-5 圆轴扭转时的变形及刚度计算	(132)
§ 7-6 非圆截面杆扭转简介	(136)
内容小结	(138)
习题	(139)
习题答案	(142)

第八章 弯曲内力	(143)
§ 8-1 概述	(143)
§ 8-2 弯曲时的内力	(145)
§ 8-3 剪力图和弯矩图	(148)
§ 8-4 弯矩、剪力与荷载集度间的微分关系及其应用	(152)
§ 8-5 叠加法作梁的内力图	(156)
内容小结	(158)
附:课堂练习	(164)
习题答案	(166)
第九章 弯曲应力	(167)
§ 9-1 引言	(167)
§ 9-2 梁的正应力	(168)
§ 9-3 梁的正应力强度计算	(171)
§ 9-4 梁的剪应力及其强度计算	(175)
§ 9-5 提高梁弯曲强度的措施	(182)
内容小结	(186)
习题	(188)
习题答案	(192)
第十章 弯曲变形	(194)
§ 10-1 弯曲变形的概念	(194)
§ 10-2 梁的挠曲线近似微分方程	(195)
§ 10-3 用积分法计算梁的变形	(196)
§ 10-4 用叠加法计算梁的变形	(199)
§ 10-5 梁的刚度校核	(201)
§ 10-6 提高梁弯曲刚度的措施	(202)
§ 10-7 简单超静定梁	(203)
内容小结	(209)
习题	(212)
习题答案	(217)
第十一章 应力状态和强度理论	(219)
§ 11-1 应力状态的概念	(219)
§ 11-2 平面应力状态分析——解析法	(222)
* § 11-3 平面应力状态分析——图解法	(226)
* § 11-4 三向应力状态简介	(232)
§ 11-5 广义虎克定律	(235)
§ 11-6 强度理论的概念	(238)
§ 11-7 常用的四个强度理论	(241)
内容小结	(246)
习题	(250)
习题答案	(253)

第十二章 组合变形	(255)
§ 12-1 组合变形的概念	(255)
§ 12-2 斜弯曲	(256)
§ 12-3 拉伸(压缩)与弯曲的组合	(260)
§ 12-4 偏心压缩(拉伸)	(263)
§ 12-5 截面核心	(267)
* § 12-6 弯曲与扭转的组合	(269)
内容小结	(273)
习题	(275)
习题答案	(278)
第十三章 压杆稳定	(279)
§ 13-1 压杆稳定的概念	(279)
§ 13-2 细长压杆的临界力	(281)
§ 13-3 压杆的临界应力	(285)
§ 13-4 压杆的稳定计算	(289)
§ 13-5 提高压杆稳定性的措施	(293)
* § 13-6 其它构件稳定问题简介	(295)
内容小结	(296)
习题	(297)
习题答案	(299)
附录 I 截面的几何性质	(300)
§ I-1 静矩和形心	(300)
§ I-2 惯性矩和惯性积	(302)
§ I-3 平行移轴定理和组合截面的惯性矩	(304)
内容小结	(308)
习题	(308)
习题答案	(311)
附录 II 材料力学大型作业	(312)
附录 III 工程常用量的单位换算表	(313)
附录 IV 型钢表	(315)
(上册)主要参考书目	(320)

第 一 篇

静 力 学

引 言

静力学主要研究物体在力系作用下处于平衡状态时的平衡条件。作用在物体上的若干个力或一群力称为力系；所谓物体的平衡，是指物体相对于地面保持静止或作匀速直线运动的状态。例如建筑物、桥梁、机床和作匀速直线运动的汽车等均处于平衡状态。必须指出，一切平衡都是相对的、暂时的和有条件的。平衡条件是指物体处于平衡状态时，作用在物体上的力系应满足的条件。

研究物体的平衡问题，实际上就是研究物体上力系的平衡条件及其应用。在研究物体平衡时，往往需要把一个复杂的力系简化为一个简单力系，并保持作用效果相同，这个过程称为力系的简化或合成。

静力学的任务是：对单个物体和物体系进行受力分析；将作用在物体上的复杂力系进行简化；讨论和建立各种力系的平衡条件，并应用这些条件解决工程中的计算问题。所以，静力学是研究物体平衡的科学。静力学在实际工程中应用很广泛，它是学习材料力学和结构力学的基础。

第一章 静力学基础

本章将介绍静力学的基本概念和公理、力在坐标轴上的投影、力矩和力偶、合力矩定理、平面力偶系和力线平移定理等。

§ 1—1 力和刚体的概念

一、力的概念

力是大家很熟悉的名词,它是人们在长期的生活和生产实践中形成的。例如:当推车时,人的手感到受压,车在手的作用下,其运动状态会发生改变。可见,在人的手与车之间存在着一种相互的机械作用,抽象地称之为力。再如:挥动榔头将钉子打入木头内、手拉弹簧使它伸长、地球对物体的吸引产生重力等实例中,榔头与钉子之间、手与弹簧之间、地球与物体之间都存在着相互的机械作用,由此得出力的定义:力是物体间的相互机械作用。必须指出,力必须有两个或两个以上物体之间的相互作用时才会产生。所以,每个力都有它的受力物体和施力物体。

力的这种作用会使物体的运动状态发生改变或使物体发生变形。力使物体运动状态发生改变的效应称为力的外效应,力使物体形状发生改变的效应称为力的内效应。例如:力作用在小车上可使它由静止变为运动或使它由运动变为静止;力作用在钢筋上可使它由直变弯,也可以使它由弯变直。静力学研究力的外效应,材料力学和结构力学研究力的内效应。

由实践可知,力对物体的作用效应,取决于力的三要素。当这三个要素中任何一个改变时,力的作用效应也要随之改变。

力是一个既有大小又有方向的量,因此,力是矢量(或向量)。通常用一个带箭头的直线段来表示力的三要素。如图 1-1(a)所示,线段 AB 的长度(按一定的比例尺)表示力的大小;用线段的起点或终点表示力的作用点(图 1-1(a)(b));用线段的方位和箭头指向表示力的方向。通过力的作用点沿力的方向的直线,称为力的作用线。图 1-1 表示了力的图示法,在后面的计算中,力的大小一般是用数字来表示,例如力 $F = 30\text{kN}$ 。本书采用新的国家标准,力矢量用黑斜体字母例如 $\boldsymbol{F}$ 、 $\boldsymbol{P}$ 、 $\boldsymbol{Q}$ 等来表示,而力的大小用普通字母 F 、 P 、 Q 来表示。

本书采用国际单位制(SI),力的单位是牛顿或千牛顿,其代号为牛(N)或千牛(kN)。在工程单位制中,力的单位是公斤(kg)或吨(t)。两种单位的换算关系为

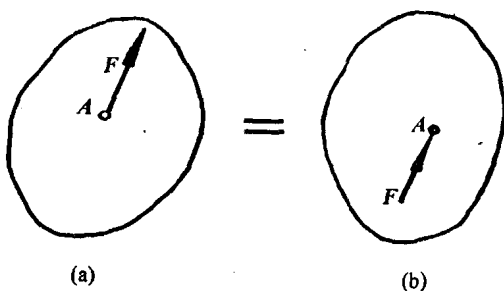


图 1-1

1 公斤力(kgf) = 9.8 牛顿(N)

1 吨(t) = 9.8 千牛顿(kN)

二、刚体的概念

在静力学中所研究的物体都是指刚体。所谓刚体是指在力作用下不变形的物体。刚体是理想化的力学模型,在自然界和工程中并不存在这样的物体。实际上任何物体在力的作用下都将发生变形。但在实际工程中,许多物体受力后变形都很小,因此,略去此变形对研究结果并无多大影响,而且可使问题大为简化。因此,对这样的物体可略去其变形视为刚体。如果物体变形很小或变形对所研究的问题没有实质性影响,则可将物体抽象为刚体。由于静力学是研究物体的平衡问题,物体的变形对其研究的问题影响很小,故把物体都视为刚体。因此,静力学又称为刚体静力学。

必须指出,将物体抽象为刚体是有条件的,这与所研究的问题有关。如果在所研究的问题中,物体的变形成为主要因素时,就不能再把物体看成刚体,而要看成为变形体。例如在材料力学中研究物体的强度、刚度问题,就应把物体(或构件)看成变形体,但研究一切变形体的平衡问题时,仍可将物体视为刚体。

§ 1—2 静力学公理

静力学公理是人们在长期的生活和生产实践中总结概括出来的。这些公理简单而明显,为大家所公认,而无需证明。静力学公理是对力的基本性质的总结,是静力学的理论基础。

一、二力平衡公理

作用于刚体上的两个力平衡的必要和充分条件是:这两个力的大小相等、方向相反、且作用在同一直线上(图 1-2)。 $F_1 = -F_2$ (负号表示 F_2 与 F_1 方向相反)

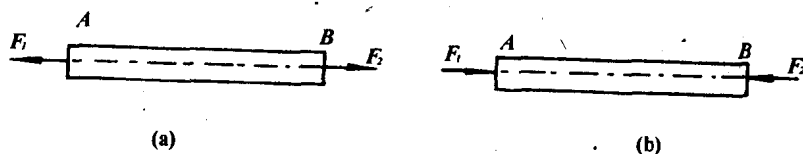


图 1-2

必要条件是指:如果两力平衡,则这两个力一定等值、反向、且共线;充分条件是指如果两个力等值、反向、且共线,则此刚体一定平衡。

这个公理揭示了当作用于同一刚体上最简单的力系平衡时,所必须满足的条件。对于刚

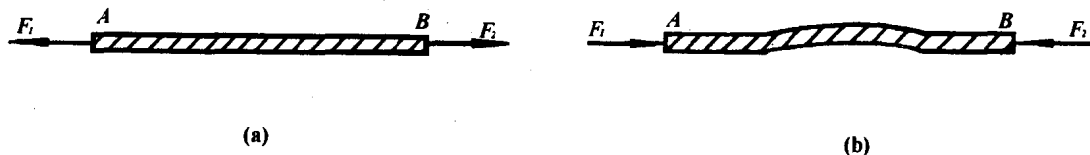


图 1-3

体来说,这个条件是必要与充分的;对于变形体,这个条件是必要的,但不是充分的。如图 1-3

所示,软绳受两个等值反向的拉力可以平衡(图 a),当受两个等值反向的压力时,就不能平衡了(图 b)。

只受两个力作用而处于平衡的构件(或杆件),称为二力构件(或二力杆)。二力构件所受力的特点是:两个力必须是沿作用点的连线;二力构件的形状可以是直杆、曲杆和折杆,如图(1-4)所示,当不计构件自重时,图中各构件的两个力 F_1 和 F_2 都必定沿 AB 的连线。

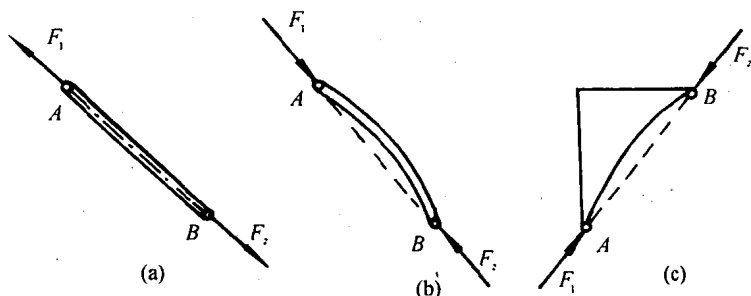


图 1-4

二、加减平衡力系公理

在作用于刚体的任何一个力系上,增加或减去任意一个平衡力系,并不改变原力系对刚体的作用效应。

当刚体在某一个力系作用下处于平衡状态时,该力系称为平衡力系,而平衡力系对于刚体的平衡和运动状态没有影响。这个公理是力系简化的重要依据。

这个公理也只适用于刚体。对于变形体来说,增加或减去一个平衡力系,改变了变形体各处的受力状态,将引起其外效应和内效应的变化。

从前面两个重要公理可导出重要推论如下。

推论一:力的可传递性原理 作用于刚体上的力可以沿其作用线任意移动,而不改变它对刚体的作用效应。

证明:设有力 F 作用在刚体上的A点,如图 1-5(a)所示,在其作用线上任取一点B,根据加减平衡力系公理,在该点加一个平衡力系 F_1 和 F_2 ,且使 $F_2 = -F_1 = F$ (图 1-5b),因为力 F 与 F_1 大小相等、方向相反,组成平衡力系。再根据加减平衡力系公理,可去掉这两个力,只剩下一个作用于B点的力 F_2 ($F_2 = F$)与原作用于A点的力 F 等效(图 1-5c)。这样,就可看作将作用于A点的力 F 沿其作用线移到了B点。

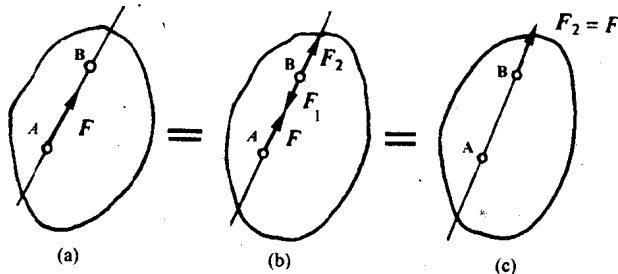


图 1-5

这个原理是我们所熟悉的。例如:人在车前拉小车和在车后用同样大小、方向相同且在同一作用线上的力推小车,效果是一样的。由此原理可得出结论:作用于刚体上的力的三要素是,力的大小、方向和作用线。

应该注意,力的可传性原理只适用于刚体,而不适用于变形体,因为力的移动将会引起变形体内效应的改变。例如:受拉的杆件,由于力沿其作用线移动,会变成受压,即内效应发生了

改变。还应指出,力只能在同一刚体上移动,不能移到另一刚体上去。例如图 1-6(a)所示结构,由 AB 和 BC 两杆组成。在 BC 杆上作用有力 P ,若将力 P 沿其作用线移到 AB 杆上(图 1-6b),显然(a)图与(b)图结构的受力是不等效的。因为 AB 杆和 BC 杆为两个刚体,原作用在 BC 刚体上的力,不能移到 AB 刚体上去,所以力的可传性是指在同一刚体上力可沿其作用线任意移动。

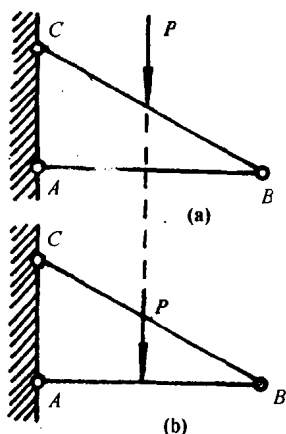


图 1-6

三、力的平行四边形法则

作用于物体上同一点的两个力,可以合成一个合力。合力的作用点仍在该点,合力的大小和方向是由以这两个力为边所作的平行四边形的对角线来确定(图 1-7a)。

这种合成力的方法,称为矢量法,合力 R 称为这两个分力 F_1 和 F_2 的矢量和(或几何和)。可用矢量式表示为

$$R = F_1 + F_2 \quad (1-1)$$

即合力矢 R 等于两个分力矢 F_1 和 F_2 的矢量和。注意:它与代数等式 $R = F_1 + F_2$ 的意义是完全不同的,不能混淆。

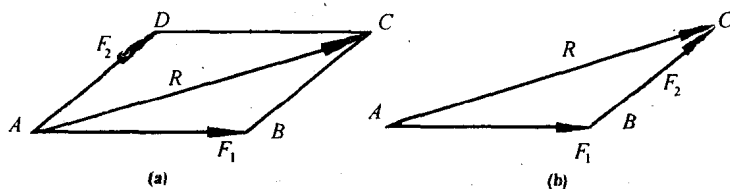


图 1-7

为了方便,在用矢量法求合力时,往往不必画出整个平行四边形,如图 1-7(b)所示,可从 A 点作一个与力 F_1 大小相等、方向相同的矢量 AB ,过 B 点再作一个与 F_2 大小相等、方向相同的矢量 BC 。则 AC 即表示力 F_1 、 F_2 的合力 R 。这种求合力的方法称为三角形法则。

利用力的平行四边形法则或三角形法则,可以方便的求出汇交于一点的两个力的合力。若刚体上作用有若干个力,且其作用线汇交于一点时,可用下面的作图方法求其合力。

设在刚体的同一平面内作用有 4 个力 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 ,它们汇交于 O 点,构成平面汇交力系(图 1-8a),现欲求其合力。其作法是:在力系所在的平面内任取一点 a (图 1-8b),从 a 点开始,按照各力的大小和方向,依次将各力首尾相接,连成一个开口的多边形 $abcde$,最后的封闭边力矢量 ae 即为力系的合力 R 。由图上可知,合力 R 等于各分力的矢量和,其矢量表达式为

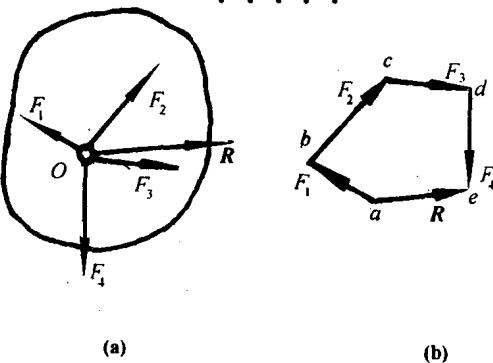


图 1-8

$$R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i \quad (1-2)$$

多边形 $abcde$ 称为力多边形;上述求合力的作图规则称为力多边形法则。它是连续运用力的平行四边形法则,或力的三角形法则导出的。上述三个法则都是用作图来求合力,故统称为求平面汇交力系合力的图解法或几何法。

应该注意:作图时要选择恰当的比例尺,准确地画出各力的大小和方向;作力多边形时,各力的顺序可以任意变换,作出的力多边形形状不同,但合力的大小和方向是完全相同的;作图

时各力必须首尾相接,合力 R 的指向是由第一个力的起点 a ,指向最后一个力的终点 e (即合力 R 的终点与最后一个力的终点相接);合力的大小($R = ae$)和方向可从图上量得;合力 R 的作用点仍在原力系的汇交点 O 。

由平行四边形法则,可以将汇交于一点的两个力合成一个合力,称为力的合成;反之,根据该法则,也可将一个力分解为两个力,称为力的分解。力的合成结果是唯一的,而力的分解则有许多种结果,因为以同一个力为对角线可作出无限多个不同的平行四边形。如图 1-9(a)所示,在已知合力 R 的情况下,可将其分解为分力 F_1 、 F_2 或 F_3 、 F_4 等等。因此,要使问题有确

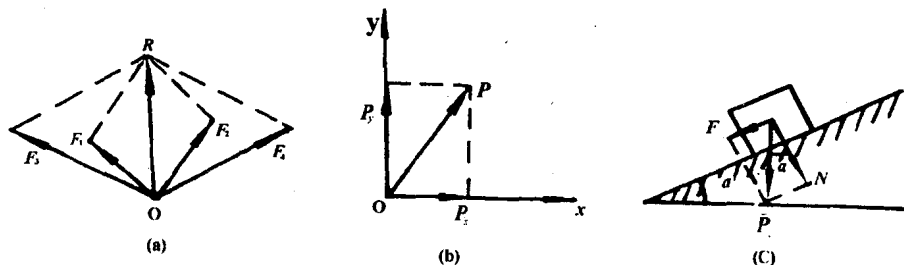


图 1-9

定的解答,就必须附加条件。在实际工程中,常需将力沿某个指定方向分解,一般是沿两个互相垂直的方向分解。如图 1-9b 所示,将力 P 沿坐标轴 X 、 Y 分解为水平分力 P_x 和竖向分力 P_y 。如图 1-9(c)所示,有一沿斜面下滑的物体,常须将重力 P 分解为两个分力,一个是与斜面平行的分力 F ,这个力使物体沿斜面下滑,另一个是与斜面垂直的分力 N ,这个力使物体下滑时紧贴斜面,这两个分力的大小由三角函数关系知:

$$F = P \sin \alpha \quad N = P \cos \alpha$$

由力的平行四边形法则可得到下面重要推论。

推论二:三力平衡汇交定

理 若刚体在三个力作用下处于平衡,且其中有二个力的作用线相交于一点,则第三个力的作用线必通过该交点(或简述:三力平衡必汇交于一点)。

证明:设在同一平面内有不平行的三个力 F_1 、 F_2 和 F_3 ,分别作用于刚体的 A 、 B 、 C 三点上,使刚体处于平衡状态(图 1-10)。根据力的可传性原理,将力 F_1 、 F_2 沿其作用线移到 O 点,并按力的平行四边形法则,合成一个合力 R_{12} ,则力 F_3 应与 R_{12} 平衡。根据二力平衡公理,力 F_3 必定与 R_{12} 共线,所以力 F_3 必通过 F_1 与 F_2 的汇交点 O 。

三力平衡汇交定理常常用来确定在三力作用下平衡时其中某未知力的方向。

四、作用与反作用定律

两物体间相互作用的力,总是大小相等、方向相反,沿同一直线,且分别作用在两个物体上。

这个定律概括了自然界中物体相互作用的关系,表明一切力总是成对出现的。有作用力就必有反作用力,它们总是同时出现,共同消失的,彼此互为依存条件,是对立统一的两个方面。

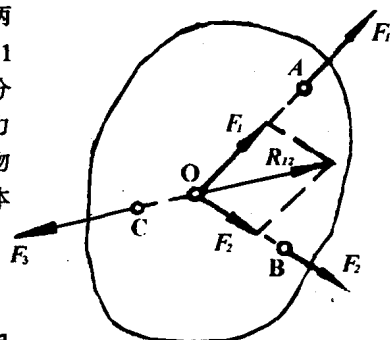
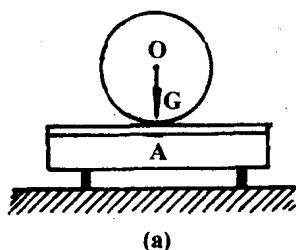


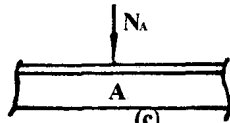
图 1-10



(a)



(b)



(c)

图 1-11

应当强调指出,前面二力平衡公理中的两个力是等值、反向、共线且作用在同一刚体上构成平衡力系;而作用力与反作用力定律中的两个力,也是等值、反向、共线,但它们是分别作用在两个不同的物体上。所以,作用力与反作用力不构成二力平衡力系。两者有本质区别,不能混淆。

例如,人在向上跳时,脚对地面一个作用力,同时引起地面对脚的反作用力,人就是因地面对脚的反作用力的作用下而跳起来的。作用力与反作用力分别作用在地面和脚上。又例如:当人用手推墙壁,手给墙一个作用力,同时墙给手一个反作用力,这两个力分别作用在墙和手上。再例如:重量为 G 的车轮置于光滑的轨道上(图 1-11a)。车轮与轨道是两个相互作用的物体,设车轮对轨道的压力为 N_A ,作用于轨道上(图 1-11c);同时,轨道给车轮一个反作用力 N_A' ,作用在车轮上(图 1-11b)。根据作用力与反作用力定律 $N_A = -N_A'$,应注意 N_A 与 N_A' 是分别作用在车轮和轨道上,二者不构成平衡力系;而重力 G 与轨道反作用力 N_A' ,两者作用在同一车轮上,构成二力平衡力系。

§ 1-3 力在坐标轴上的投影

一、力的投影

力的投影,来源于平行光照射下物体影子的概念。设力 $F = \overline{AB}$ 在 oxy 平面内(图 1-12)。从力 F 的起点 A 和终点 B 分别作 ox 轴的垂线 Aa 和 Bb ,两垂足间的距离 ab 并冠以适当的正负号称为力 F 在 x 轴上的投影,常用符号 X 表示。同理,从力 F 的起点 A 和终点 B 分别作 oy 轴的垂线 Aa' 和 Bb' ,则线段 $a'b'$ 称为力 F 在 y 轴上的投影,记为 Y 。

设 α 和 β 表示力 F 与 x 轴和 y 轴正向间的夹角,由图 1-12 可知力 F 的投影为:

$$\left. \begin{aligned} X &= F \cos \alpha \\ Y &= F \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

若已知力 F 在 x 轴和 y 轴上的投影 X 和 Y ,由图上几何关系即可求出力 F 的大小和方向为:

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{|Y|}{|X|} \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

力的投影是代数量。它是有正负号的,并且规定:当力的投影,从始端 a 到末端 b 的取向与坐标轴的正向相同时,投影值为正,反之则为负。例如图 1-13 所示,在 oxy 平面内有力 F_1 、 F_2 、 F_3 和 F_4 ,试求各力在 x 和 y 坐标轴上的投影。由图可知四个力的投影分别为:

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1 \cos \alpha & Y_1 &= -F_1 \sin \alpha \\ X_2 &= 0 & Y_2 &= -F_2 \\ X_3 &= -F_3 \cos \alpha & Y_3 &= F_3 \sin \alpha \\ X_4 &= -F_4 \cos \alpha & Y_4 &= -F_4 \sin \alpha \end{aligned}$$

由上面可得出结论:当力(F_2)与某轴(x 轴)垂直时,力在该轴上的投影为零;当力(F_2)与某轴(y 轴)平行或在该轴上

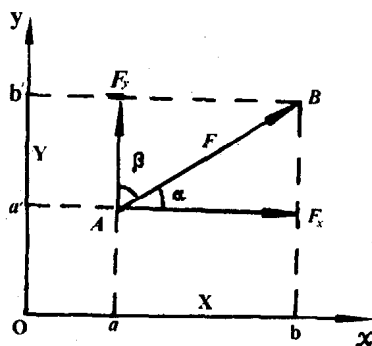


图 1-12

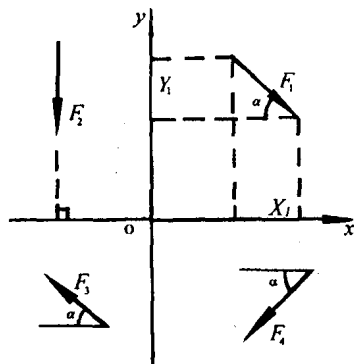


图 1-13

时,它在该轴上投影的大小与该力的大小相同,而正负号视与轴同向为正,反向为负。

应当指出:力的投影与分力的区别是力的投影是代数量,只有大小而无方向;同一个力分解所得的分力是矢量,两者不能混为一谈。如图 1-12 所示,力 F 在直角坐标系中, X 和 Y 分别表示力 F 在 x 和 y 轴上的投影;而 F_x 和 F_y 表示力 F 在 x 和 y 轴方向的分力。由图 1-12 可知,此时力 F 的投影 X 、 Y 的大小与分力 F_x 、 F_y 在数值上相等(即 $X = F_x$ $Y = F_y$)。但前者在图上不带箭头为代数量,而后者带箭头为矢量。为了加深理解,若取斜坐标系 oxy (图 1-14),力 F 的投影为 X 、 Y ,分力为 F_x 、 F_y ,由图可见,此时力 F 的投影与其分力的大小不相同。投影 X 、 Y 的大小由 A 、 B 两点分别向 x 、 y 轴引垂线来确定($X = ab$, $Y = a'b'$);而分力 F_x 、 F_y 的大小和方向由平行四边形法则确定。

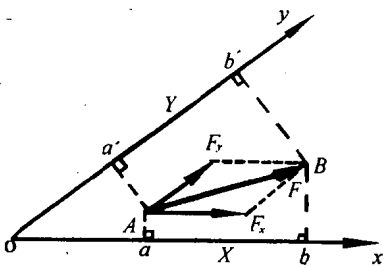


图 1-14

二、合力投影定理

各力均位于同一平面内且汇交于一点的力系,称为平面汇交力系。下面讨论平面汇交力系中各力的投影与其合力在同一轴上投影的关系。设物体上受一平面汇交力系 F_1 、 F_2 、 F_3 作用,如图 1-15a 所示。用力多边形法则求其合力 R 如图 1-15(b) 所示。选取直角坐标系 oxy ,将合力 R 和各力 F_1 、 F_2 、 F_3 分别向 x 轴投影得:

$$R_x = ad, \quad X_1 = ab, \quad X_2 = bc, \quad X_3 = -cd$$

由图 1-15b 可见: $ad = ab + bc - cd$

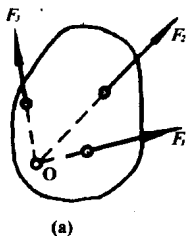
$$\text{即: } R_x = X_1 + X_2 + X_3$$

同理可得合力在 y 轴上的投影为:

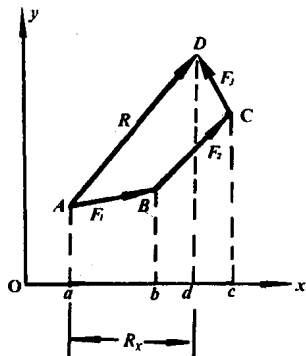
$$R_y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

式中: X_1 、 X_2 、 X_3 和 Y_1 、 Y_2 、 Y_3 分别表示各力 F_1 、 F_2 、 F_3 在 x 轴和 y 轴上的投影; R_x 和 R_y 分别表示 F_1 、 F_2 、 F_3 三个力的合力 R 在 x 轴和 y 轴上的投影。

若将上述合力投影与诸分力投影的关系推广到 n 个力组成的平面汇交力系中,可得到:



(a)



(b)

图 1-15

$$\left. \begin{aligned} R_x &= X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum X \\ R_y &= Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = \sum Y \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

即合力在某轴上的投影等于力系中各分力在同一轴上投影的代数和,称为合力投影定理。运用合力投影定理,算出合力的投影 R_x 和 R_y 后,就可求得合力 R 的大小和方向:

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} \\ \text{tg} \alpha &= \left| \frac{R_y}{R_x} \right| = \left| \frac{\sum Y}{\sum X} \right| \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

式中 α 角表示合力 R 与 x 轴间所夹的锐角。合力 R 的投向由 R_x 、 R_y 的正负号判定。运用式(1-6)计算合力 R 的大小和方向,这种方法称为平面汇交力系求合力的解析法(或投影法)。

例 1-1 图 1-16 所示在 A 点作用有四个力,已知 $F_1 = 0.5\text{kN}$, $F_2 = 1\text{kN}$, $F_3 = 0.4\text{kN}$, $F_4 = 0.3\text{kN}$,各力的方向如图所示,试用解析法求此力系合力的大小和方向。

解:选取直角坐标系 Axy 如图所示, F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 四个力在 x 、 y 轴上的投影分别为:

$$X_1 = -0.5\cos 10^\circ = -0.5 \times 0.985$$

$$\begin{aligned}
 &= -0.492\text{kN} \\
 X_2 &= +1 \times \cos 45^\circ = 1 \times 0.707 = 0.707\text{kN} \\
 X_3 &= +0.4 \times \cos 30^\circ = 0.4 \times 0.866 = 0.346\text{kN} \\
 X_4 &= 0 \\
 Y_1 &= -0.5 \sin 10^\circ = -0.5 \times 0.174 = -0.087\text{kN} \\
 Y_2 &= -1 \times \sin 45^\circ = -1 \times 0.707 = -0.707\text{kN} \\
 Y_3 &= +0.4 \times \sin 30^\circ = 0.4 \times 0.5 = 0.2\text{kN} \\
 Y_4 &= 0.3\text{kN}
 \end{aligned}$$

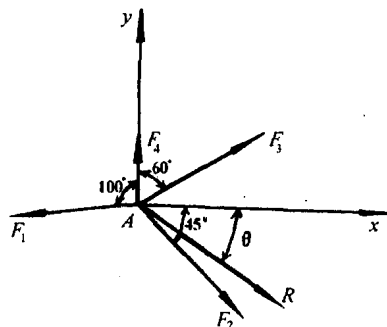


图 1-16

由合力投影定理,可得合力在 x 、 y 轴上的投影为:

$$\begin{aligned}
 R_x &= \sum X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = -0.492 + 0.707 + 0.346 \\
 &= 0.561\text{kN} \\
 R_y &= \sum Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = -0.087 - 0.707 + 0.2 + 0.3 \\
 &= -0.294\text{kN}
 \end{aligned}$$

由(1-5)式得合力 R 的大小为:

$$\begin{aligned}
 R &= \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} \\
 &= \sqrt{(0.561)^2 + (-0.294)^2} = 0.633\text{kN}
 \end{aligned}$$

合力的方向为:

$$\tan \theta = \left| \frac{R_y}{R_x} \right| = \frac{0.294}{0.561} = 0.5240 \Rightarrow \theta = 27^\circ 36'$$

由计算结果知 $R_x > 0$ 和 $R_y < 0$, 故合力 R 应指向在右下方(即在第四象限内), 它与 x 轴所夹的锐角 $\theta = 27^\circ 39'$, 如图 1-16 所示。

§ 1-4 力矩·合力矩定理

力对物体的作用效应,除了使物体产生移动效应外,还可使物体产生转动效应。例如,支承于光滑平面上的物体,受水平力的作用,当力的作用线通过物体的重心时,物体只产生移动,若力的作用线不通过物体的重心时,物体将同时发生移动和转动。力的移动效应取决于力的大小和方向。如何度量力使物体转动的效应呢?它是用一个物理量叫力矩来度量的,下面来讨论这个问题。

一、力对点之矩——力矩

例如:用扳手转动螺母时(图 1-17a),作用于扳手一端的力 F 使扳手绕 O 点转动,螺母被拧紧或放松。扳手绕 O 点使螺母产生转动的效应,不仅与力 F 的大小有关,而且与 O 点到力 F 作用线的垂直距离 d 也有关。又例如:大家都知道用手推门时,在离门轴较远的地方用较小的力就可以把门推开。反之,要用较大的力才能把门推开;再例如:用杠杆撬动笨重物体时,转动效应与力的大小和力到支点的距离都有关。

在力学上是用乘积 Fd 作为量度力 F 使物体绕 O 点转动效应的物理量,这个量称为力 F 对 O 点之矩,简称力矩。所以,反映力对物体转动效应的物理量称为力矩。用符号 $m_o(F)$ 表示,其大小为:

$$m_o(F) = \pm Fd \quad (1-7)$$

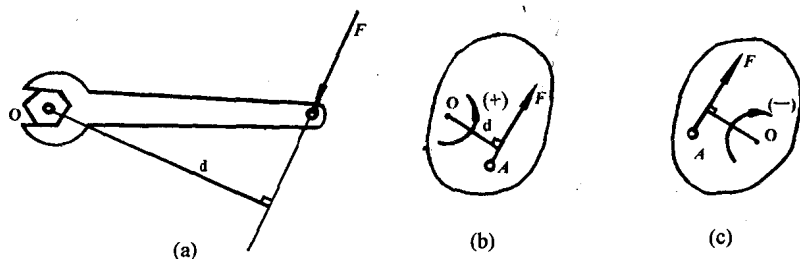


图 1-17

式中: O 点称为矩心; O 点到力 F 作用线的垂直距离 d , 称为力臂; $\pm$ 号表示转向, 并且规定: 力使物体绕矩心 O 逆时针方向转动时, 力矩取正号 (图 1-17b); 作顺时针方向转动时, 取负号 (图 1-17c)。根据以上情况, 平面内力对点之矩, 只取决于力矩的大小和转向, 因此平面内力对点之矩 (即力矩) 是一个代数量。

力矩的国际制单位是牛顿米 ($\text{N}\cdot\text{m}$) 或千牛顿米 ($\text{kN}\cdot\text{m}$)。

力矩的工程制单位是公斤米 ($\text{kgf}\cdot\text{m}$)。

从式 (1-7) 中可知, 力矩有如下特性:

- (1) 相同的力矩使物体的转动效应相同, 力臂越长越省力;
- (2) 力 F 对任一点之矩, 不会因为该力沿其作用线滑动而改变, 因为此时力和力臂的大小均未改变;
- (3) 当力的作用线通过矩心时 (即 $d=0$), 则力矩等于零;
- (4) 互成平衡的二力对同一点之矩的代数和等于零。

最后再指出一点, 前面是由力对于物体上固定点的作用引出力矩的概念。实际上, 作用于物体上的力可以对任意一点取矩。同一个力对不同点的力矩是不同的。

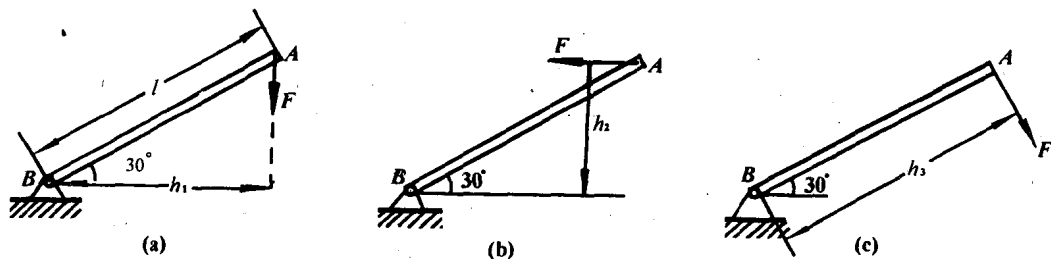


图 1-18

例 1-2 数值相同的三个力按不同的方式施加在同一杆件 (相当于扳手) 的 A 端, B 端为固定铰支座 (相当于螺帽), 如图 1-18a、b、c 所示。若已知力 $F=150\text{N}$, AB 杆长 $l=200\text{mm}$ 。试求: 三种情况下力 F 对 B 点之矩。

解: 三种情况下, 虽然力的大小, 作用点均相同, 并且为同一矩心, 但由于力的作用线方向各不相同, 即力臂不同, 因而力对 B 点之矩也不相同。

$$(a) \text{图: } m_B(F) = -Fh_1 = -150 \times 0.2 \times \cos 30^\circ$$

$$= -25.98\text{N}\cdot\text{m};$$

$$(b) \text{图: } m_B(F) = Fh_2 = 150 \times 0.2 \times \sin 30^\circ = 15.00\text{N}\cdot\text{m}$$

$$(c) \text{图: } m_B(F) = -Fh_3 = -150 \times 0.2 = -30.00\text{Nm}$$