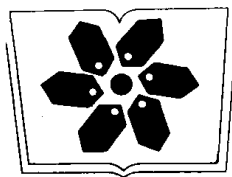


# 热处理过程的数值模拟

刘 庄 吴 肇 基 著  
吴 景 之 张 毅

科学出版社

TG 156  
L77



中国科学院科学出版基金资助项目

# 热处理过程的数值模拟

刘 庄 吴肇基 著  
吴景之 张 毅

科 学 出 版 社

1996

## 内 容 简 介

本书是热处理过程的数值模拟研究成果的专著,它全面地介绍了数值模拟热处理过程的各个方面,包括淬火过程的温度场、组织场、应力场和浓度场的计算;应力对组织转变的影响;实测残余应力分布;计算与实例数据比较;影响计算准确度的因素分析;回火过程的计算;安全评估等,最后给出一些典型的应用算例。

全书以轴对称问题为主线,分段阐述,逐步展开,附有主要程序框图及详细的文字说明,具有简明、易懂、便于掌握和自学,并侧重实用的特点。所述方法和技巧亦可推广到一般二维或三维问题。

根据本书所介绍的理论和方法已形成软件包 *NSHT*,可供生产、教学及研究部门应用。

本书可供机械制造、金属热加工等方面的生产和研究部门科技人员使用,也可作为高等院校热处理专业的研究生和本科生的教学参考书。对于其它金属热加工专业以及传热学、固体力学专业,也有一定的参考价值。

### 图书在版编目(CIP)数据

热处理过程的数值模拟/刘庄等著. -北京:科学出版社,1996

ISBN 7-03-005339-7/TK·23

I. 热… II. 刘… III. 热处理-工艺-过程-数值模拟  
N. TG156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 12737 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1996 年 10 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1996 年 10 月第一次印刷 印张: 11

印数: 1-1 200 字数: 283 000

定 价: 28.80 元

## 前 言

热处理是决定零件内部组织与性能的最后一道热加工工序。采用淬火加回火工艺可大大改善零件的机械性能,但同时不可避免地带来残余应力的不利影响。如何预测,从而控制残余应力,则是生产中迫切希望解决的问题。作者有幸在“七五”、“八五”期间获得机械部基金和国家重大成套装备中大型铸锻件重点攻关项目的支持,从事热处理过程各场量变化规律的研究,研究采用数值模拟与物理模拟相结合的方法;用物理模拟提炼有关的数学模型,及最终对程序的验证;用数值模拟方法编制了描述热处理过程各场量变化的软件包 NSHT (Numerical Simulation on Heat Treatment) 用以检验或优化工艺方案。该软件包已在生产中得到应用,取得一些效果。当然,这些成果还是初步的。为了推广应用,并不断改进、完善,我们将近十年的工作总结成书以飨读者,并恳请读者批评指正,以促进热处理技术进步和获得更大的经济效益。

本书宗旨以介绍作者研究成果为主,为使读者能对数值模拟技术有全面的了解,对基本原理和方法作了扼要、通俗的介绍。更系统的有关理论和严格的推导,读者如有需要可参阅有关的专著,这里不做赘述。

书中所用参数、变量符号尽量统一,并列于书首,供阅读时参考。但引用文献中公式和资料时,以忠实原著为主,仍沿用原文中的符号,加以具体说明,此时所用符号可能与书中其它部分所用符号不同,请读者注意不要混淆。

全书共分十一章,第二章中的换热系数选取和有限差分法求解部分,第三、六、十一章和附录部分由吴景之教授级高工执笔;第八、九章由吴肇基教授执笔;第十章由张毅高工执笔;其余如前言,第一章,第二章中的有限单元法求解部分,第四、五、七章由刘庄教

授执笔并汇总成书。

前后参加此项工作的除笔者外,尚有第一重型机械集团公司的李范英高工、李燕芳高工、赵膺哲高工、孙煜伟工程师、朱亚刚高工;上海重机厂的冯湘林、韩兆隆高工,许中兰、凌进、陈汉潮工程师;清华大学的李有道教授,研究生徐景宏、王耀、魏玉宝、张悦及博士生许学军、刘春成等。铁道科学院沈沂言高工为机械性能和相变塑性的测试做了大量细致的工作。此外,还得到机械部重大装备司庄大象高工、傅树立高工的热心支持、关怀和帮助。在此我们一并表示衷心的感谢。

最后,愿以此书献给培育我们四人成长共同母校——清华大学。

著者

1996. 4. 22

# 主要符号表

## 拉丁字母符号

|                   |                                                           |
|-------------------|-----------------------------------------------------------|
| $A$               | 表面面积, $\text{m}^2$                                        |
| $a$               | 热扩散系数或称为导温系数, $\text{m}^2/\text{s}$                       |
| $C$               | 摩尔浓度, 分母为各物质的总体积, $\text{mol}/\text{cm}^3$                |
| $c_p$             | 材料定压比热, $\text{J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$       |
| $CR$              | 冷却速率, $^\circ\text{C}/\text{s}$                           |
| $D$               | 扩散系数, $\text{cm}^2/\text{s}$                              |
| $E$               | 弹性模量, $\text{MPa}$                                        |
| $G$               | 剪切模量, $\text{MPa}$                                        |
| $H$               | 换热系数或总换热系数, $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  |
| $H'$              | 塑性模量, $\text{MPa}$                                        |
| $H_k$             | 对流换热系数, $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$      |
| $H_r$             | 辐射换热系数, $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$      |
| $J_{1c}$          | 断裂韧度, $\text{KJ}/\text{m}^2$                              |
| $j_x$             | 在 $x$ 方向上的摩尔流率, $\text{mol}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$ |
| $K$               | 相变塑性模型中的系数                                                |
| $K_1$             | 应力强度因子, $\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$                      |
| $K_{1c}$          | 断裂韧度, $\text{MPa} \sqrt{\text{m}}$                        |
| $L$               | 相变潜热, $\text{J}/\text{kg}$ 或 $\text{J}/\text{m}^3$        |
| $L_M$             | 熔化潜热, $\text{J}/\text{mol}$                               |
| $Q$               | 热流率, 单位时间的热流量, $\text{W}$                                 |
| $q$               | 单位表面积的热流率或称作比热流率或热流密度, $\text{W}/\text{m}^2$              |
| $r, \theta, \phi$ | 球坐标系的坐标                                                   |
| $S$               | 应力偏量, $\text{MPa}$                                        |
| $S_1$             | 轴向偏应力, $\text{MPa}$                                       |
| $S_2$             | 径向偏应力, $\text{MPa}$                                       |
| $S_3$             | 切向偏应力, $\text{MPa}$                                       |

|                |                                    |
|----------------|------------------------------------|
| $S_i$          | 剪切偏应力,MPa                          |
| $S_{ij}$       | 偏应力张量,MPa                          |
| $T$            | 温度,℃                               |
| $T_i$          | 初始转变温度,℃                           |
| $T_f$          | 终止转变温度,℃                           |
| $t$            | 过程进行时间,s                           |
| $t_i$          | 初始转变时间,s                           |
| $t_f$          | 终止转变时间,s                           |
| $t^*$          | 虚拟时间,s                             |
| $T_0$          | 初始温度,℃                             |
| $T_c$          | 环境介质温度,℃                           |
| $T_M$          | 熔点,K                               |
| $T_w$          | 工件表面温度,℃                           |
| $u, v$         | 轴向、径向位移,mm                         |
| $V$            | 组织转变量,完成转变的组织量与参加转变的全量之比           |
| $W_x$          | 在 $x$ 方向上的质量流率, $g/(cm^2 \cdot s)$ |
| $x, y, z$      | 直角坐标系的坐标                           |
| $z, r, \theta$ | 圆柱坐标系的坐标                           |

### 希腊字母符号

|               |                   |
|---------------|-------------------|
| $\alpha_A$    | 奥氏体的热膨胀系数         |
| $\alpha_B$    | 贝氏体的热膨胀系数         |
| $\alpha_F$    | 铁素体的热膨胀系数         |
| $\alpha_M$    | 马氏体的热膨胀系数         |
| $\alpha_P$    | 珠光体的热膨胀系数         |
| $\beta_B$     | 奥氏体转变成贝氏体时的相变膨胀系数 |
| $\beta_M$     | 奥氏体转变成马氏体时的相变膨胀系数 |
| $\beta_P$     | 奥氏体转变成珠光体时的相变膨胀系数 |
| $\gamma_{cr}$ | 剪切应变              |
| $\partial_A$  | 物质 $A$ 的活度        |
| $\Delta t$    | 时间步长,s            |
| $\Delta V$    | 组织转变增量            |

|                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| $\varepsilon$            | 应变                      |
| $\bar{\varepsilon}$      | 等效应变                    |
| $\varepsilon_{\theta}$   | 切向应变                    |
| $\varepsilon_c$          | 蠕变应变变量                  |
| $\dot{\varepsilon}_c$    | 蠕变应变速率, 1/s             |
| $\varepsilon_{ij}$       | 应变张量                    |
| $\dot{\varepsilon}_{ij}$ | 蠕变应变速率张量, 1/s           |
| $\varepsilon_r$          | 径向应变                    |
| $\varepsilon^p$          | 相变塑性                    |
| $\varepsilon_z$          | 轴向应变                    |
| $\lambda$                | 材料的导热系数, W/(m · °C)     |
| $\mu$                    | 泊松(Poisson)系数, 或称泊松比    |
| $\mu_A$                  | 物质 A 的化学位               |
| $\rho$                   | 材料密度, kg/m <sup>3</sup> |
| $\sigma$                 | 应力, MPa                 |
| $\bar{\sigma}$           | 等效应力, MPa               |
| $\sigma_{\theta}$        | 切向应力, MPa               |
| $\sigma_C$               | 断裂强度, MPa               |
| $\sigma_{ij}$            | 应力张量, MPa               |
| $\sigma_m$               | 平均应力, MPa               |
| $\sigma_r$               | 径向应力, MPa               |
| $\sigma_s$               | 屈服极限, MPa               |
| $\sigma_z$               | 轴向应力, MPa               |
| $\tau_{xy}$              | 剪切应力, MPa               |

# 目 录

## 前言

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| <b>第一章 绪论</b> .....            | 1   |
| <b>第二章 温度场的计算</b> .....        | 5   |
| 2.1 控制方程和初始条件、边界条件 .....       | 5   |
| 2.2 换热系数的测定和选择 .....           | 11  |
| 2.3 有限差分法求解 .....              | 25  |
| 2.4 有限单元法求解 .....              | 38  |
| 参考文献.....                      | 57  |
| <b>第三章 组织转变的计算</b> .....       | 59  |
| 3.1 概述 .....                   | 59  |
| 3.2 按连续冷却转变曲线模拟 .....          | 59  |
| 3.3 按等温转变曲线模拟 .....            | 64  |
| 3.4 进展和趋势 .....                | 69  |
| 参考文献.....                      | 72  |
| <b>第四章 应力场的计算</b> .....        | 74  |
| 4.1 概述 .....                   | 74  |
| 4.2 弹性轴对称问题的基本控制方程 .....       | 75  |
| 4.3 空间离散化 .....                | 76  |
| 4.4 弹性问题的泛函及变分 .....           | 79  |
| 4.5 热弹性问题 .....                | 82  |
| 4.6 热弹塑性问题 .....               | 84  |
| 4.7 约束条件.....                  | 100 |
| 4.8 力学性能参数的选择和测定.....          | 102 |
| 4.9 由温度对机械性能影响而引起的附加应力和应变..... | 108 |
| 4.10 组织转变对应力的影响 .....          | 112 |
| 4.11 卸载问题的处理 .....             | 114 |
| 4.12 计算框图 .....                | 115 |

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| 参考文献 .....                        | 118 |
| <b>第五章 应力与组织转变的相互关系</b> .....     | 119 |
| 5.1 概述 .....                      | 119 |
| 5.2 应力对相变动力学影响的回顾 .....           | 120 |
| 5.3 应力对相变塑性影响的回顾 .....            | 129 |
| 5.4 应力与组织转变关系的实验研究 .....          | 134 |
| 参考文献 .....                        | 158 |
| <b>第六章 残余应力的测试</b> .....          | 160 |
| 6.1 概述 .....                      | 160 |
| 6.2 内层剥除法 .....                   | 161 |
| 6.3 环芯法 .....                     | 182 |
| 参考文献 .....                        | 189 |
| <b>第七章 淬火残余应力计算值与实测值的比较</b> ..... | 190 |
| 7.1 概述 .....                      | 190 |
| 7.2 方案一 (1# 试件) 计算与分析 .....       | 190 |
| 7.3 方案二 (2# 试件) 计算与分析 .....       | 195 |
| 7.4 方案三 (3# 试件) 计算与分析 .....       | 196 |
| 7.5 讨论 .....                      | 198 |
| <b>第八章 回火过程的模拟计算</b> .....        | 202 |
| 8.1 概述 .....                      | 202 |
| 8.2 回火过程出现的体积变化 .....             | 204 |
| 8.3 回火过程中材料的力学性能变化 .....          | 208 |
| 8.4 回火过程中应力松弛的计算 .....            | 209 |
| 8.5 回火后残余应力计算的验证 .....            | 221 |
| 参考文献 .....                        | 224 |
| <b>第九章 浓度场的计算</b> .....           | 225 |
| 9.1 概述 .....                      | 225 |
| 9.2 控制方程 .....                    | 228 |
| 9.3 初始条件、边界条件、移动边界的处理 .....       | 232 |
| 9.4 扩散系数的选择 .....                 | 237 |
| 9.5 算例 .....                      | 251 |
| 参考文献 .....                        | 253 |

|                                          |     |
|------------------------------------------|-----|
| <b>第十章 带有冶金缺陷工件的安全评估</b> .....           | 254 |
| 10.1 概述 .....                            | 254 |
| 10.2 工件中的冶金缺陷 .....                      | 254 |
| 10.3 锻件中缺陷的检测及缺陷形状简化与超声波当量尺寸的转换<br>..... | 255 |
| 10.4 材料淬火过程中断裂韧度的测定 .....                | 258 |
| 10.5 应力强度因子和失效评估计算 .....                 | 266 |
| 10.6 安全评估计算程序 .....                      | 270 |
| 参考文献 .....                               | 281 |
| <b>第十一章 热处理过程数值模拟示例</b> .....            | 283 |
| 11.1 转子淬火冷却工艺参数的确定 .....                 | 283 |
| 11.2 转子喷水淬火过程应力分析 .....                  | 289 |
| 11.3 支承辊差温加热淬火过程的温度和应力变化 .....           | 304 |
| 参考文献 .....                               | 313 |
| <b>附录 物性参数对应力场计算精度的影响</b> .....          | 314 |
| <b>索引</b> .....                          | 333 |

# 第一章 绪 论

随着现代科学技术的发展,对机械零件的性能和可靠性的要求越来越高.金属零件的内在性能和质量,除材料成份特征外,主要是在热加工过程中形成的.热处理则是热加工过程的最后一道工序,起着举足轻重的作用.重要零件都要经过热处理工序做组织和性能的最后调整.由于热处理过程中,零件内部温度分布不均匀,组织转变过程的不均匀而产生内应力,如淬火过程中的瞬时应力(又称淬火应力)和最后形成的残余应力.如果处理不当,淬火应力或残余应力过大,不仅影响零件使用寿命、设备安全,甚至在淬火过程中产生裂纹或开裂而使零件报废.这问题对大型锻件如大型轧辊、发电机转子等更为突出.热处理过程中的瞬时应力和残余应力,一直是有关科学、技术工作者极为关注的重要问题之一.

热处理过程是温度、组织转变、应力三方面相互作用的复杂过程.其关系如图 1-1 所示.图中:① 表示温度对应力的影响.以淬火为例,冷却初期零件表面冷却速度高,心部低,表面收缩量大,心部小.为保持物体的连续性,表面受到拉应力,心部受到压应力的作用,它们是热应力(或称温度应力).

② 表示温度对组织转变的作用.热处理本质即在于控制温度变化以获得所需要的组织.

③ 表示组织转变对应力的影响.组织转变引起体积改变,如奥氏体转变成马氏体或贝氏体时体积膨胀.因温度分布、变化不均,零

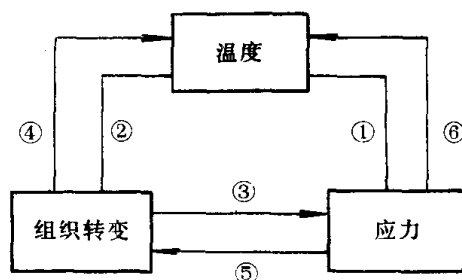


图 1-1 热处理过程中温度、组织转变和应力关系示意图

件各部位组织转变不能同步进行,转变量不同,膨胀量亦不同,亦会产生内应力,这就是组织应力。

④ 表示组织转变对温度场的影响。组织转变时产生潜热,淬火过程中奥氏体转变释放潜热,它反过来又影响温度场的分布。

⑤ 表示应力对组织转变的影响。如在应力作用下改变等温转变时的初始转变时间和终了转变时间以及产生所谓之相变塑性等。

⑥ 表示应力对温度的影响。在应力作用下零件发生变形,产生变形功,其中部分或大部分可转化为热能,反过来又影响温度的分布。但一般热处理过程中,变形量不超过 2%—3%,变形功比较小,多数人认为可以略去不计。

这样复杂的过程,要在理论上对温度场、组织场、应力场耦合求解解析是很困难的,甚至是不可能的。用物理模拟方法进行研究也有许多局限性,因为很难找到各种物理量都能满足相似原理的物理模型。对小试样在一定条件下测得的温度场、组织场、应力场很难直接用到真正尺寸的实物上。由于热处理过程涉及高温,欲对实物的温度、组织、应力做在线测量,在当前技术条件下亦是不可能的。仅表面测量(除温度外)都很困难,更不用说零件内部的各场量的分布。目前能做的是在热处理完了之后,在室温状态下通过解剖的方法测定组织状态和残余应力分布情况。这不仅要耗费大量人力、物力、时间,而所得到的仅是某一零件、某一具体工艺条件下的最后情况,很难获得能直接推广应用的规律性成果。故目前热处理工艺大多数还是建立在定性分析基础上,凭经验制定的。这种状况与经济迅速发展要求的高质量、低成本是不相适应的。

自计算机问世以来,计算机模拟(或称数值模拟)方法得到迅速发展。数值模拟是以物理模型为基础,建立数学模型,通过计算机求解各场量。计算机求解多用离散化的方法求近似解。由于计算机容量大,计算速度快,可以得到足够精确的近似解。

数值模拟的优越性是很明显的。它虽然不能直接给出诸如相态分布、应力分布与工艺参数的函数关系,但它能对温度场-组织

场-应力场进行耦合计算,给出每一瞬时的温度场、组织场、应力场的信息,并直接观察到其在过程中变化的情况;它在计算中可以考虑各物性参数是温度和组织状态的函数关系;它不像用物理模拟方法时,要求各物理量都要满足相似原理,才能将小试样实测结果直接用到实物上.它要求的只是数学模型的一致,这是比较容易做到的.用同一数学模型编制的程序对小试样计算结果与实测结果一致,可以认为根据实物具体条件对其计算的结果就是可靠的.不必花费大量人力、物力对实物解剖,而且得到更全面的信息.此外,它还可以预测工艺结果是否符合组织、性能要求,进行安全评估等.利用数值模拟不仅可以对现行工艺进行校核,而且可以优化工艺方案和参数,从而使热处理工艺的制定建立在更可靠的科学基础上.

但另一方面,热处理过程的模拟,涉及温度场、应力场和组织场的耦合计算,大大增加了问题的复杂性,远不如结构应力分析(包括热应力分析)方面成熟,后者已有许多很好的大型商品软件,如 SAP, ADINA, MARC, I-DEAS 等供应市场,得到广泛的应用,而这些软件都尚不能满足模拟热处理过程的要求.

数值模拟的准确性,首先决定于数学模型的正确性,这需要大量实验研究做基础;其次是各物性参数的准确性;最后还要有可靠的算法.当前在一般淬火问题中,主要是应力对组织转变影响的数学模型尚不成熟,而对回火问题几乎是空白,各种材料的物性参数资料也很缺乏,目前世界上尚没有成熟的模拟热处理过程软件出现在市场上.要充分发挥数值模拟的优越性,在生产中得到实用并取得重大效益还有不少工作要做.随着计算机技术的不断发展,实验方法和手段的不断完善,实验资料的不断积累,这些难点必将被逐渐克服,可预期不久的将来会有很好的实用软件问世,并得到广泛应用.

热处理过程的数值模拟技术,始于 60 年代末、70 年代初,此后得到迅速发展.至 1984 年 5 月 23—25 日在瑞典的 Linköping 大学召开了第一届金属材料热处理内应力计算会议(International

Conference, Calculation of Internal Stresses in Heat Treatment of Metallic Materials), 有 17 个国家、近百名学者参加, 并发表了大量有价值的文献, 将研究工作推向高潮。此后每两年召开一次这样的国际会议, 使研究工作不断向深入和实用化发展。

我国开展热处理数值模拟工作较晚。首先, 是一些访问学者和留学生在国外留学时开展了这方面的研究。进入 80 年代后, 国内一些大专院校和科研单位、企业才陆续开展这方面的工作。作者有幸在“七五”、“八五”期间获得机械部基金和国家重大装备大型铸锻件重点攻关项目的支持, 从事热处理过程各场量变化规律的研究。研究用数值模拟与物理模拟相结合的方法。用物理模拟方法建立适用的相变塑性、应力对组织转变影响、回火松弛等的数学模型。在数值模拟方面首先编制了温度场与组织场的耦合计算, 能预测淬火结果的组织状态和机械性能; 其后编制了温度场-组织场-应力场耦合计算程序; 再后将应力对组织转变影响和相变塑性反映到程序中, 形成实用的 NSHT 的软件包, 可对工艺进行模拟计算并预测残余应力分布; 最后, 用实测试件残余应力分布以考核软件的可靠性和准确性。此外, 对淬火的安全评估和回火过程亦作了初步探讨, 取得一些进展。书中将上述成果分成十一章加以全面系统的介绍。

## 第二章 温度场的计算

热处理过程温度场计算,基本上是在一定的初始条件和边界条件下,工件内热传导问题. 固体热传导问题常用的数值解法有“有限差分法”和“有限单元法”两种. 有限差分法物理概念清楚,推导方便,能够达到较高的精度,但对处理复杂形状和复杂边界条件较困难. 有限元法则可较方便地处理任何复杂形状边界,亦可达较高精度,但推导过程较繁琐.

热处理过程必有相应的组织转变,计算时要考虑组织转变的影响. 其影响主要表现在热物性参数的选择和潜热的计算上.

### 2.1 控制方程和初始条件、边界条件

#### 2.1.1 控制方程

众所周知、固体热传导的控制方程就是 Fourier 导热方程. 最基本的 Fourier 定律在稳态条件下可描述为:热流 $\propto$ 温度差;热流 $\propto$ 垂直热流方向的表面积. 即

$$Q_x = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2-1)$$

或

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

式中, $Q_x$ 是 $x$ 方向上的热流率,即单位时间的热流量(W); $q_x$ 是 $x$ 方向上单位表面积的热流率,称为比热流率或热流密度(W/m<sup>2</sup>); $A$ 是垂直于热流方向的表面积(m<sup>2</sup>); $\lambda$ 是材料的导热系数[W/(m·℃)]; $\frac{\partial T}{\partial x}$ 是 $x$ 方向上的温度梯度(℃/m);“—”号表示传热的方

向永远和温度梯度的方向相反。

更一般的情况,即考虑物体温度随时间而变(非稳态问题),并且内部具有热源时的 Fourier 导热微分方程. 可以根据 Fourier 定律,运用能量守恒原则推导得来. 详细推导可参阅有关传热学专著,这里只列出其结果的公式.

对于直角坐标系,有

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-2)$$

若  $x, y, z$  三个方向导热系数  $\lambda$  相同,亦可写成

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q'}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-3)$$

式中

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (\text{m}^2/\text{s})$$

称为热扩散系数或导温系数. 若  $x, y, z$  三个方向的  $\lambda$  各不相同,分别为  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ , 则导热方程变为

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-4)$$

对于圆柱坐标系,坐标变量用  $z, r, \theta$  表示,则有

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-5)$$

如果应用在轴对称时  $\theta$  不起作用,则有

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-6)$$

对球坐标系,坐标变量用  $r, \theta, \phi$  表示,则有

$$\lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rT) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right) + q' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-7)$$