概率 随机变量与随机过程

周荫清　编著

北京航空航天大学出版社

概率 随机变量与随机过程

周荫清 编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书主要介绍概率、随机变量与随机过程的基本内容。全书共分九章，内容包括：随机事件和概率；随机变量的分布函数、数字特征和特征函数；极限定理；随机过程的基本概念和基本类型；随机过程的线性变换。各章末配有适量习题，书末附有习题答案。

本书选材广泛，文字通俗，概念清晰，系统性强。论述时努力注重数学概念与物理概念的联系，尽量用直观形象的方法并结合实例表达数学概念的含义和深刻内容。

本书可作为理工科大学有关专业的教材或教学参考书，也可供有关工程技术人员自学参考。

概率 随机变量与随机过程

GAILU SUIJI BIANLIANG YU SUIJI GUOCHENG

编　　著　周荫清

责任编辑　杨昌竹

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技所发行　各地新华书店经售

北京农业工程大学印刷厂印装

•

850×1168　1/32　印张：14.5　字数：390千字

1989年7月第一版　1989年7月第一次印刷　印数：4600册

ISBN 7-81012-111-1/TN·008　定价：3.30元

前　　言

随着科学技术的发展，知识体系的不断更新，概率、随机变量与随机过程已广泛应用于许多科技领域，并已成为许多新兴学科的理论础基。本书是作者在为北京航空航天大学电子工程系讲授《概率论与随机过程》课程的基础上编写而成的。本书主要介绍概率、随机变量与随机过程的基本理论和基本分析方法。希望本书能够为读者学习新的科学技术知识创造必要的条件。

本书将概率、随机变量与随机过程有机地构成一个体系。全书共分九章。第一章主要介绍随机事件及其概率。第二、三章详细论述了随机变量及其分布函数。第四、五章分别介绍了随机变量的数字特征和特征函数。第六章简要介绍随机变量序列最基本的两类极限定理：大数定理和中心极限定理。第七、八章详细讨论了随机过程的基本概念及其基本类型，重点论述了平稳随机过程的基本知识，特别注意了功率谱密度的物理意义。第九章介绍随机过程的线性变换，这是随机分析中的重要内容。

作为教材，在内容选取和编排上力求由浅入深，努力注意数学概念与物理概念的联系。在数学工具的运用上，尽量减少繁琐的数学推导，力求简明、适中、准确。书中列举有较多的例题，以帮助读者打开思路，加深对基本理论的理解。标有“*”号的小节，均属于拓宽加深的内容，可根据具体要求进行选择，舍去时不会影响后续内容的学习。做习题是学好本课程的重要手段，每章末附有一定数量的习题，这些习题都是经过精心挑选的，在一定程度上能够起到对该章内容扩展和深化的作用。其中标有“*”号的习题有一定的难度，供读者参考。书末附有各章习题的答案。

本书在编写过程中曾得到邵定蓉副教授、卢维扬教授的热情支持与帮助，还得到毛士艺教授的许多帮助。柳重堪教授对本书原稿提出了许多宝贵意见。李春升同志完成了本书习题的解答工作。徐玉珍高级工程师对全书文、图进行了加工整理。在编写和编辑过程中还得到杨昌竹副编审的许多帮助。编 者 在 此 一并致谢。

限于水平，书中难免有不妥和错误之处，恳请读者指正。

编　者

1988年7月5日

目　录

第一章　概率论的基本概念

§1.1　随机事件

1.1.1　必然现象与随机现象

在自然界里，人们观察到的现象大体可以归结为两类：一类称为确定性现象或必然现象，这类现象是可事前预言的，即在准确地重复某些条件下，它的结果是肯定的，或根据它过去的状态，在相同的条件下完全可以预言它将来的发展。例如，重物在高处总是垂直落到地面；在一个大气压下，水在100℃时会沸腾；在晶体管放大器中，加入电源电压以后一定会出现集电极电流，等等。另一类现象称为偶然现象或随机现象，它是事前不可预言的，即在相同的条件下重复地进行试验，每次结果未必完全相同，或是知道它过去的状态，在相同的条件下，未来的发展事前却不可预测。如抛掷一枚质地均匀的，对称的硬币，结果可能是正面向上，或背面向上。如测量某一电源电压，结果可能是正误差，也可能是负误差。又如正弦振荡每次起振时的初始相位，其结果事前均无法预料，等等。随机现象是客观存在的，在通信、雷达、声纳与控制等领域中普遍存在。概率论是研究随机现象统计规律性的一门学科。

1.1.2　随机试验

为了阐述方便，我们把对自然现象进行观察或进行一次科学试验统称为一个试验。在这里，显然是把试验作为一个广泛的术语。如果这个试验在相同条件下可以重复进行，而且每次试验的结果事前不可预言，就称它为一个随机试验。此后，我们所指的试验都是指随机试验。

随机试验的每一个可能结果一般称为随机事件，简称为事件。我们常用字母A、B、C、…表示。事件是概率论中最基本的概念。

把不可能再分的事件称为基本事件。由若干个基本事件组合而成的事件称为复合事件。

一般地，设E为随机试验，以ω表示它的一个可能的结果，我们称ω为试验E的一个基本事件。基本事件的全体称为基本事件空间，记为$\Omega=(\omega)$。

举几个随机试验的例子：

E_1：抛掷一枚硬币，观察正面，反面出现的情况；

E_2：在一批晶体管中任意抽取一只，测试它的电流放大系数；

E_3：记录某电话交换台在一分钟内接到呼唤的次数。

在E_3中，用ω_i表示第i次呼唤，那么ω_i表基本事件，而基本事件空间$\Omega=(\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\cdots)$，即基本事件空间由0次呼唤，1次呼唤，2次呼唤，…等构成。

从上述例子看出，概括起来，这些试验都具有下述特性：

1. 可以在相同的条件下重复地进行；

2. 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

3. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

我们也说，在概率论中，将具有上述三个特性的试验称为随机试验，简称试验。

进行一个试验，有这样或那样的事件发生，它们各有不同的特性，彼此之间又有一定的联系。试验的每一个可能结果称为随机事件。而在一定的条件组下必然发生的事件称为必然事件。在一定的条件组下必然不发生的事件称为不可能事件。必然事件用符号Ω表示；不可能事件用符号ϕ表示。把必然事件和不可能事件也视为随机事件，对于我们讨论问题是方便的。

1.1.3 样本空间与事件

一、集合的概念

为了阐述样本空间的概念，事件的集合以及下一节中概率的数学定义，先简要介绍集合的一般概念。

集合，简称为集，它是集合论中最基本的概念。我们常把为了某种目的而研究的对象的总体称为集合。集通常用A、B、C、…或Ω，ϕ等表示。

集合中的每一个对象称为元素或点。集合中的元素可以是任意的对象：点、数、函数、事件、人、物，等等。一般常用x，y，…，a，b，…表示。

任何对象的总体都可以构成集。例如：全体正整数组成的集合，对象是0，1，2，…，n，…；在一条给定的直线上的全体的点组成的集合；在一年中某工厂生产的某种元件的合格品全体组成的集合。

在上述前一例中，集合所包含的元素的个数显然不是有穷的，称为无穷集合。

在上述最后一例中，虽不知道集合中元素的个数，但可以知道它只包含有穷个元素，称为有穷集合。

若x是集A中的元素，就写成$x\in A$；如x不是集A的元素就写成$x\notin A$。例如：集A为全体自然数，则$2\in A$；$\frac{1}{2}\notin A$。

若有两个集合A和B，若A中的每一元素均属于B，则称A为B的子集。例如：$B=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\cdots,\omega_n,\cdots\}$表全体正整数组成的集合；$A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\cdots\}$表全体正奇数组成的集合。显然，$A$为$B$的子集，记为$A\subset B$或$B\supset A$。

不含任何元素的集称为空集，常用ϕ表示。例如，满足$x^2+1=0$的实数的集是空集。空集可视为任何集合的一个子集。

在许多研究中，要涉及已给集合的各种子集的性质和相互关

系。这个包含有研究中出现的全部元素的集合，称之为研究的空间，常用Ω表示，例如，假如我们要去研究那些在一条直线上的点所组成的不同集合，即可以取直线上全部的点组成的集合作为我们的空间，并称为R_1空间，空间Ω的任意子集A简称为Ω中的集合。

设空间R_1是由一指定直线上的点的全体组成的集合。则称R_1中的任一集合为线性点集。线性点集的一个简单情形是一区间。若a和b是满足关系$a\leqslant b$的任意两点，则满足下列关系的x的全体所组成的集合可构成下述各类区间：

$a\leqslant x\leqslant b$　为闭区间$[a,b]$；

$a<x<b$　为开区前(a,b)；

$a<x\leqslant b$　为右闭的半开区间$(a,b]$；

$a\leqslant x<b$　为左闭的半开区间$[a,b)$。

在$a=b$的极端情况下，称这个区间为退化的。此时，闭区间变成只包含一个点$x=a$的集合。

若令上列诸不等式中之b趋于$+\infty$，则分别得到定义闭的$[a,+\infty)$和开的$(a,+\infty)$无限区间。

同样，若令a趋于$-\infty$，则分别得到定义闭的$(-\infty,b]$和开的$(-\infty,b)$无限区间。

空间R_1可以看作无限区间$(-\infty,+\infty)$。任何一个非退化区间都是一个不可数集合。

若一个集A的元素都是集A_0，A_1，A_2，…的时候，我们称A为一个族。显然，族是集的同义词。

有时集A的元素可以全部写出，则可将集的元素写出后外加花括弧，例如集$A=\{-1,1\}$。有时不能一一写出，或者即使可以一一写出，但为了简便，也可用文字或数学式写出后外加花括弧，例如集$A=\{$全体正整数$\}$。

二、样本空间

样本空间与事件是概率论中两个最基本的概念。

前面曾经指出，随机试验的每一个可能结果一般称为随机事件，我们把不可再分的事件称为基本事件。联系于每一随机试验的每一基本事件，用一个只包含一个元素的单点集 $\{\omega\}$ 表示，由若干基本事件组成的复合事件，则用包含若干元素的集合表示。由所有基本事件对应的全部元素组成的集合，称为样本空间。由于任一随机试验的结果必然出现全部基本事件之一，这样样本空间作为一个事件是必然事件，我们仍用 Ω 表示样本空间。样本空间中的每一个元素称为样本点，我们用 $\omega\in\Omega$ 表示。在具体问题中，给定样本空间是描述随机现象的第一步。

下面举例说明

例1.1-1 在0，1，2，…，9十个数字中任意选取一个，可有十种不同结果："取得一个数是0"，…，"取得一个数是9"。此外，还有其它可能结果："取得一个数是奇数"，"取得一个数是大于4的数"，"取得一个数是3的倍数"，…

于是，样本点是 $\omega_1=0$，$\omega_2=1$，…，$\omega_{10}=9$；

基本事件为 $\{\omega_i\}(i=1, 2, \cdots, 10)$；

样本空间为 $\Omega=\{0, 1, \cdots, 9\}$。

例1.1-2 设同时抛掷两枚硬币，其基本事件为 $A_1=\{\omega_1\}$，$A_2=\{\omega_2\}$，$A_3=\{\omega_3\}$，$A_4=\{\omega_4\}$，

于是，样本点是 $\omega_1=$(正面，正面)，$\omega_2=$(正面，背面)，$\omega_3=$(背面，正面)，$\omega_4=$(背面，背面)。

样本空间为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$。

例1.1-3 考虑某电话总机在 $[0, t]$ 内的呼唤次数，则基本事件为 $A_0=\{\omega_0\}$，$A_1=\{\omega_1\}$，…，$A_n=\{\omega_n\}$，…，其中 $\omega_k=$(k 次呼唤）（$k=0, 1, 2, \cdots$）。

于是，样本点为 ω_0，ω_1，…，ω_k，…。

样本空间为 $\Omega=\{\omega_k: k=0, 1, 2, \cdots\}$。

例1.1-4 设测量某一电源电压，考虑其测量结果与真正电源电压的误差，一般说，可用一数 x 表示，于是基本事件为 x（$x\in$

R_1)，而实轴上的每一点都是其样本点，整个数轴为样本空间，即

$$\Omega=\{x:\ x\in R_1\}$$

从上述例子看出，样本空间可以相当简单，也可以相当复杂，在今后讨论中，经常把样本空间认为是预先给定的。当然对于一个实际问题或一个随机现象，如何用一个恰当的样本空间来描述它值得研究，但是在概率论中，一般都认为样本空间是给定的，这是必要的抽象，这种抽象能使我们更好地把握随机现象的本质，并使所得结果能够广泛应用。事实上，一个样本空间可以概括各种实际内容大不相同的问题，例如，仅包含两个样本点的样本空间既能作为掷硬币出现正，反面的模型，也能用于产品检验中出现“合格品”及“废品”的模型等等。尽管问题的实际内容各不相同。但应用样本空间后却能归结为相同的概率模型。

三、事件

引入样本空间后，就可以从样本空间的概念定义事件。

我们把事件定义为样本点的某个集合，称某事件发生是指当且仅当它所包含的某一样本点出现。我们把样本空间也作为一个事件，因为在每次试验中必然出现Ω中的某个样本点，亦即Ω必然发生，所以常称Ω为必然事件。类似地，习惯上还约定不包含任何样本点集的集合也算是一个点集，称为空集ϕ，我们把空集ϕ也作为一个事件，它在每次试验中都不会发生，常称为不可能事件。

必然事件Ω在试验中必然发生。相反的，不可能事件在任何试验中不可能发生。应该说，必然事件与不可能事件不是随机事件，但为了今后研究上的方便，我们还把必然事件与不可能事件作为随机事件的两种极端情况来统一处理。

在一个样本空间中显然可以定义不止一个事件。概率论的重要研究课题之一是希望从简单事件的概率推算出复杂事件的概率。在现实生活中也往往要求我们同时考察几个在同样条件下的事件以及它们之间的联系。

例1.1-5 设有一批晶体管，其中有好品、次品。任意抽取三只，结果为下列事件：

A_1 至少一只次品；

A_2 恰有一只次品；

A_3 至少两只次品；

A_4 三只都是次品；

A_5 至少一只好品；

A_6 至多一只次品。

不难看出，上述事件间存在一定的关系。如A_2发生，A_1必发生；A_2、A_3至少有一个发生，则A_1发生；A_4、A_5不会同时发生；A_1，A_6发生，则A_2发生，如此等等。

详细分析事件的关系，可以深刻认识事件的本质，也可以大大简化一些复杂事件的概率计算。

现在讨论事件间的关系及事件的运算：

1. 如果两个事件A与B不可能同时发生，则称事件A与B为互不相容。例如必然事件Ω与不可能事件ϕ是互不相容的（或称互斥）。又如上例中A_4和A_5是互不相容的。

如果A_1，$A_2,\cdots$，A_n中的任意两个事件是互不相容的，则称A_1，$A_2,\cdots$，A_n互不相容。

2. 如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件A含于事件B，或称事件B包含事件A，并记为$A\subset B$。如上例中，$A_2\subset A_1$。显然，对任何事件A，必有$\Omega\supset A\supset\phi$。

$A\subset B$的一个等价说法是，如果事件B发生则事件A必然发生。

如果$A\subset B$，$B\subset A$，则称A与B等价或称A等于B，记为$A=B$，等价的两个事件同时发生，因此可看作是一样的。

3. 如事件C表示“事件A与B中至少有一个发生”这一个事件，则称它为A与B之和，记为$C=A\cup B$，或简记为$C=A+B$。如上例中，$A_1=A_2\cup A_3$。

若 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 至少有一个事件出现，则称它为 A_1，A_2，…，A_n 之和，记为

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

当 $n \to \infty$ 时，则有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

4. 如事件 D 表示"事件 A 与事件 B 同时发生"这一事件，则称它为 A 与 B 之积，记为 $D = A \cap B$，或简记为 $D = AB$。如上例中 $A_2 = A_1 \cap A_6$。

若 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 都发生而构成一个事件 A，则有

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 \cdots A_n$$

当 $n \to \infty$ 时，

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 A_2 \cdots A_n \cdots$$

由事件积的定义，立即得到：

a. 对任一事件 A，有 $A \cap \phi = \phi$，$A \cap \Omega = A$；

b. 若 A_1，A_2 互不相容，则 $A_1 \cap A_2 = \phi$；

5. 如 E 表示"事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件，则称它为 A 与 B 之差，记为 $E = A - B$，显然 $A - B = A\bar{B}$。由两事件之差的定义立即得到：对任意事件 A 有

$$A - A = \phi$$

$$A - \phi = A$$

$$A - \Omega = \phi$$

6. Ω 与 A 之差 $\Omega - A$ 这一事件称为 A 的逆事件，记为 $\bar{A}$，它表示"A 不发生"这一事件。显然 $\bar{A} = \Omega - A$。

对立事件之间的关系可表述如下：$A\cup\bar{A}=\Omega$，$A\cap\bar{A}=\phi$。这种表述也可以作为对立事件的定义。

对于事件及其运算，若用点集的概念和几何图示法，则较直观且易于理解。如果以平面上的某一矩形表示样本空间，矩形内的每一点表示样本点，则事件间的运算可通过平面上的几何图形表示。若用两个小圆表示事件A与B，如图 1.1 所示，则阴影部分将表示事件A与B的各种关系及运算。

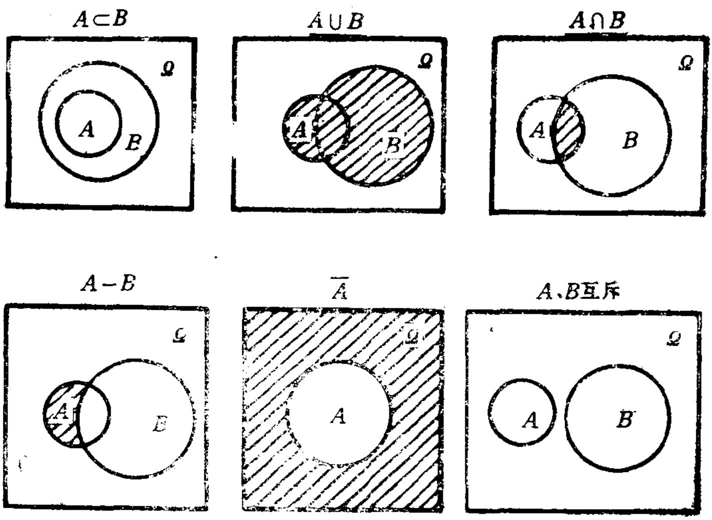

图1.1 事件关系与运算

例1.1-6 若有1人进行科学试验，直到试验成功为止。如果A表试验成功，A_i表试验到第i次成功，则显然有

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$$

例1.1-7 如图 1.2 所示的开关电路中，以A表示“信号灯亮”这一事件，以B，C，D分别表示开关K_1，K_2，K_3闭合的事件，那么可知

$$BC\subset A,\quad BD\subset A,\quad BC\cup BD=A$$

而$BA=\phi$，即事件B与事件A互不相容。

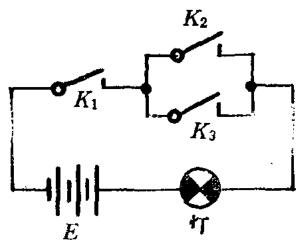

图1.2 开关电路

例1.1-8 设某电子系统由n个元件e_1，e_2，…，e_n组成。设E_i表示“元件e_i工作可靠，$i=1,2,\cdots,n$”，S表示“系统工作可靠”。则在并联系统中，如图1.3(a)所示，系统工作可靠的事件为

$$S=\text{“}e_1，e_2，\cdots，e_n\text{中至少有一个元件工作可靠”}$$
$$=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$$

而在串联系统中，如图1.3(b)所示，系统工作可靠的事件为

$$S=\text{“}e_1，e_2，\cdots，e_n\text{都工作可靠”}$$
$$=\bigcap_{i=1}^{n}E_i$$

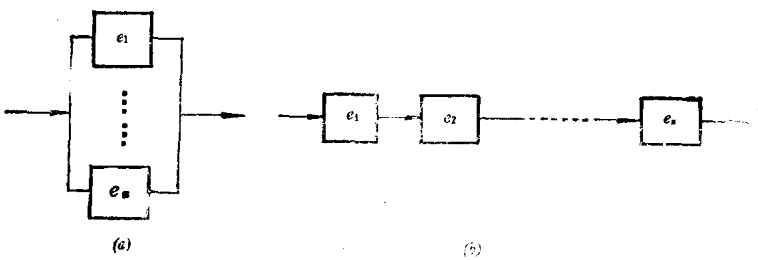

图 1.3

例1.1-9 若A，B，C是三个事件，如图1.4所示。则

（1）A发生而B与C都不发生可以表示为$A\bar{B}\bar{C}$或$A-B-C$或$A-(B\cup C)$；

（2）A与B都发生而C不发生可以表示为$AB\bar{C}$或$AB-C$或$AB-ABC$；