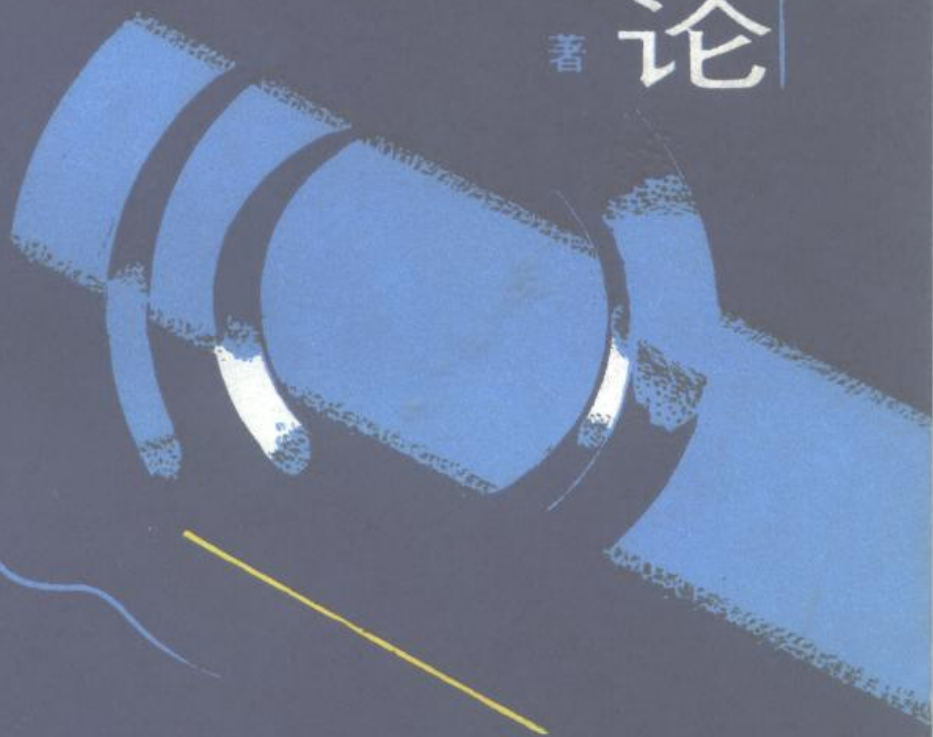


# 半导体激光模式理论

郭长志 著



# 半导体激光模式理论

郭长志 著

人民邮电出版社

## 内 容 / 提 要

本书是在作者在近10年的科学研究和教学实践的基础上所写成的专著。

本书着重讨论分析半导体激光器中有源波导的机制和结构对激光模式行为的影响，系统介绍有关的处理方法及所得结果的物理实质。并系统介绍了这一领域的最新科研成果和设计思想及有关原理。

本书可供从事半导体激光器科学研究、工程技术人员和有关专业的教师、研究生和大学生参考。

## 半导体激光模式理论

郭长志 著

本书特邀编辑 魏宝勋

\*

人民邮电出版社出版

北京东长安街27号

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

开本：787×1092 1/32 1989年12月 第一版

印张：17 页数：272 1989年12月河北第1次印刷

字数：386千字 印数：1-1500册

ISBN7-115-04070-2/TN·271

定价：6.90元

## 序

半导体激光器的发展，一方面与有关的材料和工艺技术的研究有密切联系，另一方面也与有关的过程，特别是半导体激光器中有源波导的模式行为的理论研究息息相关。早期的模式研究是结合如何在半导体中实现激射的问题进行的；接着是结合如何降低阈值电流以实现室温连续激射进行的；近年来是结合如何改善稳态和瞬态的工作稳定性进行的；最近，则是结合如何实现动态单模（单频）的问题进行的。其研究成果，不但大大地推动了半导体激光器技术的发展，而且带动和促进了有关理论问题的研究。

关于半导体激光模式理论方面的文献，大多以专题论文形式发表在有关的专业学术刊物上。近年来，在美、英和日本先后出版的半导体激光器的书中，虽有这方面的一些内容，但尚无以这方面为主要内容的专著。本书是以作者自1978年起，九年来为北京大学物理系和有关研究所的研究生及研究人员多次讲授这门课程的讲义、论文和手稿为基础进一步修改补充而成的。内容着重分析讨论半导体激光器中有源波导的机制和结构对激光模式行为的影响，系统介绍有关的处理方法及所得结果的物理实质，并系统介绍这一领域的最新科学成果和设计思想及其有关原理。本书在撰写过程中，曾得到清华大学应用数学系陈水莲副教授的大力协助，书中许多数学和数值计算是她完成的，特此致谢。书中如有不妥和错误之处，尚希读者予以指正。

作者

# 目 录

<b>第一章 半导体波导及其传播模式</b> .....	( 1 )
§ 1 电磁过程的基本方程 .....	( 2 )
§ 1.1 麦克斯韦方程组 .....	( 2 )
§ 1.2 波动方程 .....	( 4 )
§ 2 光在波导结构中的传播.....	( 9 )
§ 2.1 波导方程 .....	( 9 )
§ 2.1-1 波导解式 .....	( 9 )
§ 2.1-2 电磁场横向分量方程 .....	( 11 )
§ 2.1-3 电磁场纵向分量方程 .....	( 12 )
§ 2.2 波导模式 .....	( 13 )
§ 2.3 波导模式的正交关系 .....	( 13 )
§ 2.3-1 无损耗介质波导中模式的正交性 .....	( 13 )
§ 2.3-2 有损耗(增益)介质波导中模式的正交性 .....	( 17 )
§ 3 介质的光学性质 .....	( 19 )
§ 3.1 介质的电极化及其克喇末-克朗尼克关系 .....	( 20 )
§ 3.2 介质极化及其色散的电子论 .....	( 26 )
§ 3.3 “自由”载流子带内吸收和等离子体振荡折射率 .....	( 32 )
§ 3.4 半导体激光材料的光学性质 .....	( 35 )
§ 3.4-1 半导体光学性质的测量方法 .....	( 37 )
§ 3.4-2 二元半导体材料的折射率及其色散 .....	( 45 )
§ 3.4-3 多元混晶半导体材料的折射率及其色散 .....	( 53 )
§ 3.4-4 半导体材料的群折射率及其群色散 .....	( 57 )

§ 3.4-5	掺杂、温度和应力的影响	( 58 )
§ 3.4-6	半导体材料的吸收系数和吸收光谱	( 61 )
§ 3.4-7	半导体材料的增益系数和增益谱	( 63 )
§ 4	半导体激光器的波导结构	( 67 )
§ 4.1	波导结构的形成	( 67 )
§ 4.1-1	激射条件	( 67 )
§ 4.1-2	垂直于结平面方向的波导	( 69 )
§ 4.1-3	平行于结平面方向的波导	( 69 )
§ 4.1-4	其它结构	( 70 )
§ 4.2	半导体激光器波导的理论模型	( 70 )
§ 4.2-1	波导结构与模式的关系—电磁模型	( 70 )
<b>第二章</b>	<b>突变波导</b>	( 72 )
§ 1	三层平板波导	( 73 )
§ 1.1	电磁模型和解的性质	( 73 )
§ 1.2	导波模式	( 77 )
§ 1.2-1	$TE$ 导波模式在介质内的电磁场分布	( 77 )
§ 1.2-2	$TM$ 导波模式在介质内的电磁场分布	( 80 )
§ 1.2-3	导波模式的等相面与相速度	( 83 )
§ 1.2-4	本征方程和截止公式	( 87 )
§ 1.2-5	本征方程的光学含义、古斯-汉欣线移与时延	( 103 )
§ 1.2-6	光能的传播和光限制因子	( 118 )
§ 1.3	辐射模式	( 121 )
§ 1.3-1	偶阶 $TE$ 辐射模式	( 121 )
§ 1.3-2	奇阶 $TE$ 辐射模式	( 126 )
§ 1.3-3	偶阶 $TM$ 辐射模式	( 127 )
§ 1.3-4	奇阶 $TM$ 辐射模式	( 128 )
§ 1.4	端面出射	( 129 )
§ 1.4-1	二维波动方程及其通解	( 129 )

§ 1.4-2	远场近似 .....	( 130 )
§ 1.4-3	远场光强分布(远场图) .....	( 133 )
§ 1.5	端面反射 .....	( 135 )
§ 1.5-1	$TE$ 模式 .....	( 137 )
§ 1.5-2	$TM$ 模式 .....	( 140 )
§ 1.5-3	不太强波导的近似解 .....	( 143 )
§ 2	矩形波导 .....	( 150 )
§ 2.1	圆谐分析 .....	( 151 )
§ 2.1-1	柱坐标波动方程及其解的展式 .....	( 151 )
§ 2.1-2	边界条件与本征方程 .....	( 155 )
§ 2.1-3	数值结果 .....	( 159 )
§ 2.2	远离截止近似 .....	( 162 )
§ 2.3	等效折射率近似 .....	( 172 )
§ 2.3-1	电磁模型 .....	( 172 )
§ 2.3-2	本征方程 .....	( 174 )
§ 2.3-3	隐埋异质结构( $BH$ )激光器的波导结构 .....	( 177 )
§ 3	四层平板波导 .....	( 180 )
§ 3.1	纯折射率波导 .....	( 180 )
§ 3.1-1	增厚传播解 .....	( 182 )
§ 3.1-2	原厚传播解 .....	( 184 )
§ 3.1-3	数值结果 .....	( 186 )
§ 3.1-4	等效三层平板波导 .....	( 188 )
§ 3.2	复折射率衬底 .....	( 191 )
§ 3.2-1	电磁模型及其本征方程 .....	( 191 )
§ 3.2-2	微扰近似 .....	( 194 )
§ 3.2-3	数值结果 .....	( 196 )
§ 4	条形弱自建波导 .....	( 197 )
§ 4.1	脊形波导( $RW, IRW, CDH$ ) .....	( 198 )

§ 4.1-1	电磁模型 .....	( 198 )
§ 4.1-2	近似解 .....	( 199 )
§ 4.2	条形负载波导 ( <i>SLW, SBH</i> ) .....	( 204 )
§ 4.2-1	等效脊形波导 .....	( 204 )
§ 4.2-2	四层隐埋 ( <i>BH</i> ) 波导 .....	( 205 )
§ 4.2-3	条形隐埋 ( <i>SBH</i> ) 波导 .....	( 206 )
§ 4.3	沟道衬底平面 ( <i>CSP</i> ) 波导 .....	( 209 )
§ 4.4	梯形衬底 ( <i>TS</i> ) 波导 .....	( 212 )
§ 4.5	深 <i>Zn</i> 扩散平面条形 ( <i>DDS</i> ) 波导 .....	( 215 )
§ 5	突变波导模式的谱结构 .....	( 221 )
§ 5.1	连续谱 .....	( 221 )
§ 5.2	谐振线状谱 .....	( 223 )
<b>第三章</b>	<b>缓变波导</b> .....	( 226 )
§ 1	延伸抛物型波导 .....	( 227 )
§ 1.1	二维延伸抛物型实折射率波导 .....	( 227 )
§ 1.1-1	电磁模型 .....	( 227 )
§ 1.1-2	近似波动方程及其导波模式解 .....	( 230 )
§ 1.1-3	模式的谱结构 .....	( 233 )
§ 1.2	出射光束 .....	( 239 )
§ 1.2-1	电磁模型及其基本方程 .....	( 239 )
§ 1.2-2	基模解—高斯光束 .....	( 240 )
§ 1.2-3	高阶模式解—厄米-高斯光束 .....	( 247 )
§ 1.2-4	出射光束横截面上的相位分布及其测定 .....	( 251 )
§ 1.3	一维延伸抛物型复折射率波导 .....	( 260 )
§ 1.3-1	电磁模型 .....	( 260 )
§ 1.3-2	导波模式 .....	( 263 )
§ 1.3-3	复折射率分布参量与模式结构参量的关系 .....	( 265 )
§ 1.3-4	复折射率分布对波导过程的影响 .....	( 267 )



§ 1.3-5	出射光束 .....	( 269 )
§ 1.3-6	振荡条件与模式的谱结构 .....	( 271 )
§ 1.3-7	模式增益和阈值条件 .....	( 274 )
§ 1.4	模式稳定性 .....	( 276 )
§ 1.4-1	纯折射率波导的模式稳定性 .....	( 276 )
§ 1.4-2	复折射率波导的模式稳定性 .....	( 283 )
§ 2	突变-缓变波导 .....	( 290 )
§ 2.1	场方程的一维化 .....	( 290 )
§ 2.1-1	电磁模型 .....	( 290 )
§ 2.1-2	用等效折射率法分解场方程 .....	( 293 )
§ 2.1-3	侧向功率流 .....	( 294 )
§ 2.2	突变-延伸抛物型波导 .....	( 298 )
§ 2.2-1	电磁模型 .....	( 298 )
§ 2.2-2	导波模式 .....	( 299 )
§ 2.2-3	垂直波导对侧向波导的影响 .....	( 302 )
§ 2.3	突变-平方正切波导 .....	( 306 )
§ 2.3-1	电磁模型 .....	( 306 )
§ 2.3-2	导波模式的场分布 .....	( 307 )
§ 2.4	突变-延伸幂函数波导 .....	( 315 )
§ 2.4-1	电磁模型及其分离方程 .....	( 315 )
§ 2.4-2	侧向基模的变分近似解 .....	( 317 )
§ 3	截断缓变波导 .....	( 320 )
§ 3.1	突变-平方双曲正切波导 .....	( 320 )
§ 3.1-1	电磁模型 .....	( 320 )
§ 3.1-2	导波模式解 .....	( 323 )
§ 3.1-3	近场、等相面、远场 .....	( 329 )
§ 3.1-4	数值结果 .....	( 332 )
§ 3.1-5	截断分布对模式行为的影响 .....	( 335 )
§ 3.2	突变-截断幂函数波导 .....	( 341 )

§ 3.2-1	电磁模型及其一维化 .....	( 341 )
§ 3.2-2	级数近似法 .....	( 343 )
§ 3.2-3	模式场分布 .....	( 346 )
§ 3.2-4	传播常数和截止条件 .....	( 351 )
§ 3.2-5	分布变化缓急对模式行为的影响 .....	( 359 )
§ 4	有源区内的注入载流子分布 .....	( 361 )
§ 4.1	载流子的双极性扩散过程 .....	( 363 )
§ 4.2	有源区内垂直于结平面方向的载流子分布 .....	( 367 )
§ 4.2-1	在激射条件下的注入载流子扩散方程 .....	( 367 )
§ 4.2-2	迭代近似解 .....	( 370 )
§ 4.2-3	垂直于结平面的非平衡载流子分布与器件结构和模式行为的关系 .....	( 384 )
§ 4.3	结电流分布模型 .....	( 389 )
§ 4.3-1	结电流的突变分布 .....	( 390 )
§ 4.3-2	结电流的截断抛物型分布 .....	( 393 )
§ 4.3-3	模式光场的作用——分段近似法 .....	( 398 )
§ 4.4	一维化结电压模型 .....	( 401 )
§ 4.4-1	结电流的扩展分布 .....	( 401 )
§ 4.4-2	结电流扩展分布的指数近似 .....	( 410 )
§ 4.4-3	模式光场对分布的影响 .....	( 414 )
§ 4.5	二维结电压分布和改进的模型 .....	( 423 )
§ 4.5-1	存在的问题 .....	( 423 )
§ 4.5-2	衬底对隐埋异质结构 (BH) 激光器结电流分布的影响——分离变数法 .....	( 425 )
§ 4.5-3	BH激光器有源区外两侧的结电压分布——许瓦兹-克利斯多菲变换法 .....	( 431 )
§ 4.6	条形激光器中电压、电流和载流子分布的	

精确模型——有限差分法 .....	( 442 )
§ 4.6-1 数学描述 .....	( 444 )
§ 4.6-2 有限差分法迭代自洽解 .....	( 450 )
§ 4.6-3 二维电压分布和结电流、结电压分布(采用 肖克莱近似) .....	( 458 )
§ 4.6-4 精确的结电压、结电流分布 .....	( 466 )
§ 4.6-5 阈值以上的分布—空间烧孔和扭折现象 .....	( 468 )
§ 5 非平面波导 .....	( 476 )
§ 5.1 结构形式和分析方法 .....	( 476 )
§ 5.2 非等厚有源层内的扩散方程 .....	( 478 )
§ 5.3 数值例子 .....	( 481 )
§ 5.3-1 平凸波导 .....	( 481 )
§ 5.3-2 非等厚有源层波导 .....	( 484 )
§ 5.3-3 弯月形埋层波导 .....	( 487 )
§ 5.4 非平面波导过程的特点 .....	( 489 )
附录A 截断幂函数分布波导的本征值 .....	( 489 )
参考文献 .....	( 520 )

# 第一章 半导体波导及其传播模式

半导体激光器中，为了实现激射（振荡），必须利用波导腔中的谐振现象；而为了降低阈值，实现室温连续激射，则必须使注入非平衡载流子和所生光场集中在波导腔内；为了使辐射出去的光场能量集中和稳定，还必须使波导腔的结构能够保证稳定的单基横模甚至单纵模激射。半导体激光器从同质结构到异质结构，从低温脉冲激射到室温连续激射，激射波长从 $0.9\mu\text{m}$ 左右的近红外到可见光和远红外的的发展，一方面是依靠新材料和新工艺的探索，另一方面则是依靠对激射过程，特别是对波导结构及其传播模式的研究才取得的。

半导体波导是利用以半导体材料为主的不同材料和注入非平衡载流子等的光学性质，按一定的几何分布组成的有利于光场集中并定向传播的结构。定向传播的波导轴线，可以是笔直的，也可以是弯曲的。在一定的波导结构中，只允许一定的偏振性、一定的场强空间分布、一定几何形状的波阵面（等相面）、一定的频谱的电磁波在其中传播，因而辐射出去的光场也具有一定的光束结构和频谱结构。也就是说，一定的波导结构确定一定的内外传播模式。从光在传播过程中所应遵从的麦克斯韦方程组及其导出的波动方程和波导方程，结合实际的材料电磁性质分布和边界条件，可以从理论上定量地推知波导结构及其传播模式之间的内在联系。这方面的分析工作是理论认识和工程设计的重要依据。

半导体激光器的波导模式理论，在很大程度上继承了微波理论的成果，同时也赋予了新的光学处理。因此，在讨论半导

体激光器的波导模式问题时，既可以从求解一定介质分布和边界条件的波导方程入手，也可以从分析波导腔内光的反射、折射、干涉和衍射现象入手。因为这两者在实质上是等价的，所以应该得出完全相同的结果。前者的方法是系统的，后者则较为直观。下面将以前者为主，导出主要结果；而以后者作为补充，讨论结果的物理（光学）含义。

半导体激光器的波导模式理论与集成光学理论有若干共同的内容。然而，前者主要讨论有源介质波导的模式结构、选模机制和模式稳定性等问题，其光源就在波导腔内；后者则着重讨论无源介质波导模式的馈入、馈出、耦合、转换、调制等问题〔1〕-〔4〕。

## § 1 电磁过程的基本方程

### § 1.1 麦克斯韦方程组

光在传播过程中，充分表现出其电磁波的本质。电磁波是某种电磁场分布的传播。电磁场可以用电场强度矢量  $\underline{E}$ ，电位移矢量  $\underline{D}$ ，磁场强度矢量  $\underline{H}$ ，磁感应矢量  $\underline{B}$ ，这四个与空间  $(x, y, z)$  和时间  $(t)$  有关的基本物理量来描述。影响电磁场分布和传播过程的，一方面是所在介质的电容率  $\epsilon$ 、磁导率  $\mu$ 、电导率  $\sigma$  等电磁性质，另一方面是所在介质中的电荷密度  $\rho$  和电流密度矢量  $\underline{j}$  的分布。它们之间的关系为

$$\nabla \cdot \underline{D} = \rho \quad (1.1-1a)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad (1.1-1b)$$

$$\nabla \times \underline{\mathcal{E}} = - \frac{\partial \underline{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (1.1-1c)$$

$$\nabla \times \underline{\mathcal{H}} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (1.1-1d)$$

$$\underline{\mathcal{D}} = \epsilon \underline{\mathcal{E}} \quad (1.1-2a)$$

$$\underline{\mathcal{B}} = \mu \underline{\mathcal{H}} \quad (1.1-2b)$$

$$\underline{j} = \sigma \underline{\mathcal{E}} \quad (1.1-2c)$$

(1.1-1a)是静电库伦定律的概括和推广，即认为库伦定律在动电情况下仍然成立；(1.1-1b)是静磁库伦定律和不存在独立磁荷这一事实的概括和推广；(1.1-1c)是法拉第电磁感应定律和楞次定律的概括；(1.1-1d)是电流产生磁场这一事实的概括和推广，即认为位移电流密度 $\frac{\partial \underline{\mathcal{D}}}{\partial t}$ 也和传导电流密度 $\underline{j}$

一样产生磁场。(1.1-1)构成麦克斯韦方程组，它是一切电磁场变化必须遵从的规律。(1.1-2a)描述介质的电极化性质；(1.1-2b)描述介质的磁化性质；(1.1-2c)描述介质的导电性质(如果 $\sigma$ 与场强无关，则为欧姆定律)，在光频电磁过程中， $\sigma$ 往往与低频电导率的含义不尽相同，而只是从形式上反映介质的损耗性质。(1.1-2)是三个描述介质性质的物质方程。如果 $\epsilon$ 、 $\mu$ 和 $\sigma$ 是与场强无关的标量，则它们只适用于各向同性和线性近似成立的介质。在介质出现突变的界面上，(1.1-1)相应地化为

$$\mathcal{D}_{n1} - \mathcal{D}_{n2} = \rho_s \quad (1.1-3a)$$

$$\mathcal{B}_{n1} - \mathcal{B}_{n2} = 0 \quad (1.1-3b)$$

$$\mathcal{E}_{t1} - \mathcal{E}_{t2} = 0 \quad (1.1-3c)$$

$$\mathcal{H}_{t1} - \mathcal{H}_{t2} = j_s \quad (1.1-3d)$$

这是在突变界面上的麦克斯韦方程组。(1.1-3a)表示在突变界面上1, 2两侧介质内的电位移矢量的法向分量不相等, 其差等于界面上的表面电荷密度 $\rho_s$ ; (1.1-3b)表示在突变界面上两侧介质内的磁感应矢量的法向分量总是相等的; (1.1-3c)表示在突变界面上两侧介质内的电场强度矢量的切向分量总是相等的; (1.1-3d)表示在突变界面上两侧介质的磁场强度矢量的切向分量不相等, 其差等于界面上的表面电流密度 $j_s$ 。如果在界面上无面电荷和面电流分布, 则(1.1-3)的右边皆为零, 有关的四个分量在界面上皆连续。在光频情况下, 介质的磁导率通常与真空几乎没有差别, 即 $\mu = \mu_0$ , 虽然由电场强度矢量构成的电力线通过界面时总有所偏折, 但是由磁场强度矢量构成的磁力线通过界面时则不偏折, 即磁场强度矢量本身在突变界面上总是连续的( $\underline{\mathcal{H}}_1 = \underline{\mathcal{H}}_2$ )。

## § 1.2 波动方程

对于各向同性和线性近似成立的介质, 麦克斯韦方程组(1.1-1)和物质方程(1.1-2)是线性的, 可以把电磁波分解为单色波的叠加, 故可先集中讨论一个单色波的行为。即可设整个电磁场共同随时间作简谐变化, 其圆频率为 $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu$ 为频率, 则各电磁场量皆包含一个共同的与时间 $t$ 有关的因子 $\exp(i\omega t)$ ,  $i \equiv \sqrt{-1}$ , 这时(1.1-1d)化为

$$\nabla \times \underline{\mathcal{H}} = (\sigma + i\omega\epsilon) \underline{\mathcal{E}} \equiv i\omega \tilde{\epsilon} \underline{\mathcal{E}} = \tilde{\epsilon} \frac{\partial \underline{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (1.1-4)$$

$$\tilde{\epsilon} \equiv \epsilon - i \frac{\sigma}{\omega} \quad (1.1-5a)$$

$$\tilde{n}^2 \equiv \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (1.1-5b)$$

$$\tilde{k}^2 \equiv \omega^2 \mu_0 \tilde{\epsilon} = k_0^2 \tilde{n}^2 \equiv \tilde{\beta}^2 \quad (1.1-5c)$$

$$k_0 \equiv \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0},$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \lambda_0 \nu \quad (1.1-5d)$$

设

$$\tilde{n} \equiv \bar{n} - i \bar{k}, \quad \tilde{\beta} \equiv \beta_r + i \beta_i \quad (1.1-6a)$$

则

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \bar{n}^2 - \bar{k}^2 \approx \bar{n}^2, \quad \text{因一般 } \bar{k}^2 \ll \bar{n}^2 \quad (1.1-6b)$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} = 2 \bar{n} \bar{k} \quad (1.1-6c)$$

$$\beta_r = k_0 \bar{n} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda \equiv \frac{\lambda_0}{\bar{n}} \quad (1.1-6d)$$

$$\beta_i = -k_0 \bar{k} \quad (1.1-6e)$$

$\tilde{\epsilon}$ ,  $\tilde{n}$  各为介质的复电容率和复折射率;  $\tilde{k}$ ,  $\tilde{\beta}$  各为电磁波在介质中的复波数和复传播常数, 在无限介质中二者是相等的;  $\bar{n}$ ,  $\bar{k}$  各为介质的折射率和消光系数;  $k_0$ ,  $\lambda_0$  各为电磁波在真空中的波数和波长;  $\lambda$  是电磁波在折射率为  $\bar{n}$  的介质中的波长。  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-14}$  法拉/厘米,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-9}$  亨利/厘米,  $c = 2.998 \times 10^{10}$  厘米/秒, 各为真空中的电容率, 磁导率和光速。

由 (1.1-1a),  $\nabla \cdot \underline{\mathcal{D}} = \nabla \cdot (\tilde{\epsilon} \underline{\mathcal{E}}) = \underline{\mathcal{E}} \cdot \nabla \tilde{\epsilon} + \tilde{\epsilon} \nabla \cdot \underline{\mathcal{E}} = 0$ , 得

$$\nabla \cdot \underline{\mathcal{E}} = -\underline{\mathcal{E}} \cdot \left( \frac{\nabla \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}} \right) \quad (1.1-7a)$$



如果在一定区域内  $\tilde{\epsilon}$  随空间变化比较缓慢, 使  $\frac{\nabla \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}} \approx 0$ , 则

$$\nabla \cdot \underline{\mathcal{G}} \approx 0 \quad (1.1-7b)$$

取 (1.1-1c) 的旋度, 则由 (1.1-4) 得

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathcal{E}} \equiv \nabla (\nabla \cdot \underline{\mathcal{E}}) - \nabla^2 \underline{\mathcal{E}} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \underline{\mathcal{H}}) = -\mu_0 \tilde{\epsilon} \frac{\partial^2 \underline{\mathcal{E}}}{\partial t^2} \quad (1.1-7c)$$

由 (1.1-7b), 近似有

$$\nabla^2 \underline{\mathcal{E}} = \mu_0 \tilde{\epsilon} \frac{\partial^2 \underline{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \left( \frac{\tilde{n}}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 \underline{\mathcal{E}}}{\partial t^2} \equiv \frac{1}{\tilde{v}^2} \frac{\partial^2 \underline{\mathcal{E}}}{\partial t^2} \quad (1.1-8a)$$

同样也有

$$\nabla^2 \underline{\mathcal{H}} = \mu_0 \tilde{\epsilon} \frac{\partial^2 \underline{\mathcal{H}}}{\partial t^2} = \left( \frac{\tilde{n}}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 \underline{\mathcal{H}}}{\partial t^2} \equiv \frac{1}{\tilde{v}^2} \frac{\partial^2 \underline{\mathcal{H}}}{\partial t^2} \quad (1.1-8b)$$

其中

$$\tilde{v} \equiv \frac{c}{\tilde{n}} = \frac{\omega}{\tilde{\beta}} = \frac{\omega}{\tilde{k}} \quad (1.1-8c)$$

(1.1-8a, b) 是电磁波在具有复电容率的介质中应该满足的波动方程,  $\tilde{v}$  是其复传播速度。

假设整个电磁场共同随时间作简谐变化, 实即假设电磁场量的时间变量  $t$  可与空间变量  $(x, y, z)$  分离, 即电磁场量可看成只含空间变量的函数和只含时间变量的公因子  $T(t)$  的乘积:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\mathcal{E}}(x, y, z, t) &= \underline{\mathcal{E}}(x, y, z)T(t) \\ \underline{\mathcal{H}}(x, y, z, t) &= \underline{\mathcal{H}}(x, y, z)T(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.1-9a)$$

时间部分可取为