力学丛书

非线性弹性理论

郭仲衡 著

科学出版社

力学丛书

非线性弹性理论

郭仲衡 著

科学出版社

内 容 简 介

本书从理性力学观点，系统叙述非线性弹性力学的精确理论，着重理论的基本概念，使读者除了掌握本理论外，还为进一步了解理性力学的其它方面打下基础.

本书取目前国际上最通用的“两点张量法”和“抽象符号法”之长，首次采用“两点张量抽象符号法”，使之有可能进行简明扼要而严格的数学描述；同时，又避免用过深的数学工具，使读者能由浅入深掌握本书内容.

本书可供力学工作者和理工科大学师生参考.

力学丛书

非线性弹性理论

郭仲衡 著

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1980年8月第一版　开本：850×1168 1/32

1980年8月第一次印刷　印张：7 3/4　插页：2

印数：0001—7,000　字数：204,000

统一书号：13031·1279

本社书号：1779·13—2

定价：1.45元

《力学丛书》编委会

前　　言

五十年代末六十年代初，作者在波兰科学院研究有限变形理论期间作过一些札记，曾于1963年，1964年在北京大学数学力学系讲授过。本书是在1964年讲义的基础上修改补充并添进若干结果而写成的。由于时间仓促，不免有漏误之处，请读者指正。作者感谢中国科技大学朱兆祥教授对本书修改提出的宝贵意见。

郭　仲　衡
(Guo Zhong-heng)
1978年12月于北京大学

再　　言

本书脱稿付印后，作者在波兰21届固体力学会议(1979年9月)作了题为“非线性弹性理论变分原理的统一理论”的报告。该文补充了本书的“变分原理”一章的不足，叙述进了一步。今列为附录，便于读者了解问题的全貌。

作　　者
1979年11月于西德鲁尔大学

目　　录

前言
绪论……………………………………………………………………1
第一部分　三维欧氏空间张量分析……………………………………5
　第一章　斜角坐标系(即仿射坐标系)…………………………………5
　　§1. 基向量和度量张量 ……………………………………………5
　　§2. 向量点积和叉积 ………………………………………………8
　　§3. 坐标变换和张量 ………………………………………………8
　　§4. 张量代数 ………………………………………………………11
　　§5. Ricci 符号,广义 Kronecker 符号,行列式和代数余子式……15
　第二章　二阶张量——仿射量……………………………………17
　　§1. 仿射量 …………………………………………………………17
　　§2. 正则与退化 ……………………………………………………19
　　§3. 重向和不变量 …………………………………………………21
　　§4. Cayley-Hamilton 定理 …………………………………………23
　　§5. 几种特殊仿射量 ………………………………………………24
　　§6. 对称仿射量的重向和仿射量的主向 …………………………31
　　§7. 仿射量的分解 …………………………………………………35
　第三章　张量函数…………………………………………………37
　　§1. 各向同性张量函数 ……………………………………………37
　　§2. 张量函数的梯度 ………………………………………………41
　　§3. 表示定理 ………………………………………………………42
　第四章　曲线坐标系…………………………………………………44
　　§1. 曲线坐标系与局部基向量 ……………………………………44
　　§2. 张量场与绝对微商 ……………………………………………46
　　§3. 不变性微分算子和积分定理 …………………………………51
　　§4. Riemann-Christoffel 张量(曲率张量)……………………………54

第五章　非完整系与两点张量场……………………………… 57
§1. 非完整系与物理分量 ……………………………………… 57
§2. 正交系与物理标架 ………………………………………… 60
§3. 两点张量场 ………………………………………………… 64
第二部分　有限变形理论……………………………………… 72
第一章　变形几何学………………………………………………… 72
§1. 运动与变形 ………………………………………………… 72
§2. 坐标系 ……………………………………………………… 74
§3. 变形梯度和线、面、体元素的变换 ……………………… 77
§4. 长度比、面积比、容积比、剪切与Green-Cauchy应变张量… 82
§5. 主长度比和 Green-Cauchy 应变张量的主向 …………… 85
§6. 应变椭球 …………………………………………………… 86
§7. 变形基本定理 ……………………………………………… 88
§8. 等价定理，对数应变张量和 Almansi-Hamel 应变张量… 93
§9. 相容性条件 ………………………………………………… 95
第二章　运动学……………………………………………………… 97
§1. 位移速度，加速度和物质导数 …………………………… 97
§2. 速度梯度，变形梯度及线、面、体素的物质导数 ……… 103
§3. 变形率和旋率 ……………………………………………… 105
§4. 应变张量的物质导数 ……………………………………… 109
§5. 输运定理 …………………………………………………… 112
第三章　动力学分析………………………………………………… 114
§1. 外力与内力，体力与接触力，Cauchy 应力原理………… 114
§2. Cauchy 应力和偶应力张量 ……………………………… 116
§3. Cauchy 动量和动量矩方程 ……………………………… 119
§4. Piola-Kirchhoff 应力张量，Boussinesq-Kirchhoff 动量方程……………………………………………………………… 121
§5. Signorini-Новожилов 动量方程 ………………………… 125
§6. 应力张量的本构导数 ……………………………………… 127
第四章　本构理论…………………………………………………… 131
§1. 原始元与守恒律 …………………………………………… 131
§2. 能量守恒律和动能定理 …………………………………… 132

§3. 本构关系的一般原理 …… 135
§4. 观察者与客观性 …… 136
§5. 应变张量,变形率和应力张量的客观性 …… 138
§6. 守恒律的客观性 …… 140
§7. 弹性体——Green 方法 …… 142
§8. 各向同性 …… 146
§9. 不可压缩性 …… 148
§10. 限制弹性势形式的不等式 …… 150
§11. Cauchy 方法 …… 152
第五章 问题的提法和若干解的举例 …… 154
§1. 弹性力学问题的提法 …… 154
§2. 均匀拉伸 …… 157
§3. 简单剪切 …… 160
§4. 圆柱体扭转 …… 164
§5. 厚壁筒的轴对称变形 …… 167
§6. 厚球壳的膨胀和翻转 …… 171
§7. 立方体的纯弯曲 …… 175
§8. 等厚度实心旋转盘 …… 179
§9. 厚壁筒的轴向剪切自由振动 …… 181
第六章 变分原理 …… 186
§1. 虚功、虚位移和虚应力原理 …… 186
§2. 总势能驻值原理 …… 189
§3. 总余能驻值原理 …… 193
§4. 广义变分原理 …… 196
第七章 线性化理论(古典弹性力学) …… 204
§1. 基本假定 …… 204
§2. 应变分析的线性化 …… 205
§3. 小转动 …… 209
§4. 线性协调方程 …… 213
§5. 动量方程和应力边条件的线性化 …… 214
§6. 虎克体 …… 216
附录 非线性弹性理论变分原理的统一理论 …… 218

§1. 引言 …………………………………………………………… 218
§2. 数学符号 ……………………………………………………… 219
§3. 应变和应力 …………………………………………………… 220
§4. 共轭变量和 Legendre 变换……………………………………… 222
§5. 虚功原理 ……………………………………………………… 225
§6. 古典变分原理 ………………………………………………… 226
§7. 广义变分原理 ………………………………………………… 231
§8. Levinson 原理 ………………………………………………… 234
§9. Fraeijs de Veubeke 原理 ……………………………………… 237
§10. 关系图 ………………………………………………………… 239
参考文献 ………………………………………………………… 241

绪　论

弹性力学作为精确理论，从本质上就是非线性的. Cauchy 和 Green 在这方面都作出了贡献. 在 Kirchhoff 和 Kelvin 的工作里也可以找到这一理论的基础. 1894 年，Finger 完成了超弹性（*hyperelastic*，即有弹性势的）体的有限变形理论. 有限弹性变形理论方程冗长而复杂，特别是强烈的非线性，使当时的人们感到在数学上进行一般性的讨论是没有多大希望的. 再加上当时应用的均属于在弹性范围内变形不大的弱弹性材料，生产与工程实际没有提出应用精确理论的迫切要求. 于是，绝大多数弹性力学工作者都避开这种理论而走上了线性化的道路. 现今，古典线性弹性力学已发展为一门成熟的理论，并且在解决许多实际问题中找到了得心应手的应用.

近二、三十年来，新现象的发现，新材料和新结构的应用，使非线性理论重新受到重视. 不少作者对古典理论作不同程度的几何上的或物理上的修正而提出各式各样的非线性工程理论，种类繁多，不胜枚举.

本书不涉及这些工程理论，而准备尽可能从一般性的角度叙述弹性通论. 张量分析工具的应用，虽然并不改变问题的实质，但它能使方程摆脱繁杂的形式而变得简单、明晰，物理概念突出，从而使许多问题的进一步探讨成为可能. 其次，第二次世界大战期间，橡皮工业的发展提出了橡皮结构（而现在还有高分子聚合物结构）的计算问题. 1940 年 Mooney 通过大量实验证实了某些类型橡皮的力学性能可用弹性势：$\Sigma = C_1(\mathrm{I}-3) + C_2(\mathrm{II}-3)$ 来描述，从而把非线性弹性理论中最困难的问题之一——弹性势的函数形式问题——具体向前推进了一步. 再者，实验证实了橡皮是几乎不可压缩的材料. 1948 年起，Rivlin 等正是利用了不可压缩条件

用半逆法获得了一系列简单而重要问题（圆柱体扭转、立方体弯曲等）的精确解．把这些解和橡皮的实验作比较得到了弹性势的形式．用这些结果预报橡皮制品的性能，即使它的伸长为原长的两三倍，精度仍能达到百分之几．只要想到，伸长度为1%时小变形理论的误差已甚大，就可以体会到有限变形论获得成功的份量了．这个成功鼓舞了人们研究这种理论的勇气，从而开始了对有限变形弹性论的新攻势，并且由此而导致了整个理性力学的蓬勃发展．

在作为连续介质力学来叙述有限弹性变形理论的开始，不能对“连续介质假设”只字不提．众所周知，物质由分子构成，而分子由原子，原子由原子核和电子，原子核又由基本粒子构成．“物质结构论”的观点是：分布性物体（或叫连续体——相对于离散的质点而言）的宏观行为应由基本粒子理论作为结论而推导得出．当前也正在开展这方面的研究，但存在的困难是很大的，因为：

(1) 基本粒子法则本身尚未完全建立．即使根据目前人们认识所及的基本粒子法则能够建立（至于如何建立，还是一个尚待解决的问题）一个分布性物体的理论，则每当发现基本粒子的一个新性质时，这种理论势必得从头进行修改．但粒子观点的无尽发展从认识论上来说是不可避免的．

(2) 数学困难目前尚难以克服．迄今为止，对某些特殊情形作过一些工作，但都经过很多数学上的简化．特别是当所得结果与实验不符的时候，就很难知道，问题出于基本法则的不妥呢，还是出于数学的简化推导过程本身．由于物质结构的复杂性，常常要采用统计方法，这样一来就失去了从粒子根本法则出发的原来意义．

(3) 基本粒子性质的细节和大部分力学问题无直接关联．粒子结构区别很大的物体在对应力的反应上往往区别不大．

基于此，连续介质力学避开上述的复杂过程而建立一个可无尽地分割而又不失去其任何定义性质的连续场直接理论．场可以是运动、物质、力、能和电磁现象所在场所．用这些概念来表达的

理论叫唯象理论(或叫现象宏观理论),因它表达实验的直接现象而并不企图用粒子观点去解释. 唯象理论的合理性在于所依据的是宏观实验,而所得结论仍然用于宏观实际;也就是以宏观世界作为出发点,建立宏观理论,返回来又用于宏观世界,并由宏观世界来检验其正确性. 这样,我们就可不必去管粒子结构.

理论是对客观世界观察和实验的归纳、总结及抽象的结果.但在建立理论过程中,我们总力图抓住对象的主要矛盾,并以之为依据引进一些假定和理想化——建立所谓"数学模型". 这样,任何理论都只是在不同程度上对自然界某些方面的"近似",都有一定的、由自然界本身的实验来确定的有效范围. 也就是看这理论所预言的结果和实验相符合的程度如何. 因此,我们在数学上总是力求严格,即指在一定的统一假定下进行推理,避免半途作随心所欲的假定. 只有这样才能检验所建立的数学模型的正确性. 今后的叙述我们将本着这个精神去做.

近代理性力学的发展相当程度上是从非线性弹性理论获得进展而开始的. 后者是前者的重要组成部分. 有限变形理论的基本概念也是理性力学的基本概念. 牢固地掌握这些基本概念是进一步研究目前已发展得极为丰富的理性力学的必由之路. 因此,本书力求按照近代理性力学的观点,详尽系统地叙述这些基本概念. 非线性弹性理论采用的工具各家不同,目前国际上最通用的是"两点张量场法". 它特别适用于描述有限变形,克服了其他方法易引起混乱的缺点. 尽管张量方法已经使现象的描述高度凝缩,但过多的上、下指标有时仍然显得累赘,在这一点上抽象记法又有它的优越之处. 本书合两方法之长,首次采用了"两点张量抽象符号法". 初次接触这方法时可能会感到不习惯,但熟练掌握后优越性就会逐渐显示出来. 作者的目的是否能达到,当由读者去判断.

本书分两部分:第一部分叙述非线性场论的基本数学工具——两点张量抽象符号法;第二部分系统介绍有限弹性变形理论的基本原理以及它向古典弹性理论的过渡. 本书包含了作者在

这领域的部分研究结果．这里不准备列举浩瀚的参考文献．写作过程中主要参考过的专著(它们都有详尽的文献索引)有：

[1] Новожилов, В. В., Основы нелинейной теории упругости, Огиз (1948). (中译本：B. B. 诺沃日洛夫，非线性弹性力学基础，科学出版社，1958).
[2] Green, A. E., Zerna, W., Theoretical Elasticity, Oxford (1954).
[3] Новожилов, В. В., Теория упругости, Судпром (1958).
[4] Truesdell, C., Toupin, R. A., The Classical Field Theories, Handbuch der Physik, Bd. III/1, Springer (1960).
[5] Eringen, A. C., Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill (1962).
[6] Седов, Л. И., Введение в механику сплошной среды, Физматгиз (1962).
[7] Truesdell, C., Noll, W., The Non-linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik, Bd. III/3, Springer (1965).
[8] Truesdell, C., Six Lectures on Modern Natural Philosophy, Springer (1966).
[9] Oden, J. T., Finite Elements of Non-linear Continua, McGraw-Hill (1972).
[10] Eringen, A. C., Continuum Physics, Vol. I–IV, Academic (1971—75).
[11] Wang, C.-C., Truesdell, C., Introduction to Rational Elasticity, Noordhoff (1973).
[12] Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon (1975).

第一部分　三维欧氏空间张量分析

自然界的运动法则以及所出现的几何或物理量是与坐标系无关的．不管有无坐标系，例如，物体的任何一部分，总要处在（静的或动的）平衡状态．但处理具体问题时，总得引进一个较方便的坐标系．这样一来，连续介质的平衡方程除了反映微体平衡这一事实外，还夹杂了由具体坐标系所招致而与平衡事实完全无关的东西．这在理论研究中有时会引起不必要的复杂化，甚至遮盖所反映的物理实质而使我们分辨不清．尽管都是平衡方程，在柱坐标系和球坐标系的形式就完全不同．我们说，像这样的方程就不具有与坐标系无关的不变性．

为了摆脱这种状况，不采用坐标系的抽象记法曾经有过很大吸引力．只运用标量和向量的一些力学分支广泛应用这种方法．但在出现复杂于向量的物理量的力学分支（如弹性力学）里，单纯的抽象记法有时显得并不方便．最常用的是张量方法．张量方法就是既采用坐标系而又摆脱具体坐标系影响的不变性方法．它从整体上使物理概念更明确了．本文准备通过并矢记法将张量方法和抽象记法结合起来．

第一章　斜角坐标系（即仿射坐标系）

§1. 基向量和度量张量

令在三维欧氏空间中（在那里向量的点积和叉积有定义），斜角坐标系由三个非共面向量 $\mathbf{g}_1$，$\mathbf{g}_2$，$\mathbf{g}_3$（不失一般性，今后均采用右手系）确定．任意向量 $\mathbf{v}$ 可表达为这三向量的线性组合：

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{g}_1 + v^2\mathbf{g}_2 + v^3\mathbf{g}_3 = v^i\mathbf{g}_i. \qquad (1.1)$$

这里采用了 **Einstein 求和约定**：凡重复一次且仅一次的上下指标均从 1 至 3 求和．重复的指标叫**盲指标**，可以任意代换，如 $v^i\mathbf{g}_i = v^j\mathbf{g}_j$．为了求得分解系数 v^i（拉丁指标总是自 1 至 3 取值），以 $\mathbf{g}_j$ 点乘(1.1)式两边，并引进符号

$$g_{ij} \overset{df}{=} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (\text{可以看出 } g_{ij} = g_{ji}) \tag{1.2}$$

后，得

$$g_{ir}v^r = \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_i. \tag{1.3}$$

这个含三个未知量 v^i 的线性代数方程组有唯一解，因它的系数行列式（鉴于 $\mathbf{g}_i$ 非共面）[1)]

$$g \overset{df}{=} |g_{ij}| = |\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j| = [\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3]^2 \neq 0. \tag{1.4}$$

为了更方便的目的，再引进满足关系：

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta^i_j \overset{df}{=} \begin{cases} 1 & \text{当} \quad i = j, \\ 0 & \text{当} \quad i \neq j, \end{cases} \tag{1.5}$$

的三个向量 $\mathbf{g}^i$，称为**逆变基向量**，而 $\mathbf{g}_i$ 则称为**协变基向量**（δ^i_j 一般叫作 **Kronecker** 符号）．设方程（1.5）有解，则其解 $\mathbf{g}^i$ 必可表达为 $\mathbf{g}_j$ 的线性组合

$$\mathbf{g}^i = g^{ij}\mathbf{g}_j. \tag{1.6}$$

这样，方程（1.5）的解的存在唯一问题就变成 g^{ij} 能否被唯一确定的问题．为此，将(1.6)式代回(1.5)式得

$$g^{ir}\mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_j = \delta^i_j \quad \text{即} \quad g^{ir}g_{rj} = \delta^i_j. \tag{1.7}$$

根据性质（1.4），作为满秩矩阵 $\|g_{ij}\|$ 的逆矩阵 $\|g^{ij}\|$ 存在且唯一．利用 Cramer 公式得

$$g^{ij} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ji}}. \tag{1.8}$$

代回(1.6)式即得 $\mathbf{g}^i$．直接代入(1.5)，容易验证，$\mathbf{g}^i$ 也可表达为

$$\mathbf{g}^i = \frac{\mathbf{g}_j \times \mathbf{g}_k}{[\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3]}, \quad (i < j < k) \tag{1.9}$$

---

1) 矩阵 $\|g_{ij}\|$ 的行列式记为 $|g_{ij}|$ 或 $\det\|g_{ij}\|$．矩阵 $\|g_{ij}\|$ 的第 1 个指标总是行指标．

$[\mathbf{uvw}] = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

以及

$$\mathbf{g}_i=\frac{\mathbf{g}^j\times\mathbf{g}^k}{[\mathbf{g}^1\mathbf{g}^2\mathbf{g}^3]},\quad(i<j<k).\tag{1.10}$$

后面将说明，$\mathbf{g}^i$ 亦为非共面，故(1.10)式有意义．将逆变基向量 $\mathbf{g}^j$ 点乘(1.1)式两边得

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}^j=v^i\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}^j=v^i\delta_i^j=v^j,\tag{1.11}$$

这比解方程组(1.3)方便多了．将 $\mathbf{g}^j$ 点乘(1.6)式两边又得

$$\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}^j=g^{ir}\mathbf{g}_r\cdot\mathbf{g}^j=g^{ij}\quad(\text{显然 } g^{ij}=g^{ji}).\tag{1.12}$$

将(1.6)式两边乘以 g_{ki} 给出

$$g_{ki}\mathbf{g}^i=g_{ki}g^{ij}\mathbf{g}_j=\delta_k^j\mathbf{g}_j=\mathbf{g}_k.\tag{1.13}$$

公式(1.6)，(1.13)，(1.7)，(1.2)及(1.12)刻划出 $\mathbf{g}_i$，$\mathbf{g}^i$，g_{ij} 及 g^{ij} 间的相互关系．

从(1.7)第二式又得行列式

$$1=|g^{ir}g_{rj}|=|g^{ir}|\cdot|g_{rj}|,\quad |g^{ij}|=\frac{1}{g}\neq0,$$

上式说明 $\mathbf{g}^i$ 也是三个非共面向量．这样，$\mathbf{v}$ 也可表达为 $\mathbf{g}^i$ 的线性组合

$$\mathbf{v}=v_j\mathbf{g}^j.\tag{1.14}$$

以 $\mathbf{g}_i$ 点乘上式得

$$v_i=\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}_i.\tag{1.15}$$

将(1.1)式代入上式右边，或(1.14)式代入(1.11)式左边，分别得

$$v_i=\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_rv^r=g_{ir}v^r,\tag{1.16}$$

$$v^i=\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}^rv_r=g^{ir}v_r.\tag{1.17}$$

可以看出，分解系数 v_i 和 v^i 是不同的，它们由(1.16)和(1.17)式相互联系．今后称 v_i 为 $\mathbf{v}$ 的**协变分量**，而 v^i 为**逆变分量**．从形式上看来，g_{ij} 和 g^{ij}在上两式以及(1.6)和(1.13)式中起着升降指标的作用，它们分别称为**协变**和**逆变度量张量**(理由后述)．总的说来，给出非共面协变基 $\mathbf{g}_i$ 后就可求得 g_{ij}，g^{ij}，$\mathbf{g}^i$ 以及 $\mathbf{v}$ 的两种分量 v_i 和 v^i． v_i 和 v^i 只是同一几何量的不同表示法而已，因此三种说法："向量 $\mathbf{v}$"，"向量 v^i" 或"向量 v_i" 是等价的．

§2. 向量点积和叉积

任意两向量 $\mathbf{u}=u^i\mathbf{g}_i=u_j\mathbf{g}^j$, $\mathbf{v}=v^i\mathbf{g}_i=v_j\mathbf{g}^j$ 的点积可表达为

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_ju^iv^j=g_{ij}u^iv^j=u^rv_r$$
$$=\mathbf{g}^i\cdot\mathbf{g}^ju_iv_j=g^{ij}u_iv_j=u_rv^r. \tag{2.1}$$

若令 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$, 则得 $\mathbf{v}$ 长度的平方 $|\mathbf{v}|^2$. 可以看出, g_{ij} 和 g^{ij} 是点积亦即求长度的核心,**度量张量**一词即从这里而来.

为了求叉积,引进 **Eddington 张量**:

$$\epsilon_{ijk}\overset{df}{=}[\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k],\quad \epsilon^{ijk}=[\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\mathbf{g}^k]. \tag{2.2}$$

这样,叉积 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 的协变和逆变分量就是

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}_i=[\mathbf{g}_i\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s]u^rv^s=\epsilon_{irs}u^rv^s,$$
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}^i=[\mathbf{g}^i\mathbf{g}^r\mathbf{g}^s]u_rv_s=\epsilon^{irs}u_rv_s.$$

在叉积中, Eddington 张量具有和度量张量在点积中相类似的地位.

容易看到, $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 夹角的余弦以及 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 所定的体积分别为

$$\cos(\mathbf{u},\mathbf{v})=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}=\frac{u^rv_r}{\sqrt{u^ku_k}\sqrt{v^lv_l}}$$

和

$$[\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w}]=[\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j\mathbf{g}^k]u_iv_jw_k=\epsilon^{ijk}u_iv_jw_k=\epsilon_{ijk}u^iv^jw^k.$$

§3. 坐标变换和张量

我们再考虑另一个仿射坐标系,它的协变基(亦设为右手系)记为:

$$\mathbf{g}_{i'}=A^i_{i'}\mathbf{g}_i, \tag{3.1}$$