

无綫电电子学讲座

微波固体量子放大器

黄 武 汉

上海科学技术出版社

59

3

73.45
5731

无 线 电 电 子 学 讲 座

微波固体量子放大器

黄 武 汉

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本講座有重點地介紹了有關微波固體量子放大器的基本原理、實驗技術和若干專門課題。

內容包括：群論和晶格場理論簡介，微波固體量子放大器用的順磁晶體，微波固體量子放大器原理，腔式和行波式微波量子放大器，交叉弛豫微波量子放大器，光激勵微波固體量子放大器原理，微波固體量子放大器的實驗技術，微波固體量子放大器系統的噪聲、其應用前景和發展近況等。各講內容均以闡明基本原理和物理基礎為主，並適當地介紹了一些實際工作經驗。

本講座可供已掌握大學基礎物理學知識而需了解量子電子學者自修之用；對於專門從事量子電子學或與此學科有關的其他科學領域的科學技術人員及高等學校教師和高年級學生也有一定的參考價值。

無線電電子學講座 微波固體量子放大器 黃 武 漢

上海科學技術出版社出版（上海瑞金二路450號）
上海市書刊出版業營業許可證出093號

商務印書館上海廠印刷 新華書店上海發行所發行

開本850×1156 1/32 印張10 16/32 排版字數257,000

1965年5月第1版 1965年5月第1次印刷

印數1—4,570（其中精裝本70冊）

統一書號 15119·1787 定價（科六）1.60元

序

微波量子放大器的英文原名叫 Maser (音譯为脉澤), 是 Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation 的縮写, 意譯应当是“輻射的受激发射微波放大”, 它是 Gordon, Zeiger 和 Townes 提出的^[1]. 如果在这种器件中使用各种順磁晶体作为工作物质, 則称其为微波固体量子放大器或量子順磁放大器.

在 1944 年, Завойский^[2] 发现了电子的順磁共振, 提供了对微波波段电子順磁能級研究的基础. 在五十年代的初期, 国外的一些科学家指出: 利用电磁場量子和微观系統相互作用有产生和放大电磁波的可能性. 1954~1955 年間已制成氮分子束振蕩器, 它具有頻率的高度稳定性, 但作为放大器則嫌頻寬太窄. 1955 年 Басов 和 Прохоров^[3] 提出用三能級的方法来得到負温度, 1956 年 Bloembergen^[4] 詳細地計算了获得負温度的条件, 提出利用离子晶体中的过渡族离子来得到微波的放大, 于是目前的微波固体量子放大器的基本工作原理就确立起来了. 1957 年 Scovil 等^[5] 制成第一个微波固体量子放大器. 以后, 这种器件在理論上和实验上得到迅速的发展, 在最近短短的几年期間內, 出現了大量文献,

[1] Gordon, J. P., Zeiger, H. J., and Townes, C. H., *Phys. Rev.*, **99**, 1264 (1955).

[2] Завойский, Е. К., Докторская Диссертация, ФИАН, Москва, 1944.

[3] Басов, Н. Г., и Прохоров, А. М., *ЖЭТФ*, **28**, 249 (1955).

[4] Bloembergen, N., *Phys. Rev.*, **104**, 34 (1956).

[5] Scovil, H. E. D., Feher, G., and Seidel, H., *Phys. Rev.*, **105**, 762 (1957).

并也由实验室进入实际应用阶段。由于这种器件具有极低的噪声和极高的灵敏度，它能保证在整个厘米波和毫米波波段获得灵敏度非常高的接收系统，所以在远程微波雷达、人造卫星和远程通信、射电天文学、远程遙测及遙控等一系列现代科学技术中，均有一定的应用潜力。而且近几年来，在微波量子放大器的基础上，又发展出红外光和可见光以及更短波长的量子振荡和放大器件，其可能的应用范围还在不断地扩大。因此可以说，这些新型器件的诞生和发展，将是现代科学技术的一项重要成就，在此基础上，也出现了一个新兴的科学领域——量子电子学。

为了促使量子电子学在我国迅速发展，使新的科学成果为我国社会主义建设服务，现将作者与他的同事们从1959年以来在学术期刊上发表过的若干论文和汲取了国外文献中一部分有关微波固体量子放大器方面的资料加以整理，作为“无线电电子学讲座”中的一个专题出版，以便向已掌握大学基础物理课程的读者提供比较系统和比较深入的材料，供他们自学或工作中参考。本书同我国已出版的同类书有所不同，后者中有的是入门性的读物，以致内容稍嫌不够深入；有的是理论性较强的专著。本书则有重点地介绍这方面的主要专门课题，并以讲座的形式出版，便于普及和推广。

在内容安排上，本讲座着重阐明基本原理和实验知识，并适当地叙述了作者在实际工作中所取得的点滴经验。全书可分四大部分，第一部分包括前三讲，中心是讨论作为微波量子放大器工作物质的顺磁晶体。在此，首先扼要地介绍了研究顺磁晶体的群论方法和晶格场理论；其次，对适于作工作物质的顺磁晶体作了较全面的讨论。由于这些晶体中以红宝石用得最多，性能也较好，所以在第一部分最后又把红宝石顺磁晶体专列一讲，对它的能级结构、线宽及线型作了详尽的分析和计算。第二部分包括第4~6讲，中心是阐述各种微波固体量子放大器的基本原理和工作过程的物理实质，并对微波结构（谐振腔和慢波结构）及其设计作了较系统

的分析。第三部分(即第7讲)詳細地介紹了微波固体量子放大器的实验技术。第四部分(即第8~9讲)对光激励式微波固体量子放大器的原理和微波固体量子放大器及其系统的噪声作了簡要的分析。最后根据它的低噪声和高灵敏度的特性,对微波固体量子放大器的实用問題和发展近况作了原則性討論[†]。

在微波量子放大器基础上发展起来的光量子振蕩器和放大器是目前量子电子学中内容最丰富、发展最迅速的研究領域,因而愈来愈引起广泛的兴趣[‡]。虽然本讲座沒有涉及这些内容,但由于微波量子放大器的基本理論、放大原理和噪声特性的討論是与頻率无关的,因而本讲座的許多基本原理及概念,特别是第一部分的群論方法、晶格場理論和順磁晶体特性、第二部分的量子放大原理、第四部分的噪声特性概念和光激励式量子放大器原理等内容,对光量子振蕩器和放大器的了解和研究都是有幫助的。

感謝林福成同志对順磁晶体,張維成同志对紅宝石的綫寬和綫型,何慧娟同志对三能級微波固体量子放大器近两三年来的研究概况,林尊祺同志对光激励式微波固体量子放大器等方面提供的素材和宝貴意見。陈衡同志在初稿的整理工作上給了我很多帮助,王金山和楼祺洪同志閱讀了本讲座的校样,謹此致謝。

由于这門新兴学科发展极为迅速,新的研究成果不断出現,再加上作者水平所限,整理和定稿時間匆促,因而在内容安排上难免

[†] 关于学习微波量子放大器及振蕩器的入門书籍,可参考 J. R. 辛格著(凌君达等譯):微波量子放大器及振蕩器,科学出版社,1963。关于微波固体量子放大器理論方面較系統和較深入的分析,可参考黄武汉和林福成:量子順磁放大器原理,科学出版社(即将出版),这是一本專門为量子电子学专业研究生而編写的书籍。

关于电子順磁共振,可参考 Альтшулер, С. А., и Козырев, Б. М.: Электронный Парамагнитный Резонанс, Физматгиз 1961。关于固体中的順磁共振問題,可参考 W. Low: Paramagnetic Resonance in Solids, Academic Press, 1960。

[‡] 黄武汉,国外光激励技术的研究近况,科学通报,166 (1965年2月号)。

关于学习光量子振蕩器的入門书籍,可参考 B. A. 兰格耶耳(凌君达和孙占鰲譯):光激励器,上海科学技术出版社(即将出版),或黄武汉:激光光通信与雷达技术,人民邮电出版社(即将出版)。

仍有缺点和錯誤之处。我誠懇地希望讀者們提出批評和建議，以便今后有可能把本书修訂得更完整一些。

作 者 1964 年夏于北京

目 录

序

第1讲 群論和晶格場理論簡介	1
§1.1 群論的基本概念	2
1.1.1 对称操作的几何概念	2
1.1.2 群的定义	4
1.1.3 32点群的表示	5
1.1.4 群表示的特征标	8
1.1.5 全旋轉群	9
1.1.6 全旋轉群的乘积表示	11
§1.2 群論的一些应用举例	12
§1.3 晶格場及其計算	16
§1.4 自旋哈密頓量	20
参考文献	25
第2讲 微波固体量子放大器用的順磁晶体	26
§2.1 順磁晶体的选择	26
§2.2 过渡族元素的能譜	30
2.2.1 鉄族离子	30
2.2.2 稀土族离子	34
2.2.3 鈹族、鉑族、銅族离子	35
§2.3 一些常用晶体的結構特性	35
2.3.1 剛玉 α - Al_2O_3	36
2.3.2 TiO_2 晶体	38
2.3.3 $\text{Be}_3\text{Al}_2(\text{SiO}_3)_6$ 晶体	39
2.3.4 $\text{K}_3\text{Co}(\text{CN})_6$	39
2.3.5 $\text{La}(\text{C}_2\text{H}_5\text{SO}_4)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$	39
§2.4 一些常用物质的自旋哈密頓量及其参量	40

2.4.1 $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Cr}^{3+}$ (紅寶石)	43
2.4.2 $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Ni}^{2+}$	44
2.4.3 $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Fe}^{3+}$	44
2.4.4 $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Gd}^{3+}$	49
2.4.5 $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Ti}^{3+}$	50
2.4.6 $\text{TiO}_2:\text{Cr}^{3+}$ (金紅石)	50
2.4.7 $\text{TiO}_2:\text{Fe}^{3+}$	51
2.4.8 TiO_2 摻其他杂质	52
2.4.9 $\text{Be}_3\text{Al}_2\text{Si}_6\text{O}_{18}:\text{Cr}^{3+}$	52
2.4.10 $\text{Be}_3\text{Al}_2\text{Si}_6\text{O}_{18}:\text{Fe}^{3+}$	53
2.4.11 $\text{K}_3\text{Co}(\text{CN})_6:\text{Cr}^{3+}$	53
2.4.12 $\text{La}(\text{C}_2\text{H}_5\text{SO}_4)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}:\text{Gd}^{3+}$	54
§ 2.5 順磁晶体能級和跃迁几率的計算	54
参考文献	57
第3讲 紅寶石順磁晶体	59
§ 3.1 紅寶石的优点	59
§ 3.2 紅寶石的能級計算	59
3.2.1 引言	59
3.2.2 紅寶石中 Cr^{3+} 能級的計算	60
3.2.3 紅寶石中 Cr^{3+} 离子的能級图	63
§ 3.3 紅寶石的綫寬和綫型	68
3.3.1 引言	68
3.3.2 綫寬的起因	69
3.3.3 紅寶石二次矩的計算	71
§ 3.4 紅寶石綫寬和綫型的实验結果	76
3.4.1 实验裝置概述	76
3.4.2 綫寬的測量和綫型的記錄	77
3.4.3 实验結果	78
3.4.4 实验結果的分析及对理論計算的比較	81
参考文献	83
第4讲 微波固体量子放大器原理	85
§ 4.1 引言	85
§ 4.2 微波固体量子放大作用的物理基础	85

4.2.1 二能級系統的量子放大作用	86
4.2.2 三能級系統的量子放大作用	90
4.2.3 推-挽式四能級系統的量子放大作用	94
§ 4.3 諧振腔式量子放大器	95
4.3.1 晶體的輻射功率和飽和激勵功率	97
4.3.2 單孔反射腔式量子放大器的增益及帶寬;放大和 振蕩條件	99
4.3.3 磁品質因數 Q_m	102
§ 4.4 諧振腔的一些性質	106
4.4.1 諧振腔的一般分析	107
4.4.2 諧振腔對外界的耦合	113
§ 4.5 幾種常用的雙頻諧振腔	121
4.5.1 矩形雙頻諧振腔的設計	122
4.5.2 同軸綫型或其他 TEM 型雙頻諧振腔的設計	125
參考文獻	132
第 5 讲 行波式微波量子放大器	133
§ 5.1 引言	133
§ 5.2 行波式量子放大器的增益和帶寬	134
§ 5.3 行波式量子放大器的慢波結構概述	138
5.3.1 介質慢波結構	138
5.3.2 幾何慢波結構	139
5.3.3 諧振式慢波結構	140
§ 5.4 梳齒型慢波結構的理論和設計	141
5.4.1 概述	141
5.4.2 梳齒型慢波結構的色散曲綫	143
5.4.3 填充因子 F	152
§ 5.5 Karp 型慢波結構的設計	154
§ 5.6 行波式和腔式量子放大器的比較	162
5.6.1 增益和帶寬	162
5.6.2 增益穩定性	163
5.6.3 可調度	164
5.6.4 信號飽和和輸出功率	164
5.6.5 輕便和小型化	165

参考文献	165
第6讲 交叉弛豫微波固体量子放大器	166
§6.1 自交叉弛豫微波量子放大器的简化分析方法	166
6.1.1 引言	166
6.1.2 对自旋-晶格弛豫的简化的假设	167
6.1.3 自交叉弛豫微波量子放大器	172
6.1.4 红宝石腔式量子放大器工作点选择的初步设计	186
§6.2 推-挽式红宝石量子放大器交叉弛豫的讨论	194
§6.3 用微波量子放大结果来分析交叉弛豫时间	199
参考文献	201
第7讲 微波固体量子放大器的实验技术	203
§7.1 微波固体量子放大器的实验装置	203
§7.2 谐振腔 Q 值的测量	206
7.2.1 Q 值的几个表示式	207
7.2.2 用阻抗法测量 Q 值	211
7.2.3 用半功率点的带宽测 Q 值	214
§7.3 慢波结构的测量	219
7.3.1 驻波法	220
7.3.2 谐振法	220
7.3.3 群速的直接测量法	221
§7.4 实验用杜瓦瓶和其他低温技术	224
7.4.1 实验用杜瓦瓶	224
7.4.2 低温的获得	230
7.4.3 低温技术对微波测试的一些影响	231
§7.5 晶轴和工作点的确定及量子放大现象的观察	234
7.5.1 顺磁晶体晶轴的确定	234
7.5.2 微波固体量子放大器工作点的校正	240
7.5.3 放大过程的观察及粒子数反转比的测量	242
7.5.4 增益带宽乘积的测量	245
§7.6 噪声温度的测量	246
参考文献	249
第8讲 微波量子放大器系统的噪声	251
§8.1 噪声的一些基本概念	251

§8.2 微波固体量子放大器本身的噪声	258
8.2.1 不考虑微波结构对噪声的贡献	259
8.2.2 考虑微波结构对噪声的贡献	268
§8.3 量子放大器系统各部分噪声的分析	273
8.3.1 量子放大器系统概述	273
8.3.2 天空噪声	274
8.3.3 波导输入电路的噪声	278
8.3.4 铁氧体环行器引起的噪声	279
8.3.5 接收机引起的噪声	280
参考文献	281
第9讲 微波固体量子放大器的发展近况及其应用前景	282
§9.1 近两三年来的研究概况	282
9.1.1 微波结构形式	283
9.1.2 顺磁晶体材料	284
9.1.3 激励方式	284
§9.2 光激励微波固体量子放大器原理	286
9.2.1 光激励原理	287
9.2.2 光激励微波量子放大器的噪声温度	289
9.2.3 对光激励源的要求	290
9.2.4 饱和假定和小激励假定的适用范围	291
9.2.5 系统的暂态过程	293
9.2.6 工作物质	295
§9.3 微波固体量子放大器的应用前景	296
9.3.1 微波固体量子放大器的应用范围	296
9.3.2 现存缺点及其估计	298
参考文献	301
附 录	
1. 红宝石“平行谱” $-1/2 \rightarrow 1/2$ 跃迁线二次矩的计算	303
2. 性质2的证明	308
补充参考文献	310

群論和晶格場理論簡介

近十多年来，对过渡族金属离子在离子晶体中能譜性质的研究，是順磁波譜学中很引人注目的一个課題。尤其在 1944 年 Завойский^[1] 发现电子順磁共振之后，不仅为物理学等許多科学領域提供了很有成效的研究方法，而且也为近年来迅速发展着的量子电子学奠定了重要的理論基础。

在近代順磁波譜学的基础上，利用单色性和灵敏度极高的电子仪器，对离子晶体中过渡金属离子能譜的最低能态，进行了很多富有成果的研究，获得了不少宝贵資料。但是，自从微波固体量子放大器研制成功以后，要求对順磁离子在晶体中的特性，进行更广泛和深入地研究，以便选择效率高和工作波段合适的材料。至于对順磁离子能譜中高能态部分的研究，則同光波波段量子放大器材料的选择有密切关系。

由于晶格的对称性质，所以在能譜的計算中广泛地应用了群論的方法。对于所討論的对象，常常采用“晶格場”这个簡化的模型，把晶格环境內的順磁离子看成只受到靜止晶格电場的作用，并引起 Stark 分裂。

这一讲比較扼要地介紹群論的基本概念和方法，以及利用群論法所得到的重要結果。詳細的推导过程，則可参考專門的著作。

§ 1.1 群論的基本概念^[10]

群論的发展和运用，对近代固体量子物理学的发展起了极为重要的作用。群論方法常是研究一些固体材料中电子或离子能譜及波函数的重要数学工具。

Bethe^[2] 最先成功地把群論运用到固体量子物理学中去。在他的工作中，对自由原子的簡并能級受晶格場作用而引起的分裂进行了理論研究。随后，Seitz^[3] 以及 Bouckaert 等^[4] 的研究，奠定了固体能帶理論的完整基础。Сорокин 等^[5] 利用波矢群的概念，得到了簡單晶格对称群不可約表示的特征标表。在 Herring^[6] 和 Döring 等^[7] 的工作中，将这个方法加以推广，运用到較為复杂的晶格上。此外，Herring^[8] 和 Elliott^[9] 也研究了時間符号反演及自旋-軌道相互作用对晶体中电子能譜的影响。在本节中，我們只簡單介紹一些群論的基本概念。

1.1.1 对称操作的几何概念

理想晶格总是具有某种对称性质，而这种对称性又可以分为宏观的和微观的。宏观对称性确定了只同晶体方向有关的晶体对称性，这时晶体好象是一个均匀的連續体。这里“均匀”一詞強調出物理性质对方向性的关系，对晶体中所有各点是相同的。从純粹的结构結晶学观点出发，已知宏观对称性是由 32 种晶类規定的。这是由点对称元——旋轉和映射——組成的对称群。此外，微观对称性将理解为完全真实的晶格对称性，这种对称性确定出晶体中取决于原子在晶格中配置的特性。下面从几何的观点来討論对称群的旋轉操作和鏡面映射。

設如图 1.1 所示的三角形表示某一体系，如果通过下列方式使其通过中心旋轉：

A——沿 Oz 軸轉 120° (Oz 軸垂直紙面，未在图中画出)；

B ——沿 Oz 軸轉 240° 或 -120° ;

K ——沿 Ok 軸轉 180° ;

L ——沿 Ol 軸轉 180° ;

M ——沿 Om 軸轉 180° ,

E ——沿任意軸轉 0° 或 360° .

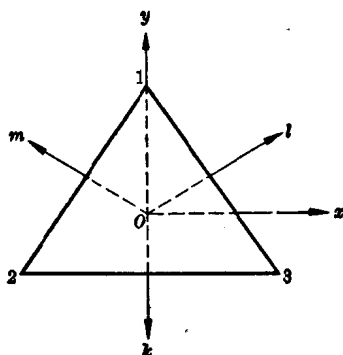


圖 1.1

不难看出,上述的任何一种旋轉,最后都将使三角形同自身相重.

当然,任意两个这样旋轉的合成,还是使得三角形同其自身相重;而值得注意的是,这样的两个旋轉可以用上述的某一个旋轉来代替.例如,先作用 A 而后作用 K 的結果,同单独作用 L 是完全一样的,因此可以記为 $KA=L$. 表 1.1 中列出这样的乘法表,用其中第一行的某一个旋轉,再作用第一列的另一个旋轉,可得到表內相应位置的旋轉.这样得到的所有旋轉的集合,叫做 32 点群或 D_3 点群.

表 1.1 32 点群的乘法表

	E	A	B	K	L	M (先作用)
E	E	A	B	K	L	M
A	A	B	E	M	K	L
B	B	E	A	L	M	K
K	K	L	M	E	A	B
L	L	M	K	B	E	A
M	M	K	L	A	B	E
(后作用)						

由此可見,就上述的意义來說,任意的操作都同一个或者几个简单操作的乘积等价.

一般說来,体系对于某一指定轉軸的位置,由轉角 α 决定. 如果体系不是轉过 α 角,而是轉过 $\alpha+2\pi$, 則体系还是旋轉到同 α 角

相同的最終位置，因而两种旋轉是等价的。所以，在这里的討論中，将仅仅限于旋轉角小于 2π 那种旋轉操作。假如物体在繞某軸旋轉过角度 $2\pi/n$ 时同自身相重，則称該軸为 n 度对称軸。

現在来研究这样的两个体系 τ 和 $\bar{\tau}$ ，其中体系 $\bar{\tau}$ 是用对某个平面 σ 作鏡面反映的方法，从体系 τ 得到。一个体系和它的鏡象，利用普通的旋轉操作是不能彼此相重的，而只能依靠鏡面反映的方法才能达到。如果 τ_1 是体系 τ 的某个位置，而 $\bar{\tau}_2$ 是体系 $\bar{\tau}$ 的另一个位置，則可以先在某一平面上映射 τ_1 ；然后，由此法所得的鏡象 $\bar{\tau}_1$ ，只要經過一个简单的平移作用，就可以同 $\bar{\tau}_2$ 相重。

如果某一体系先繞某軸旋轉 α 角，然后在垂直于該軸的平面上映射，这种操作叫鏡象旋转变換。如果体系繞轉軸旋轉角度 $2\pi/n$ ，并接着在垂直于該軸的平面映射，而結果同自身相重的話，則可以說体系有 n 度鏡象旋轉軸。假如鏡象旋转变換的旋轉角度 $\alpha = \pi$ ，則这种操作导致对于轉軸和平面交截点的中心反演。

1.1.2 群的定义

設由元素 $P, Q, R, \dots$ 組成有限或无限集合 $\mathcal{G}$ ，如果該集合满足下列諸条件，就組成成为一个群，并以 $\mathcal{G}$ 表示。这些条件是：

(1) 集合中按一定次序作出的任何两个元素的乘积属于同一集合中的元素，即

$$PQ = R \in \mathcal{G}; \quad (1.1)$$

式中， $\in$ 代表“属于”的意思。

(2) 元素的积满足結合律，即

$$(PQ)R = P(QR) = PQR. \quad (1.2)$$

但是，一般說来，积的交換律是不存在的，即在通常情況下

$$PQ \neq QP. \quad (1.3)$$

(3) 在集合 $\mathcal{G}$ 中，包含满足关系式

$$EP = PE = P \quad (1.4)$$

的元素 E , 并称它为单位元素.

(4) 同集合 $\mathcal{G}$ 中任一元素 P 相对应的, 有由下列关系

$$PP^{-1} = P^{-1}P = E \quad (1.5)$$

所决定的同一集合中的另一元素 P^{-1} , 并称它为 P 的逆元素. 如前所述, $P^{-1} \in \mathcal{G}$.

如果群 $\mathcal{G}$ 中元素 g 的数目是有限的, 则此群称为有限群; 否则称为連續群(或无限群). 当群的所有元素彼此可以对易时, 则此群称为交换群; 反之, 称为非交换群.

由群 $\mathcal{G}$ 中任意数目的元素组成的集合 U , 而且集合 U 本身满足群的定义, 则称该集合 U 为群 $\mathcal{G}$ 的子群.

很容易验证, 32 点群是符合群的定义的. 它之所以被称为点群, 是因为所有的对称操作元素都通过原点 O , 32 点群是点群中的一个. 有时, 如前所述, 对称操作还包含对原点的反演, 或通过原点的鏡面映射.

也容易验证, 前面所讨论的三个旋轉 A , B , E 也符合群的定义, 并称为 3 点群(或 C_3 点群). 3 点群是由 32 点群的一部分元素组成的, 所以它就是 32 点群的子群. 单独一个元素 E 也是一个子群, 并叫做显然子群.

可以证明, 使晶格结构同自身相重的点群共有三十二个, 叫做三十二个晶体点群.

1.1.3 32 点群的表示

群表示的一般定义是这样的: 在 n 维綫性空間中的基矢量(簡称为基)为 ϕ_i , $i=1, 2, \dots, n$. 指定綫性空間的算符 D , 使群 $\mathcal{G}$ 中每一个元素 T 和一个算符相对应, 記为 $D(T)$. 当群中 $KA=L$ 成立时($K, A, L \in \mathcal{G}$), $D(K)D(A)=D(L)$ 也成立, 那就說从这个 n 维綫性空間中得到群 $\mathcal{G}$ 的表示 D , 并称作群 G 的 n 维表示.

例如, 假若我們限定 32 点群的旋轉动作是坐标軸的旋轉(与