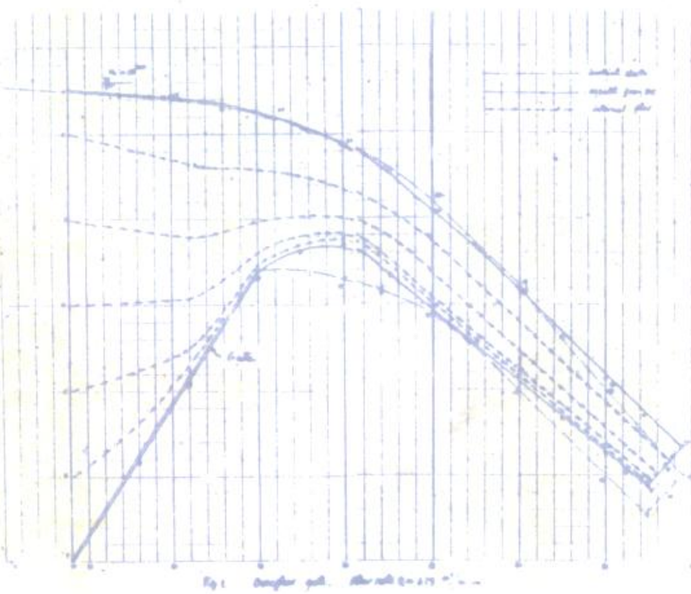
Continuum Mechanics and Its Numerical Modelling

连续统力学及其数值模拟

冯振兴 编著



$$\dot{\rho} + \rho v_{j,j} = 0$$

$$\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + (\lambda + 2\mu) v_{j,ji} + \mu v_{i,jj}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} v_{k,k} + 2\mu D_{ij}$$

武汉大学本科生系列教材
武汉大学出版社

连续统力学及其数值模拟

冯振兴 编著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

连续统力学及其数值模拟/冯振兴编著．—武汉：武汉大学出版社，1996.12
ISBN 7-307-02176-5

Ⅰ．连…
Ⅱ．冯…
Ⅲ．①连续介质力学 ②数值模拟
Ⅳ．O 33． O 242.1

武汉大学出版社出版
（430072 武昌 珞珈山）
湖北毕昇印刷总厂印刷
（436700 湖北省英山县温泉镇鸡鸣路 60 号）
新华书店湖北发行所发行
1996 年 12 月第 1 版 1996 年 12 月第 1 次印刷
开本：787×1092 1/16 印张：18
字数：441 千字 印数：1—2000
ISBN 7-307-02176-5/O・161 定价：16.80 元

内 容 简 介

本书采用文献常见的角标张量记法，统一表述固体与流体力学的基本微分控制方程和本构关系，阐明连续统力学的基本概念、专业术语和力学机理。随后介绍由微分方程建立等价的积分型方程并插值离散化为计算机可解的代数方程组所涉及的若干力学原理，提供了有限元、边界元等通用算法的理论基础。本书特色是把经典力学理论和近代计算机模拟有机联系起来，做到学以致用。本书可用作计算力学、应用数学和计算数学专业基础教材，后几章则可供研究生阶段学习参考。本书也可供从事工程课题力学计算的广大科技人员参考使用。

目　录

第二部分 连续统力学

第三部分 计算机模拟

绪　论

力学作为一门综合性的基础学科，承担了数学理论与工程实际之间的桥梁作用.在近代计算机广为运用的情况下，这种桥梁作用主要表现为建立实际问题的数学模型.

大体说来，通过力学途径建立的模型称为确定性(determined)模型，通过概率统计手段建立的模型则称为非确定性模型.同一实际问题，常可建立两种模型，如大气环流问题就可以建立力学模型或统计模型.这里关键是要把古典理论与新兴学科(特别是与近代计算机模拟相关的学科)很好地结合起来.

作为应用数学专业的学生，这两方面可以有所侧重，但应具备较广的力学和概率统计基础知识，并能在实践中运用，有较强的独立工作能力，以适应毕业后投入四化建设的需要.

连续介质力学是一门综合性极强的力学专业基础课，它把固体、液体、气体这些充满某一空间区域的连续介质统一考虑，得出统一的理论描述和数学表达式，乃至把温度场、电磁场等连续场问题也统一到"连续统"(continuum)的范畴.有趣的是，不少连续统问题目前确已可编制出通用的计算机程序加以数值模拟和分析，显示出强大的潜力.

连续统力学的内容，主要是阐明介质受力变形或运动时的基本规律及相应的数学描述(微分方程边值或初值问题)，同时还要研究介质本身的特性和内在联系，建立所谓本构关系或本构方程(Constitutive equation).对于一般场问题，同样也涉及场控制微分方程和场参数的内在联系.

当然，由于连续统的研究对象极其广泛，相应的控制方程就比较复杂，一般难以找出解析解，而只能借助近代电子计算机和恰当的数值方法作数值模拟近似解.作为课程内容，本书将着重介绍连续统所涉及的介质运动或场平衡的控制微分方程组、本构方程、边界条件等基本理论的推演与描述，并列出一些简单的典型例子，阐明数学表达式的力学与物理含义.此外，本书与已有连续统力学教材的不同之处是，针对近代计算技术和计算方法的迅猛发展，注重于连续统的普遍微分控制方程组离散化为适合计算机求解的形式(代数方程组)所必需的一系列概念、思路，数学手段和技巧，以及若干重要的力学基本原理，从而使学生便于在后续课程中理解有限元法、边界元法的基本理论，为毕业实践和研究生阶段打下坚实的基础.

本书作者于80年代以来为应用数学专业(必修)和计算数学专业及概率统计专业(指定选修)学生教授了十余轮连续统力学课，经多次补充修改完成此稿.第一章至第九章可供三年级本科生80学时讲授使用，第十至十二章供毕业班与研究生阶段参考，并与后续的计算力学课相衔接.对从事力学计算的工程技术人员，本书也可作为参考备用.

下面，我们用表格的形式简要说明连续统力学与各个力学分支之间的关系，以及从工程实际问题建立数学模型到计算分析形成软件的大致关系：

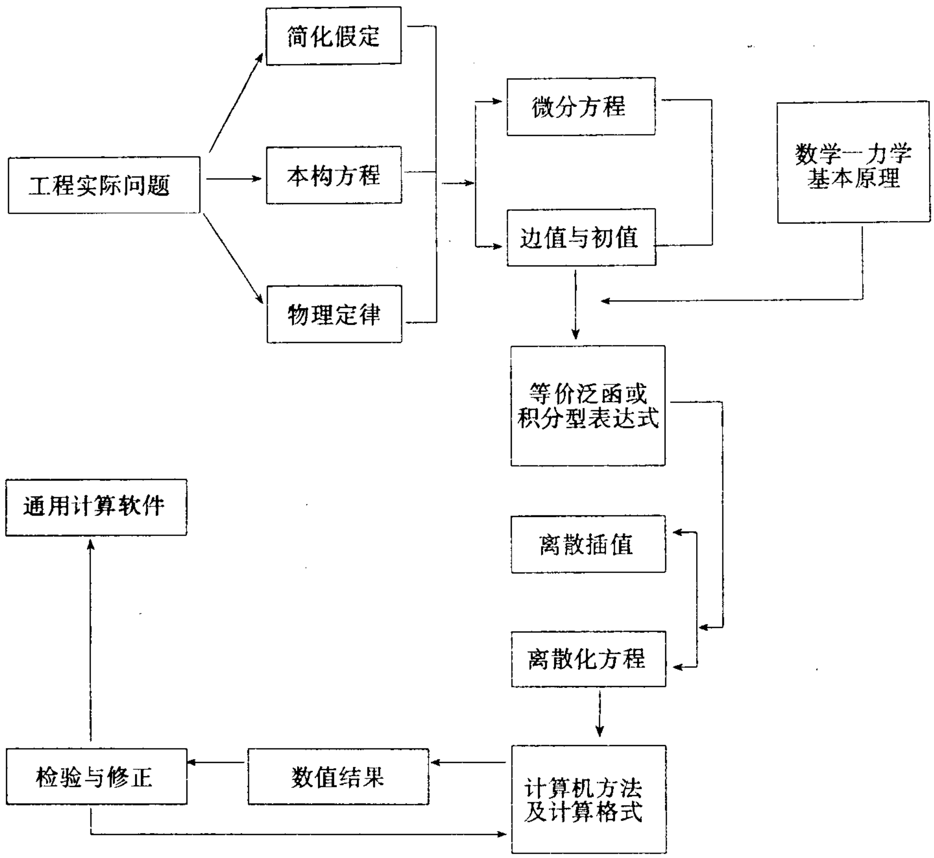
表1. 力学各分支

- 连续统力学
  - 固体力学
    - 理论力学 — 研究质点、杆件系、刚体的平衡与运动
    - 分析力学 — 由若干基本原理推演理论力学的主要结论并引入微分方程描述
    - 材料力学 — 以受力分析为基础，研究材料的强度与刚度，杆系、板。
    - 结构力学 — 复杂杆系、框架、桁架。矩阵分析法。
    - 弹性力学 — 固体连续介质，微分方程描述，应力应变。
    - 塑性力学 — 研究固体连续介质中的大变形与大应变。
    - 复合材料 — 各向异性，特殊本构关系
    - 断裂力学 — 裂纹区应力及强度因子，裂纹扩展。
  - 流体力学
    - 液体(不可压)
      - 水静力学 — 水静压计算
      - 水动力学 — 波浪
    - 流体力学 — 将液体与气体(不可压)作统一研究
    - 低速(亚音速)空气动力学 — 亚临界流动
    - 高速(超音速)空气动力学 — 激波
    - 高超音速气体动力学 — 热效应
    - 粘性流体力学(边界层) — δ小参数展开
    - 稀薄气体力学 — 计及分子运动
    - 等离子及电磁流体力学
  - 一般场
    - 温度场(热力学)
    - 电磁场(电磁力学)

* 理性力学

* 计算力学

表2. 数学模拟过程



几点说明:

一、固体力学出现了复合材料、断裂力学、损伤力学等新分支.

二、计算力学(Computational mechanies)是结合计算机求解的一门新兴学科.

三、理性力学(Rational mechanies)也已成为一门独立的新分支,且研究范围日益广泛,如摄动理论、分叉、奇异、浑沌(Chaos)、孤立波等.

四、近代工程越来越需要同时考虑固体(结构)及其周围流体(液体或气体,内流或外流)的相互作用,称为液一固耦合问题(Fluid-Structure Interaction),成了当代的前沿性研究课题.

最后要说明的一点是:本书目录中 * 号的内容,初学者可予跳过不读.

第一部分　张量分析

第一章　张量基本知识

在现代力学文献中，越来越广泛地采用张量来表示物理量，从而基本方程也用张量方程表述. 从历史发展看，张量(Tensor)是向量的一种推广. 用张量表示的物理量和方程不涉及具体坐标系的选择，因而它确实是一种普遍方程；而且书写紧凑，便于印刷. 当然，在实际运用这些方程时，仍然需要选定一种坐标系，然后写出在该坐标系内的分量(标量)方程，才便于计算或编制程序.

本章主要介绍作为向量推广的(或者说带有向量那种独立于坐标系的特点的)张量以及用张量表示物理量的运算法则；着重介绍张量在笛卡儿直坐标系中的分量以及张量方程在直角坐标系中的分量方程；还介绍在不同坐标系中分量的转换关系.

本章仅限于介绍笛卡儿直角坐标系中的张量分量，并用小写黑体字表示向量，大写黑体字表示张量(二阶以上)，用带上标或下标的量表示分量.

为便于对照理解，一般都同时给出一个量或方程的张量(符号)记法与分量(角标)记法.

1-1　角标记法

为书写统一，将直角坐标系 x,y,z 改写为 x_1、x_2、x_3，且就用下标 i 表示各分量，即 $x_i(i=1,2,3)$. 换言之，在直角坐标系中，张量的角标均将取值 1,2,3(称为角标的变程).

从所周知，采用角标记法可以使多项式、级数等表述简单紧凑，如

$$s=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \tag{1.1}$$

可记作

$$s=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i. \tag{1.2}$$

在张量理论中，还要引进一些符号和规定，使表达式更加紧凑.

一、自由角标与哑标

爱因斯坦最早建议：凡在方程的同一个量或同一项中，有某个角标重复出现两次，就意味着该项需对此角标取值 1,2,3 并求和. 这样一来，在许多情况下就不必再写符号 $\sum\limits_{i=1}^{3}$. 书写和印刷大为便利. 例如：

$$a_{ii}\equiv\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=a_{11}+a_{22}+a_{33}, \tag{1.3}$$

$$a_i x_i \equiv \sum_{i=1}^{3} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3; \tag{1.4}$$

这时角标 i 可以换成其它字母如 k，故称为“哑标”. 而一般的非重复角标称为自由角标.

需注意：

1. $a_{ii} = a_{kk} \equiv a_{11} + a_{22} + a_{33}$ (1.5)

2. 若同一角标并不在同一项中重复出现两次，则并不意味着要求和，如

$$a_i + b_i \not\equiv \sum_{i=1}^{3}(a_i + b_i)$$

3. 同一角标在同一项中出现三次以上，并未规定是否要作求和处理；通常规定不写 $\sum$ 就不求和：

$$a_i b_i x_i \not\equiv \sum_{i=1}^{3} a_i b_i x_i.$$

4. 有物理意义的方程分量形式，等式两边自由角标应保持一致. 例如 i 方向的分量式

$$a_i = b_i + c_i \tag{1.6}$$

$$a_i + b_i c_j d_j = 0 \qquad i = 1,2,3, \qquad j = 1,2,3 \tag{1.7}$$

是合理的，而

$$a_i = b_j \qquad i = 1\sim 3, j = 1\sim 3 \tag{1.8}$$

就不合理. 推而广之，一个方程两边所含自由角标个数(在各项中)应相同.

5. 向量的分量用一个角标表示，张量的分量可用多个角标表示，且自由角标的个数就是对应张量的阶数(rank). 例如：a_i 为一阶张量即向量的分量，a_{ij}为二阶张量(如矩阵)的分量，$a_{ijk}b_k$(i，j 为自由角标)为二阶张量. 以后把 $\boldsymbol{a}$(向量)与 a_i(分量)都称为向量，同样，“张量 a_{ij}”实际上应指张量的分量.

6. 角标记法也适用于求导运算. 例如

$$a_{ij,j} \equiv \sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_3}.$$

这种记法用来表示各种微分算子十分方便，以后再予详述.

例 1. 写出 $a_i b_j s_{ij} i, j = 1\sim 3$ 的展开式.

解：

$$\begin{aligned} a_i b_j s_{ij} = & a_1 b_1 s_{11} + a_1 b_2 s_{12} + a_1 b_3 s_{13} \\ & + a_2 b_1 s_{21} + a_2 b_2 s_{22} + a_2 b_3 s_{23} \\ & + a_3 b_1 s_{31} + a_3 b_2 s_{32} + a_3 b_3 s_{33} \end{aligned}$$

例 2. 已知 $D_{ij} = -D_{ji}$，试简化表达式 $D_{ij} x_i x_j$.

解：先固定 j，按约定的求和方法

$$D_{ij} x_i x_j \equiv D_{1j} x_1 x_j + D_{2j} x_2 x_j + D_{3j} x_3 x_j,$$

其中又有

$$D_{1j} x_1 x_j \equiv D_{11} x_1 x_1 + D_{12} x_1 x_2 + D_{13} x_1 x_3,$$

$$D_{2j} x_2 x_j \equiv D_{21} x_2 x_1 + D_{22} x_2 x_2 + D_{23} x_2 x_3,$$

$$D_{3j} x_3 x_j \equiv D_{31} x_3 x_1 + D_{32} x_3 x_2 + D_{33} x_3 x_3.$$

注意到 $D_{ij} x_i x_j = D_{ij} x_j x_i = -D_{ji} x_j x_i$，易知

$$D_{ij} x_i x_j = 0.$$

二、Kronecker δ 函数和排列算子 ε_{ijk}

在张量运算与张量表达式中经常要用到两个特殊量，分别定义如下.

1. Kronecker δ 函数

它与数学分析中按坐标点位置定义的 Dirac δ 函数稍有不同，即它是按角标值定义的 δ 函数，定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当 } i=j \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } i\neq j \text{ 时}\end{cases}$$

例 3　i,j 的变程为 1～3 时，δ_{ij}的九个元素恰好排列成单位矩阵，故可写作矩阵形式：

$$[\delta_{ij}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[I].$$

注意 δ 函数作用于 $a_m(m=1,2,3)$具有“置换”性，即

$$\delta_{im}a_m=\delta_{i1}a_1+\delta_{i2}a_2+\delta_{i3}a_3=a_i \tag{1.9}$$

因为只有 i 与 1,2,3 中某个值相等时才有意义. 因此，从方程(9)的形式上看，相当于 a 的角标 m 用 i 去置换，这就是 δ_{im}的“置换”作用.

还请注意 $\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3$，$\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik}$，等等.

2. 排列算子 ε_{ijk}

定义

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{当 } i,j,k \text{ 为 } 1,2,3 \text{ 顺排时},\\ -1, & \text{当 } i,j,k \text{ 为 } 1,2,3 \text{ 逆排时},\\ 0, & \text{当 } i,j,k \text{ 中有两个值相等时}.\end{cases}$$

为便于记忆，可将 1,2,3 按顺时针方向排列，则按定义

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{321}=1$$

$$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{321}=\varepsilon_{213}=-1$$

且不难判明

$$\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{jik}=\varepsilon_{jki}\text{，等等}.$$

换言之，若将 ε_{ijk}的两个角标互换一次，就将变号一次，但角标互换两次又变回正值，等等. 因此，也可以说 i,j,k 作偶数次交换时，符号不变，作奇数次交换时则变号.

ε_{ijk}符号的用途很广，利用它可以十分紧凑地写出行列式，向量叉积，力矩，旋度及所谓“箱形积”等，因此应予熟练掌握.

3. ε_{ijk}算子的应用

① 行列式

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k, \tag{1.10}$$

注意这时 i,j,k 均为哑标. 请读者自行展开验证. 推而广之，行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}$$

$$= \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} = - \varepsilon_{ijk} a_{2i} a_{1j} a_{3k}$$
$$= - \varepsilon_{ijk} a_{1j} a_{2i} a_{3k}, \text{等等}. \tag{1.11}$$

因此，相应地有

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$
$$= \varepsilon_{ijk} a_{\alpha i} a_{\beta j} a_{\gamma k} = \begin{vmatrix} a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & a_{\alpha 3} \\ a_{\beta 1} & a_{\beta 2} & a_{\beta 3} \\ a_{\gamma 1} & a_{\gamma 2} & a_{\gamma 3} \end{vmatrix} \tag{1.12}$$

②向量叉积

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \hat{e}_i = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \hat{e}_k \tag{1.13}$$

这里把单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 改记为 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$，以便用角标表示.

③力矩

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \varepsilon_{ijk} x_j F_k \hat{e}_i = \varepsilon_{ijk} x_i F_j \hat{e}_k \tag{1.13a}$$

注意 $\boldsymbol{r}$ 的分量即 x_i.

④旋度

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \hat{e}_i \tag{1.13b}$$

注意行列式表达式中可以出现向量及微分算子.

⑤三个向量的“箱形积”：

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \tag{1.13c}$$

4. ε_{ijk} 与 δ_{ij} 的关系

运用最广的 ε-δ 恒等式是

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$
$$= \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr} + \delta_{iq}\delta_{jr}\delta_{kp} + \delta_{ir}\delta_{kq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jr}\delta_{kq} - \delta_{iq}\delta_{jp}\delta_{kr} - \delta_{ir}\delta_{jq}\delta_{kp} \tag{1.14}$$

以及

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} \tag{1.15}$$

证 由单位矩阵的行列式知

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = 1$$

而由(12)式知

$$\begin{vmatrix} \delta_{1\alpha} & \delta_{1\beta} & \delta_{1\gamma} \\ \delta_{2\alpha} & \delta_{2\beta} & \delta_{2\gamma} \\ \delta_{3\alpha} & \delta_{3\beta} & \delta_{3\gamma} \end{vmatrix} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \cdot 1$$

推而广之，便得(14)式：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

由(14)式令 $k=r$，立即得(15)式：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} \\ &= 3\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp} + \delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq} - 3\delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jq} \\ &= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} \ \text{证毕.} \end{aligned}$$

例 4 $\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{rqs} = -2\delta_{ps}$

证：按(15)式展开有

$$\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{rqs} = \delta_{pq}\delta_{qs} - \delta_{ps}\delta_{qq} = -2\delta_{ps}$$

注意 $\delta_{qq} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$.

再证明 $\varepsilon_{ijk}a_j a_k = 0$

解：按照行列式展开，

$$\varepsilon_{ijk}a_j a_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

实际上，ε_{ijk}是反对称的，即任何两个角标互换时它便反号，而 $a_j a_k$ 是对称的，即 $a_j a_k = a_k a_j$. 因此，此例说明反对称张量与对称张量之“内积”为零.

三、角标运算法则

为使大家熟练掌握角标运算及 ε、δ 算子的应用，下面再对角标运算作一小结.

1. 哑标置换：哑标是用来作求和用的，它可以改成任何字母；自由标则应保证等式左右出现的字母相同. 例如

$$a_i = U_{im}b_m$$

$$b_i = V_{im}c_m \tag{1.16}$$

但将第二式代入第一式之前，应将第二式按需要改写为

$$b_m = V_{mj}C_j$$

则

$$a_i = U_{im}V_{mj}C_j \tag{1.17}$$

这里基本原则是避免出现重复三次以上的角标.

2. 相乘

若 $p = a_m b_m, q = c_m d_m, m = 1 \sim 3$ 则

$$pq = a_m b_m c_n d_n \qquad \text{（共九项）}$$

而不能写成 $a_m b_m c_m d_m$.