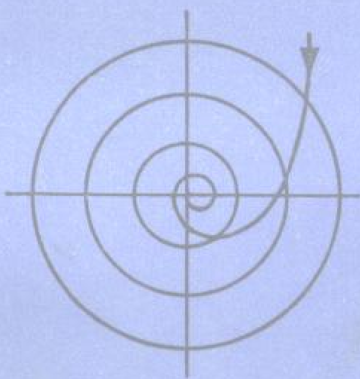
李雅普诺夫直接法在自动控制中的应用

曾癸铨　编著



上海科学技术出版社

李雅普诺夫直接法在自动控制中的应用

曾癸銓 编著

上海科学技术出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了李雅普诺夫直接法及其在非线性系统稳定性分析中的应用。

全书共分九章，内容包括：李雅普诺夫的稳定性概念和主要理论；李雅普诺夫函数的构成法；李雅普诺夫理论的推广；李雅普诺夫直接法在离散时间系统和大系统稳定性分析中的应用以及工业自动控制应用直接法的典型实例。

本书系统性强、取材新颖、举例典型，可供从事自动控制的工程技术人员以及大专院校师生参考。

封面设计 卜允台

李雅普诺夫直接法在自动控制中的应用

曾㻌铨 编著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7.25 字数 157,000

1985 年 2 月第 1 版 1985 年 2 月第 1 次印刷

印数：1—4,800

统一书号：15119·2362 定价：1.15 元

前　言

在控制系统的设计中，人们首先关心的是系统的稳定性问题．不解决系统的稳定性，就谈不上系统的其他品质指标．对于线性时不变系统，稳定性问题已经得到完善的解决．但对于非线性系统，分析系统的稳定性是一个困难的任务．即使一些时变线性系统，虽然也有相应的稳定判据，但这些判据在工程设计中很难使用．

李雅普诺夫(A. M. Ляпунов)关于运动的稳定性理论，特别是他的“直接法”，为非线性系统的稳定性分析提供了一个有效且方便的工具．此外，李雅普诺夫直接法还渗透到近代控制理论的各个方面，象在最佳系统设计、滤波、识别以及自适应系统的设计中，李雅普诺夫的理论都得到广泛的应用．可以说，李雅普诺夫关于运动的稳定性理论已经成为近代控制论的一个坚实基础．要全面介绍这个理论在各方面的应用是困难的．限于篇幅，本书将把重点放在非线性系统的稳定性分析上．因为这是工程中最常遇到的问题，也是其他方面应用李雅普诺夫理论的基础．

本书从李雅普诺夫关于运动的稳定性定义开始，按各种不同的系统介绍了李雅普诺夫直接法的应用，其取材均为近年来的一些新的结果．为了节省篇幅，有关稳定性判据均用定理的形式给出，为了使读者熟悉这方面的一些常用论证方法，本书在证明定理时，对某些典型的论证法也给予必要的注意．在应用李雅普诺夫直接法时，一个关键的问题是寻找系

统的李雅普诺夫函数. 本书主要偏重工程应用，因此在关于李雅普诺夫函数的构成方面，介绍了一些有用且方便的方法. 对于李雅普诺夫理论的推广也作了专门的介绍. 本书还用较大的篇幅介绍了李雅普诺夫理论在非线性大系统稳定性分析中的应用. 作者希望通过本书的介绍，使读者对这个理论有一定了解. 同时能应用这些理论于工程实践之中. 但限于作者的水平，唯恐挂一漏万. 诚恳希望读者批评指正.

关于时延系统的稳定性，已有专门论述，本书不再介绍，有兴趣的读者可参考文献[1]～[5].

在编写过程中，上海自动化学会名誉理事长胡汝鼎教授对原稿提出不少指导性意见，在此致以谢意.

作者　1983 年

目 录

第一章 引 言

§1-1 非线性控制系统的稳定性分析

在现实的工业控制场合中，人们遇到的自动控制系统几乎都是非线性的．我们平常所说的线性系统，实际上都是非线性系统的一种理想化或近似的表达．从最平常的例子看，任何一个实际工作的系统，其部件不可避免地总存在如饱和，死区，磁滞，摩擦等常见的非线性特性．随着自动化程度的提高，对控制系统的品质要求也日益提高，有时还人为地引入各种非线性特性以改善系统品质．当然，在控制系统中存在的各种非线性特性，有本质非线性和弱非线性之分．这就要由系统的实际工作状况决定．但是，绝大部分重要的非线性系统，其包含的非线性特性均是本质非线性的．例如近代控制论中的最短时间控制系统就是属于这一类．控制系统中的非线性特性的存在，主要由下面几个原因所造成：①部件本身不可避免的非线性输入输出关系；②为了改善系统品质，降低造价，人为引入各种非线性特性；③为了达到某种高品质的控制，其控制函数本身就是非线性的．实际上，人们并不是要回避非线性，恰恰相反，大部分均是为了利用非线性特性来设计一个比线性系统更为优良的控制系统．因此，非线性系统的稳定性研究不仅是理论上的兴趣，更重要的是要解决实际生产活动中所遇到的问题．

非线性系统的稳定性分析之所以成为自动控制理论中的

一个难题，就其本质而言，是缺乏一个象线性系统那样有系统的、带有普遍性的、能得到闭形解的稳定性分析方法．由于在非线性系统中，叠加原理并不成立，线性系统所用的那些变换法不能在非线性系统中使用．这就造成在研究方法上和传统的线性系统有很大的差别．一般而言，对于非线性系统，目前我们还没有一个能得到系统方程解的解释办法．这使人们在非线性系统的分析中采用一些更为先进和抽象的数学概念．以探索各种可能的解决途径．因此，从方法本身看，线性和非线性两种系统在稳定性分析方面有明显的不同．

人们经过长期研究，对于处理非线性系统的稳定性问题已经有了一些理论和方法，如相平面法和描述函数法．前者应当说是一种准确的方法，但只能用于二阶系统．高阶系统应用这个方法不仅困难，而且也失去它原先具有的那种直观性．后者即是一种近似法，用于确定非线性系统是否存在限周运动．但这个方法也难于对限周频率作出正确的判断．此外，这两个方法都有下述的共同缺点，虽然人们现在可以借助于电子计算机来解决这两种方法的计算量问题，但是控制系统设计工程师更感兴趣的是系统参数对稳定性的影响问题．因为只有认识系统稳定机制，才能进行参数设置，并以此作为系统设计、调试的依据．但数值计算却没有这方面的明显性．

人们长期以来就希望有一个不直接求解非线性微分方程就能判定非线性系统稳定性的分析方法．这就是目前十分流行和有效的李雅普诺夫直接法．这个方法的发展和应用，应当说是非线性系统理论的一个重大进展．目前李雅普诺夫理论已经成为近代控制论的一个重要组成部分．它在近代控制论中的最优控制，最优估值，滤波和自适应控等方面，起了一个极为重要的角色．因此李雅普诺夫的理论和方法已经成为

近代自动控制系统设计工程师所必不可缺的先进理论和有效工具之一.

最后要指出，虽然李雅普诺夫方法是进行非线性系统分析设计的一个有效和方便的方法．但就整个非线性系统的理论发展来看，目前还有不少问题仍然是科学工作者致力研究的课题.

§1-2 李雅普诺夫直接法的思想

法国数学家庞加莱(Poincar'e)在他的«微分方程所定义的积分曲线»一书中首先应用定性的方法研究微分方程解的稳定性问题.俄国数学家李雅普诺夫在他的文章中也表示过，他所发展的方法也受到庞加莱思想的启发．实际上，在庞加莱之前的一些物理学家在求解力学上的稳定状态时已经发现，如果物体仅受重力的作用，则当其重心位置最低时(即位能最小时)，平衡状态是稳定的．这实质上是这种条件下一个力学系统的平衡状态的稳定判据．它不必求解这个力学系统的微分方程，而仅根据其位能情况就可对平衡状态的稳定性作出结论.下面从力学观点来进一步讨论这个想法，在图1-1中，有三种曲面，图(a)上的小球B当它处于A点时，如果受到某种轻微的扰动，使小球B离开A点，那么从直观上看，小球B再也回不到A点了．在图(b)中，小球B受了轻微的扰动后，它可以在S-S'平面上的任何一点停住．在图(c)中，当小球B受了轻微扰动后，只要扰动幅度不要太大，直观上看，它仍然会回到A点．这些观察显然符合上述的“位能最低点是一个稳定平衡状态”的判据的．因为从力学角度上看，图(a)中的小球B受扰后运动，其动能减少而位能增加．由于摩

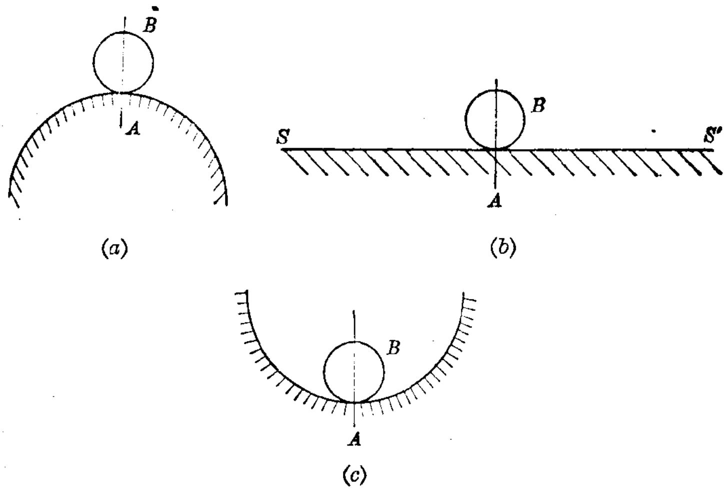


图 1-1 从力学角度来看稳定和不稳定

擦力的作用，这个运动是一个耗散能量的过程，总的贮能不断在减少，则总贮能对时间的变化率是个负数．因此总能量最后应消耗到等于零．如果计算位能是以 A 点作基准的，那么在图(c)的 A 点处，小球的动能和位能之和为零，这是一个最小贮能点．因而它会停留在这点上．对于图(b)的小球运动，当以 S-S' 作为位能基准时，只要小球停止，动能和位能总和为零，它是随意平衡的．而图(a)的情况则不同，A 点不是最小贮能点．所以这个位置对小球 B 来说不是一个稳定的平衡状态．

通过上述的直观说明，一个动态系统(如小球 B 的运动方程)的总能量(这是一个正值量)随时间的变化率是负数时，也就是说它是一个耗能系统时，它最后总是回到它的最小贮能位置上．这样，能量的度量似乎可以作为一个动态系统稳定性的度量了．但是，在系统分析中，并没有那么简单．也不象力学问题那样有明显的动能和位能概念．因此必须把这种

能量的概念一般化．把它从“能量”这个有明确物理意义的概念中抽象出来，使这样一个定性研究方法的思想能应用到那些不能求出具有物理“能量”的更加一般的系统中去．换句话说，我们不应停留在物理概念上来着手解决系统的稳定性问题，而应当从数学的角度来探索这个定性方法的应用．

李雅普诺夫首先给稳定性下了一个精确的数学定义，然后构成一个相似于“能量”的正定泛函．最后判定这个泛函在沿着描述系统的微分方程运动时的导数是否随时间的增长而衰减，也即这个泛函的导数是否为一个负定的泛函，从而对这个系统的稳定性作出结论．以后人们把满足这些条件的这个泛函称为李雅普诺夫函数．如果某个系统方程存在一个李雅普诺夫函数，那可以充分地肯定这个系统是稳定的，而不必去求解描述这个系统的微分方程．这个方法既适用于线性系统，也适用于非线性系统．这就给非线性系统的稳定性分析带来很大的方便．但必须指出，李雅普诺夫的这个方法给出的是系统稳定的充分条件，未必是必要且充分的条件．因此正确地讲，一个稳定的系统一定存在无穷多个李雅普诺夫函数，但是找不到某个特定系统的李雅普诺夫函数并不意味着这个系统是不稳定的．可见，寻找一个系统的李雅普诺夫函数是应用这个定性方法的关键．

李雅普诺夫关于运动稳定性的理论还包含它的第一个方法，有时称为李雅普诺夫第一法，这个方法是一种定量法，它必须求解系统的微分方程，得到特解或通解，用级数的形式将它们表达出来，再在这个基础上研究系统的稳定性．因为要求解微分方程，人们就说这是一种“间接法”，因此，通常就把我们前述的那个定性法相应地叫做“李雅普诺夫直接法”或

"李雅普诺夫第二法"，以和他的第一法相区别. 本书主要介绍"直接法".

§1-3 系统的状态方程

本书在以后的陈述中，对于一个控制系统，一般都直接给出描述它的动态性能的微分方程组. 如何列写一个实际控制系统的微分方程，这在古典控制论中已经是大家熟知的方法了，这里不再赘述. 可是读者可能对描述控制系统的传递函数较熟悉，而对于用状态变数来表达一个控制系统的方法比较生疏，因此我们拟用几句话来对系统的状态方程表达法说明一下.

控制系统的描述不用传递函数或频域特性而用系统内部状态变量来表达，这是近代控制论的一个基础. 这样做对于我们来说至少可以使线性和非线性系统在表达上统一起来. 至于更重要的"状态反馈"等问题，那就不在讨论稳定性的内容中涉及. 我们也不准备深入讨论状态变数的概念. 我们还是用一个具体的例子来说明如何从系统的微分方程或传递函数求得系统状态变数方程的方法.

例 1-1 设一个火箭在地球附近运动，但不计大气阻力的影响，火箭向东运动，扫过一个经度角 θ，它离地球中心的距离为 r，那么这个火箭的运动服从下列微分方程：

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r} &= r(\dot{\theta}+\Omega)^2 - g\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + S\cdot\sin\beta \\ r\ddot{\theta} &= -2\dot{r}(\dot{\theta}+\Omega) + S\cdot\cos\beta \end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

式中 S——火箭发动机在与地平线成 β 角方向上的无量纲推力；

r_0——地球半径；

g——重力加速度；

Ω——地球自转角速度.

在本例中，β是火箭推力角，依靠它来改变轨道，所以β是控制变量. 现在我们作下述变量变换：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \dot{r} \\ x_2 &= \dot{\theta} \\ x_3 &= r \\ x_4 &= \theta \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

那么方程(1-1)可改写成四个一阶方程：

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_3(x_2+\Omega)^2 - g\left(\frac{r_0}{x_3}\right)^2 + S\sin\beta \\ \frac{dx_2}{dt} &= (S/x_3)\cos\beta - 2x_1(x_2+\Omega)/x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1 \\ \frac{dx_4}{dt} &= x_2 \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

这个方程组是非线性的，如果令：

$$f(x_2,\ x_3) = x_3(x_2+\Omega)^2 - g\left(\frac{r_0}{x_3}\right)^2 \tag{1-4}$$

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = \left(\frac{S}{x_3}\right)\cos\beta - \frac{2x_1(x_2+\Omega)}{x_3} \tag{1-5}$$

$$g_1(u) = S\sin\beta \tag{1-6}$$

则(1-3)式可以写成：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}&=0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+f_1(x_2,\ x_3)+g_1(u)\\
\frac{dx_2}{dt}&=0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+f_2(x_1,\ x_2,\ x_3)\\
\frac{dx_3}{dt}&=x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4\\
\frac{dx_4}{dt}&=0\cdot x_1+x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}7)$$

显然利用向量定义，令 x 为系统的状态向量，

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\qquad(1\text{-}8)$$

及

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix}=\dot{x}\qquad(1\text{-}9)$$

u 为控制变量，且

$$u=\beta\qquad(1\text{-}10)$$

那么系统状态变量方程可写成矢量形式：

$$\dot{x}=Ax+F(x)+g(u)\qquad(1\text{-}11)$$

式中：

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\qquad(1\text{-}12)$$

$$F(x)=\begin{bmatrix} f_1(x_2,\ x_3) \\ f_2(x_1,\ x_2,\ x_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1-13}$$

$$g(u)=\begin{bmatrix} g_1(u) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S\cdot\sin\beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1-14}$$

这些关系可直接从(1-7)式中看出。显然，$f(x)$ 为 (1-11)式中的 $Ax+F(x)$之和，即

$$f(x)=Ax+F(x) \tag{1-15}$$

那么系统方程式(1-11)可进一步写成：

$$\dot{x}=f(x)+g(u) \tag{1-16}$$

在本例中，控制矢量 u 和系统的状态矢量 x 是可分的，所以它可写成两个非线性函数之和，当 u 和 x 不可分时，那么系统方程式(1-16)应写成

$$\dot{x}=f(x,\ u) \tag{1-17}$$

若系统方程式(1-17)右边是显含时间变数 t 的，它就是一个时变系统，这时(1-17)式应写成

$$\dot{x}=f(x,\ u,\ t) \tag{1-18}$$

如果 u 是状态变数的函数，那么上式就简写成

$$\dot{x}=f(x,\ t) \tag{1-19}$$

本书以后常用 (1-19) 式作为一个非线性系统的普遍方程式。若在(1-16)式中，$f(x)$和 $g(u)$具有下述形式：

$$f(x)=Ax \tag{1-20}$$

$$g(u)=Bu \tag{1-21}$$

那么系统方程(1-17)就变成