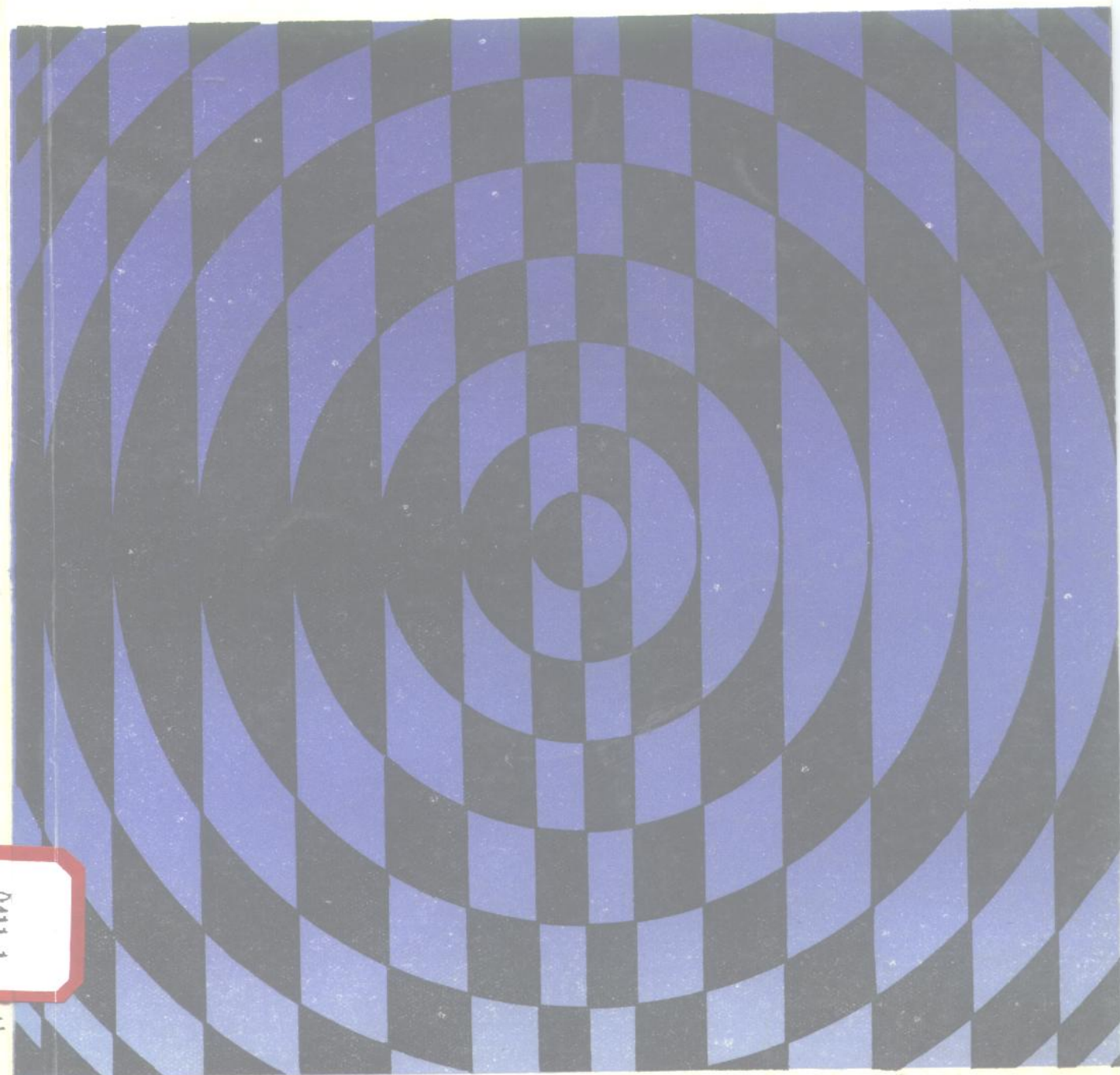


数学物理方法

● 梁銓廷 王向东 编著



重庆大学出版社

数学物理方法

梁銮廷 王向东 编著

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书共分六章,详细讨论了波动方程、热传导方程、弦振动方程、调和方程的基本定解问题的适定性、求解方法和解的性质,并对二阶线性偏微分方程的理论作了分析和总结.每章附有适量的习题.

本书可作为高等学校数学专业及相关专业的教材.

数 学 物 理 方 法

梁鑒廷 王向东 编著

责任编辑 刘茂林 何光杰

*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆后勤工程学院印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:12.5 字数:308千

1995年7月第1版 1995年7月第1次印刷

印数:1—2000

ISBN 7-5624-1014-3/O·117 定价:11.00元

(川)新登字 020 号

前 言

数学物理方法在自然科学以及工程技术中有着极其广泛的应用,又与其他数学分支有着密切的联系。目前在各高等学校数学专业的教学计划中都设置了这门课程,而且许多工科院校的某些专业也往往按不同的深度讲授这一课程的有关内容。无疑,这门课程对于培养学生的数学理论基础与解决实际问题的能力都起着重要的作用。特别是由于现代科学技术的飞速发展,对数学物理方法的理论深度和应用的广度都提出了更高的要求;另一方面,随着数学理论本身的发展,近年来出现了大量简捷而有效的有关数学物理方程的求解方法,这些方法散见于国内外浩如烟海的数学文献之中,只被数学理论研究工作者的所知,在一般的教科书中很少反映;再一方面,由于数学物理方程来源于物理学等自然科学,微分方程本身以及许多定解问题的归结都需要一定的物理知识,有些解决问题的方法及所引入的数学概念,也往往有相应的物理解释,但在已有的教材或参考书中对数学和物理的联系注重不够,至少缺乏现代物理与现代工程技术中的例子。鉴于上述原因,我们想到要编写这样一本书:它集教材和参考书于一身,使有能力的学生有机会学到(或见识到)听课内容以外的其他有实质性差异的内容,增广见识、提高兴趣,更加激发起学习的积极性。因此,本书的编写不局限于大纲规定的范围。但考虑到在目前形势下,综合大学数学系开设的数学物理方程课越来越有被数学物理方法课所代替的趋势,故本书在不削减数学物理方法课程内容的前提下,尽可能保留数学物理方程课程教学大纲中规定的内容,希望学过本书的学生也有足够的理论知识。然而,本书更着重在三类方程的种种解法和比较上。书中所介绍的三类方程的解法不仅多而且都有相当的深度。从我们的自身体验,感觉到凡是自己动手推导出的结论总是易于接受和掌握,因此本书很看重数学推理的严密性。希望学生也能认识到,数学推理不仅是获得所需结论的保证,而且也是加深理解和掌握好内容的重要手段,更是从已知规律认识和发现新东西的途径。本书也起参考书的作用,因此许多必要的知识和某些本书用到的“工具”都以适合本书的需要重新作了介绍,为的是使学生更能顺利地学习本书的有关内容。

本书仅限于讲述三类数学物理方程的解法和有关问题,对复变函数、特殊函数毫不涉及。全书共分六章。第一章主要讨论一维空间中的波动方程的各种解法;第二章讨论了二、三维空间中的波动方程解法;第三、四两章分别研究热传导方程与调和方程;第五章是方程的推导和定解条件,主要讨论了弦振动方程、薄膜的振动、热传导方程和扩散方程、电报方程、流体力学方程和声波方程、弹性波方程、静

电场、稳定电流的电场和它形成的磁场、变换电场、稳定电流的电场和它形成的磁场、变换电场和 Maxwell 方程组等；第六章是二阶线性偏微方程概论。这里顺便指出，关于三维空间波动方程始值问题的解法，在第六章 § 2.4 中还要涉及并用新的观点重新将 Poisson 解推导出来。

显然，本书所介绍的数学物理方程的解法比国内外同类书中所讲述的方法得多，而且我们引进了不少现代方法，这些方法经过处理，学生是能够理解和接受的。另外，在编写过程中，我们尤其注意了数学和物理的联系，书中的例子包含了许多实际问题，这些实际问题来自当今物理和一些科学技术领域。当然，本书的大部分内容有现成的材料可供利用，但也有少数内容，完全是作者自己动手写成的。虽然我们做了不少努力，但由于作者学识、经验都很不足，参考材料也涉猎不多，错误、缺点一定难免，敬请读者给予批评指正。

编 者

1994 年 8 月

目 录

第一章 一维空间中的波动方程	(1)
§ 1 行波法解一维齐次波动方程的始值问题	(1)
§ 2 非齐次波动方程始值问题的解和 Duhamel 原理	(8)
§ 3 直接积分法解一维波动方程的始值问题	(11)
§ 4 特征线法解波动方程的始值问题	(14)
§ 5 Fourier 积分变换法解一维波动方程的始值问题	(17)
§ 6 Laplace 变换解一维波动方程的始值问题	(20)
§ 7 周期函数的 Fourier 级数展开	(24)
§ 8 分离变量法解一维波动方程的混合始值、边值问题	(31)
第二章 二、三维空间中的波动方程	(44)
§ 1 二、三维空间中波动方程始值问题的解	(44)
§ 2 非齐次波动方程始值问题的解	(51)
§ 3 Fourier 积分变换法解三维空间波动方程始值问题	(52)
§ 4 点源辐射解及在解波动方程始值问题中的应用	(55)
§ 5 波动方程始值问题和混合始值、边值问题解的唯一性	(59)
第三章 热传导方程	(66)
§ 1 Fourier 积分变换解热传导方程的始值问题	(66)
§ 2 Fourier 正弦或余弦变换解半无限区间上的热传导方程的 混合始值、边值问题	(70)
§ 3 有限区间上热传导方程的混合始值、边值问题	(80)
§ 4 Laplace 变换解有限区间上热传导方程的混合始值、边值问题	(81)
§ 5 一维热传导方程始值问题的周期解	(85)
§ 6 热传导方程解的最大值原理和唯一性定理	(88)
第四章 调和方程	(90)
§ 1 分离变量法解圆域上调和方程的 Dirichlet 问题	(90)
§ 2 Fourier 积分变换解半平面上调和方程边值问题	(97)
§ 3 调和函数的积分表示式	(98)
§ 4 Green 函数和 Poisson 公式	(102)

§ 5	Green 函数的性质	(107)
§ 6	调和方程第二、第三边值问题	(111)
§ 7	调和函数的性质	(115)
第五章	方程的推导和定解条件	(120)
§ 1	弦振动方程和定解条件	(120)
§ 2	薄膜的振动和定解条件	(124)
§ 3	热传导方程和扩散方程	(127)
§ 4	电报方程	(130)
§ 5	流体力学方程和声波方程	(132)
§ 6	弹性波方程	(136)
§ 7	静电场	(141)
§ 8	稳定电流的电场	(144)
§ 9	稳定电流形成的磁场	(147)
§ 10	交变电磁场和 Maxwell 方程组	(150)
第六章	二阶线性偏微分方程概论	(158)
§ 1	二阶方程的分类	(158)
§ 2	二阶方程的特征理论	(165)
§ 3	推广的 Green 公式及应用	(172)
§ 4	三类方程的总结	(179)
	习题	(185)
	参考文献	(192)

第一章 一维空间中的波动方程

§ 1 行波法解一维齐次波动方程的始值问题

无限长均匀弦的自由振动(以及无限长杆的自由纵振动、无限长理想传输线上电流和电压变化等)归结为解一维齐次波动方程的始值问题(也称 Cauchy 问题),即解以下问题

$$\begin{cases} \square u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (1)$$

其中, a 是常数(下面即将看到, 它有明确的物理意义, 即 a 是由问题(1)确定的波的传播速度).

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

为了求解问题(1), 把方程表示为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$$

并且引入变换

$$\xi = x - at, \eta = x + at$$

利用复合函数求导法则, 即得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(-a) + \frac{\partial u}{\partial \eta} a$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = -2a \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\square u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-2a \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = -4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

后者的解(可通过分别对 ξ, η 求积一次得到)有如下形式

$$u(x, t) = F(\xi) + G(\eta) = F(x - at) + G(x + at) \quad (2)$$

其中, F, G 分别是其自变量的二次连续可微函数. 为了得到问题(1)的解, 需把函数 F, G 的具体形式确定出来, 为此, 利用初始条件

$$\varphi(x) = u|_{t=0} = [F(x - at) + G(x + at)]_{t=0} = F(x) + G(x) \quad (3)$$

$$\psi(x) = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}(F(x - at) + G(x + at))|_{t=0} = -aF'(x) + aG'(x)$$

经过积分一次, 得

$$\frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + C = -F(x) + G(x) \quad (C \text{ 为积分常数}) \quad (4)$$

联合式(3)、(4)可以解出

$$2F(x) = \varphi(x) - \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - C$$

$$2G(x) = \varphi(x) + \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + C$$

由此可得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x - at) + G(x + at) \\ &= \frac{1}{2} \varphi(x - at) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)通常称为 D'Alembert 公式。

结果分析 从以上求解过程可见, 如果式(1)的解存在, 它一定由式(5)表示出来, 因此解一定是唯一的。其次, 如果初始条件 $\varphi \in C^2, \psi \in C^1$, 那么由式(5)给出的 $u \in C^2$ 很容易被验证满足齐次波动方程和满足初始条件, 亦即式(5)的确是式(1)的解。从公式(5)又可以直接看出, 解 u 连续依赖于初始条件 φ 和 ψ 。

式(2)可以看作是一维齐次波动方程的通解, 物理上它表示两组行波的迭加。事实上 $u_1 = F(x - at)$ 表示在 x 轴正方向上传播的波, 波速为 a , 并且在传播过程中波的形状不变(这样的波称为行波), 后者可以这样看出: 代换 $\xi = x - at$, 那么波形为 ξu_1 平面上的曲线

$$u_1 = f(\xi)$$

后者不依时间的变化而改变。同时, ξu_1 平面相对于 xu_1 平面以 a 为速度向 x 轴的正向移动。同理, $u_2 = G(x + at)$ 表示在 x 轴负方向上以波速 a 传播的行波。这样, 齐次波动方程的通解可以表示为两组行波的迭加。

从式(5)的形状可见, 在 (x, t) 处, u 值要由 x 轴上的区间 $[x_0, x_1]$ 上的初始数据来决定, 其中

$$x_0 = x - at, \quad x_1 = x + at \quad (6)$$

这个区间称为在 (x, t) 处 u 值的依赖区域, 见图 1。从几何上看 x_0, x_1 分别是直线

$$x - at = \text{const} \quad \text{和} \quad x + at = \text{const} \quad (7)$$

和 x 轴的交点。

由式(7)给出的曲线族(其实是直线族)称为波动方程的特征线。和式(2)联系起来可知, 行波 $u_1 = F(x - at)$ 实际上是沿着特征线 $x - at = \text{const}$ 传播的; 同样, $u_2 = G(x + at)$ 则是沿着特征线 $x + at = \text{const}$ 传播的。

当在 x 轴上的区间 $[x_0, x_1]$ 上给出初始数据, 那么由式(5)可见, 只要 (x, t)

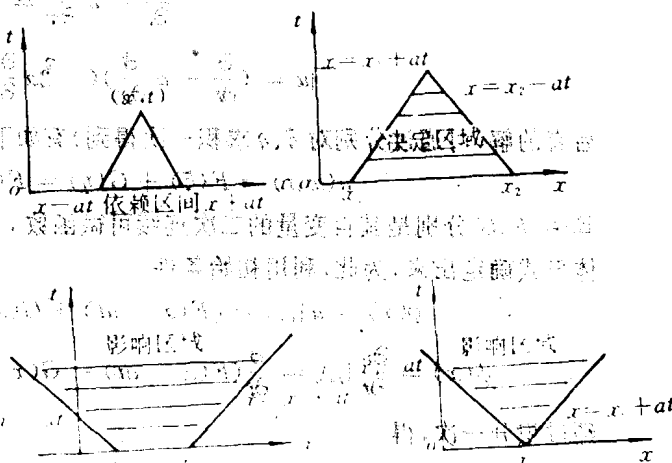


图 1 依赖区域、决定区域和影响区域

满足

$$x_0 \leq x - at \leq x + at \leq x_1 \quad (8)$$

那么式(1)的解 u 在 (x, t) 处的值就完全确定了. 因此, 式(8)称为由 x 轴上的初值区间 $[x_0, x_1]$ 确定的(式(1)的解)决定区域. 从几何上看, 式(8)是在 xt 平面上通过 x 轴的点 $(x_0, 0)$ 的特征线 $x - at = x_0$ 和通过 x 轴上的点 $(x_1, 0)$ 的特征线 $x + at = x_1$ 以及 x 轴所围成的三角形区域.

当在 x 轴上的区间 $[x_0, x_1]$ 上给出的初值有改变时, 根据式(5), 只要 $[x - at, x + at]$ 和 $[x_0, x_1]$ 有非空的交时, 那么式(1)的解 u 在 (x, t) 处的值也要随之发生变化. 因此, x, t 平面上的区域

$$x_1 \geq x - at, x_0 \leq x + at \quad (9)$$

称为问题(1)的解(因 x 轴上初始数据的区间 $[x_0, x_1]$ 上初始数据变化而受到影响)的影响区域. 从几何上看, 式(9)所决定的区域是由过 $(x_0, 0)$ 点的特征线 $x_0 = x + at$ 和过 $(x_1, 0)$ 点的特征线 $x_1 = x - at$ 和 x 轴所围成的区域, 如图 1 所示. 当 x_0, x_1 相同时, 式(9)成为

$$x - at \leq x_0 \leq x + at \quad (10)$$

它是通过 $(x_0, 0)$ 点的两条特征线 $x \pm at = x_0$ 所围成的区域, 并可看作是一点 $(x_0, 0)$ 的影响区域.

作为这些概念的一个直接应用, 下面求解固定端点的半无限长均匀弦的自由振动. 这归结为求解下面的始值、边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (t > 0, 0 < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) & (0 \leq x < +\infty) \\ u|_{x=0} = \alpha(t) & (t > 0) \end{cases} \quad (11)$$

根据前面的分析, 在 $x \geq at$ 的范围, 式(11)的解完全由初始数据来决定, 并由 D'Alembert 公式来表示, 即

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \quad (x \geq at) \quad (12)$$

特别当 $x=at$ 时, 有

$$u(at, t) = \frac{1}{2} [\varphi(0) + \varphi(2at)] + \frac{1}{2a} \int_0^{2at} \psi(\xi) d\xi \equiv \beta(t) \quad (13)$$

为已知. 下面只需确定问题(1)在 $0 \leq x < at$ 范围的解. 这个解应该由(2)来表出. 用 $x=0$ 和 $x=at$ 代入, 根据式(11)中的相应条件和(13), 有

$$\alpha(t) = u(x, t)|_{x=0} = F(-at) + G(at)$$

$$\beta(t) = u(at, t) = F(0) + G(2at)$$

由此解得

$$F(-\xi) = F(0) + \alpha\left(\frac{\xi}{a}\right) - \beta\left(\frac{\xi}{2a}\right)$$

$$G(\xi) = \beta\left(\frac{\xi}{2a}\right) - F(0)$$

从而

$$u = F(x - at) + G(x + at)$$

$$\begin{aligned}
&= a\left(\frac{at-x}{a}\right) - \beta\left(\frac{at-x}{2a}\right) + \beta\left(\frac{at+x}{2a}\right) \\
&= a\left(\frac{at-x}{a}\right) + \frac{1}{2}[\varphi(at+x) - \varphi(at-x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(\xi) d\xi \quad (0 \leq x < at) \quad (14)
\end{aligned}$$

式(12)和式(14)一起给出式(11)的解答.

特别, 当 $\alpha(t) \equiv 0$, 得到端点固定的半无限长均匀弦的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (t > 0, 0 < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) & (0 < x < +\infty) \\ u|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

的解为

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}(\varphi(at+x) - \varphi(at-x)) + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(\xi) d\xi & (0 \leq x < at) \\ u = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi & (x \geq at) \end{cases} \quad (16)$$

后者也可以通过开拓 u 到负实轴上来得到. 事实上, 设想用某种合理方式把 u 开拓为在整个 $-\infty < x < +\infty$ 上定义并满足

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (t > 0, -\infty < x < +\infty)$$

经过开拓, 初始值取为

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \Phi(x), u_t|_{t=0} = \Psi(x) \\ \text{当 } x > 0 \text{ 时, } \Phi(x) = \varphi(x), \Psi(x) = \psi(x) \\ \text{当 } x < 0 \text{ 时, } \Phi(x), \Psi(x) \text{ 待定} \end{cases} \quad (17)$$

开拓后的解应由 D'Alembert 公式给出, 即

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}[\Phi(x-at) + \Phi(x+at)] \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (18)$$

后者应满足条件

$$\begin{aligned} 0 = u|_{x=0} &= \frac{1}{2}[\Phi(-at) + \Phi(at)] \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \Psi(\xi) d\xi \quad (t > 0) \end{aligned}$$

由此可见, 如果取开拓函数满足

$$\Phi(-x) = -\Phi(x), \Psi(-x) = -\Psi(x)$$

亦即

$$\Phi(x) = -\varphi(-x), \Psi(x) = -\psi(-x) \quad (x < 0) \quad (19)$$

那么就可得到式(15)的解, 并且根据式(17)、(18)、(19)可再次得到式(16).

用类似方法可以解有限弦的自由振动问题. 后者归结为解如下的始值、边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (t > 0, 0 < x < l) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) & (0 < x < l) \\ u|_{x=0} = \alpha(t), u|_{x=l} = \beta(t) & (t > 0) \end{cases} \quad (20)$$

把求解区域 $t > 0, 0 < x < l$ 用特征线划分为不同的区域, 如图 2 所示.

在区域 I 上解的表示式直接由 D'Alembert 公式给出. 在区域 II 上的解前面也已得到了(参见式(14)). 至于在区域 III 上的解可以通过下面的平行四边形法则来得到, 即

$$u(M) + u(M_0) = u(M_1) + u(M_2) \quad (21)$$

其中, M, M_0 和 M_1, M_2 分别是由波动方程的特征线构成的平行四边形两对对顶顶点. 式(21)可由式(2)导出.

两种均匀材料构成的半无限弦衔接成的无限长弦的自由振动可归结为解下面的问题

$$\begin{cases} u = u_1 & (x < 0), u = u_1 & (x > 0) \\ u_{1t} - a_1^2 u_{1xx} = 0 & (t > 0, -\infty < x < 0) \\ u_{1t} - a_1^2 u_{1xx} = 0 & (t > 0, 0 < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \varphi(x) = \varphi_1(x) (x < 0), \varphi(x) = \varphi_1(x) (x > 0) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \psi(x) = \psi_1(x) (x < 0), \psi(x) = \psi_1(x) (x > 0) \\ u_1|_{x=0} = u_1|_{x=0} & (t > 0) \\ T_1 u_{1x}|_{x=0} = T_2 u_{1x}|_{x=0} & (t > 0) \end{cases} \quad (22)$$

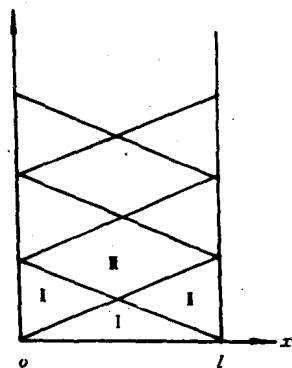


图 2

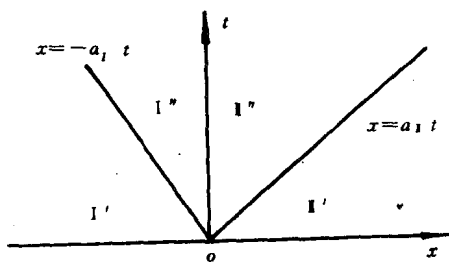


图 3

上面最后两个条件为在衔接点 $x=0$ 处的衔接条件, T_1, T_2 分别为两种弦的张力. 如图 3 所示, 过原点作特征线 $x = -a_1 t$ 和 $x = a_1 t$, 连同坐标轴一起将上半 xot 平面分为 I', I'', I', I'' 四部分区域. I' 和 I'' 分别为负、正半轴上初始数据的决定区域, 解可用 D'Alembert 公式给出. 于是

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} [\varphi_1(x + a_1 t) + \varphi_1(x - a_1 t)] \\ + \frac{1}{2a_1} \int_{x-a_1 t}^{x+a_1 t} \psi_1(\xi) d\xi & (x \leq -a_1 t) \\ u_1 = \frac{1}{2} [\varphi_2(x + a_1 t) + \varphi_2(x - a_1 t)] \\ + \frac{1}{2a_1} \int_{x-a_1 t}^{x+a_1 t} \psi_1(\xi) d\xi & (x \geq a_1 t) \end{cases} \quad (23)$$

并且

$$\begin{cases} \alpha(t) = u_1(-a_1 t, t) = \frac{1}{2} [\varphi_1(0) + \varphi_1(-2a_1 t)] \\ + \frac{1}{2a_1} \int_{-2a_1 t}^0 \psi_1(\xi) d\xi \\ \beta(t) = u_1(a_1 t, t) = \frac{1}{2} [\varphi_2(2a_1 t) + \varphi_2(0)] \\ + \frac{1}{2a_1} \int_0^{2a_1 t} \psi_1(\xi) d\xi \end{cases} \quad (24)$$

为已知. 为得到在 I'' 和 I'' 区上的解, 根据式(2)有

$$\begin{aligned} u_1 &= F_1(x - a_1 t) + G_1(x + a_1 t) & \text{在 I'' 区域} \\ u_1 &= F_2(x - a_1 t) + G_2(x + a_1 t) & \text{在 I' 区域} \end{aligned} \quad (25)$$

为确定出 $F_i, G_i (i=1,2)$, 利用衔接条件和式(24)给出

$$\begin{cases} \alpha(t) = F_1(-2a_1 t) + G_1(0) \\ \beta(t) = F_2(0) + G_2(2a_1 t) \\ F_1(-a_1 t) + G_1(a_1 t) = F_2(-a_1 t) + G_2(a_1 t) \\ T_1[F_1'(-a_1 t) + G_1'(a_1 t)] = T_2[F_2'(-a_1 t) + G_2'(a_1 t)] \end{cases} \quad (26)$$

将式(26)中最末一个式子积分一次并代换

$$\xi = a_1 t, \quad \eta = a_1 t \quad (27)$$

由式(26)继续得

$$\begin{cases} G_1(\xi) - G_1(0) - F_2(-\eta) + F_2(0) = \beta(\frac{\eta}{2a_1}) - \alpha(\frac{\xi}{2a_1}) \\ \frac{T_1}{a_1}(G_1(\xi) - G_1(0)) + \frac{T_1}{a_1}(F(-\eta) - F(0)) \\ = \frac{T_1}{a_1}[\beta(\frac{\eta}{2a_1}) - \beta(0)] + \frac{T_1}{a_1}[\alpha(\frac{\xi}{2a_1}) - \alpha(0)] \end{cases}$$

解此联立方程,得

$$\begin{cases} G_1(\xi) - G_1(0) = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{T_1}{a_1} [\beta(\frac{\eta}{2a_1}) - \alpha(\frac{\xi}{2a_1})] \right. \\ \quad \left. + \frac{T_1}{a_1} [\alpha(\frac{\xi}{2a_1}) - \alpha(0)] + \frac{T_1}{a_1} [\beta(\frac{\eta}{2a_1}) - \beta(0)] \right\} \\ F_2(-\eta) - F_2(0) = \frac{1}{\Delta} \left\{ -\frac{T_1}{a_1} [\beta(\frac{\eta}{2a_1}) - \alpha(\frac{\xi}{2a_1})] \right. \\ \quad \left. + \frac{T_1}{a_1} [\alpha(\frac{\xi}{2a_1}) - \alpha(0)] + \frac{T_1}{a_1} [\beta(\frac{\eta}{2a_1}) - \beta(0)] \right\} \end{cases} \quad (28)$$

其中, $G_1(0)$ 和 $F_2(0)$ 可以取任何实数.

$$\Delta = \frac{T_1}{a_1} + \frac{T_1}{a_1} \quad (29)$$

为简单取 $G_1(0) = F_2(0) = 0$, 然后由式(26)、(27)和式(28)得

$$\begin{aligned} F_1(-a_1 t) &= \alpha(\frac{t}{2}) \\ G_1(a_1 t) &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{T_1}{a_1} [\beta(\frac{t}{2}) - \alpha(\frac{t}{2})] + \frac{T_1}{a_1} [\alpha(\frac{t}{2}) - \alpha(0)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{T_1}{a_1} [\beta(\frac{t}{2}) - \beta(0)] \right\} \\ F_2(-a_1 t) &= \frac{1}{\Delta} \left\{ -\frac{T_1}{a_1} [\beta(\frac{t}{2}) - \alpha(\frac{t}{2})] \right. \\ &\quad \left. + \frac{T_1}{a_1} [\alpha(\frac{t}{2}) - \alpha(0)] + \frac{T_1}{a_1} [\beta(\frac{t}{2}) - \beta(0)] \right\} \\ G_2(a_1 t) &= \beta(\frac{t}{2}) \end{aligned}$$

$$u_1 = F_1(x - a_1 t) + G_1(x + a_1 t) = \alpha\left(\frac{a_1 t - x}{2a_1}\right) + \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{T_1}{a_1} \left[\beta\left(\frac{a_1 t + x}{2a_1}\right) - \alpha\left(\frac{a_1 t + x}{2a_1}\right) \right] + \frac{T_1}{a_1} \left[\alpha\left(\frac{a_1 t + x}{2a_1}\right) - \alpha(0) \right] + \frac{T_1}{a_1} \left[\beta\left(\frac{a_1 t + x}{2a_1}\right) - \beta(0) \right] \right\} \quad (-a_1 t < x \leq 0) \quad (30)$$

$$u_1 = F_2(x - a_1 t) + G_2(x + a_1 t) = \beta\left(\frac{a_1 t + x}{2a_1}\right) + \frac{1}{\Delta} \left\{ -\frac{T_1}{a_1} \left[\beta\left(\frac{a_1 t - x}{2a_1}\right) - \alpha\left(\frac{a_1 t - x}{2a_1}\right) \right] + \frac{T_1}{a_1} \left[\alpha\left(\frac{a_1 t - x}{2a_1}\right) - \alpha(0) \right] + \frac{T_1}{a_1} \left[\beta\left(\frac{a_1 t - x}{2a_1}\right) - \beta(0) \right] \right\} \quad (0 \leq x < a_1 t)$$

Δ 仍由式(29)给出. 考虑到

$$\alpha(0) = \varphi_1(0) = u_1(0,0) = u_1(0,0) = \varphi_1(0) = \beta(0)$$

将式(24)代入式(30), 即得

$$\left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \varphi_1(x - a_1 t) + \frac{1}{2a_1} \int_{x-a_1 t}^0 \psi_1(\xi) d\xi + R_{12} \left[\frac{1}{2} \varphi_1(-(x + a_1 t)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2a_1} \int_{-(x+a_1 t)}^0 \psi_1(\xi) d\xi \right] + (1 + R_{21}) \left[\frac{1}{2} \varphi_1\left(\frac{a_1}{a_1}(x + a_1 t)\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2a_1} \int_0^{a_1(x+a_1 t)} \psi_1(\xi) d\xi \right] \quad (-a_1 t < x \leq 0) \\ u_1 &= \frac{1}{2} \varphi_1(a_1 t + x) + \frac{1}{2a_1} \int_0^{a_1 t + x} \psi_1(\xi) d\xi \\ &\quad + R_{21} \left[\frac{1}{2} \varphi_1(a_1 t - x) + \frac{1}{2a_1} \int_0^{a_1 t - x} \psi_1(\xi) d\xi \right] \\ &\quad + (1 + R_{12}) \left[\frac{1}{2} \varphi_1\left(\frac{a_1}{a_1}(x - a_1 t)\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2a_1} \int_{\frac{a_1}{a_1}(a_1 t - x)}^0 \psi_1(\xi) d\xi \right] \quad (0 \leq x < a_1 t) \end{aligned} \right. \quad (31)$$

其中

$$R_{12} = \frac{\frac{T_1}{a_1} - \frac{T_1}{a_1}}{\frac{T_1}{a_1} + \frac{T_1}{a_1}} = -R_{21} \quad (32)$$

为了解释式(31)的意义, 现考虑式(22)的一种特殊情形:

$$\begin{cases} \psi_1(x) = -a_1 \varphi_1'(x) & (x < 0) \\ \varphi_1(x) = \psi_1(x) = 0 & (x > 0) \end{cases} \quad (33)$$

那么根据式(23)和式(31)得到对应始值条件(33)情况下, 式(22)的解为(注意 $\varphi_1(0) = \varphi_1(0) = 0$)

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(x - a_1 t) & x \leq -a_1 t \\ u_1 = \varphi_1(x - a_1 t) + R_{12}\varphi_1(-(x + a_1 t)) & -a_1 t < x \leq 0 \\ u_1 = (1 + R_{12})\varphi_1\left[\frac{a_1}{a_2}(x - a_1 t)\right] & 0 \leq x < a_1 t \\ u_1 = 0 & x \geq a_1 t \end{cases} \quad (34)$$

式(34)右端第一个式子表示,在 I' 区只有初始扰动产生的直达波,并且是右行波,这是从扰动源产生的波尚未达到两种弦的衔接点(两种介质的分界面)前仅有的波. 在 I'' 区同时存在两种波,其中式(34)第二个式子的第一项表示的是直达波,是由初始扰动源沿着特征线 $x - a_1 t = \text{const}$ 传过来的波;第二项则是表示从另外的初始扰动源出发的波,传到界面($x=0$)后,经过一次反射,再折返第一种介质中并沿着特征线 $x + a_1 t = \text{const}$ 传播的波,称反射波. 系数 R_{12} 表示从第 I 种介质到第 II 种介质的反射系数. 式(34)第三个式子表示在 I' 区,只有透射波,而 $(1 + R_{12})$ 则为由第 I 种介质到第 II 种介质的透射系数, I' 区则是未受扰动的区域. 下面给出其示意图:

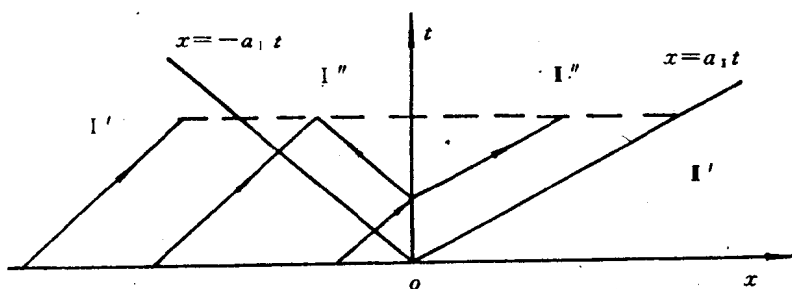


图 4 解释式(34)意义的示意图

I' 区—仅有初始扰动产生的直达波; I'' 区—同时存在直达波和反射波;
I'' 区—仅有透射波; I' 区—没有波到达

回到一般的情形,问题(22)的解(23)、(31)表示,在 I' 和 I' 区,仅有初始扰动产生的直达波;在 I'' 区同时存在三种波,一是由介质 I 中的初始扰动传来的波(直达波);二是由介质 I 中的初始扰动传来的波到达界面后,经过界面的反射返回介质 I 中的波(反射波);三是由介质 II 中的初始扰动传来的波到达界面后,由第 II 介质透入第 I 介质的波(透射波). 同样,在 I'' 区同时存在三种波:直达波、反射波和透射波.

§ 2 非齐次波动方程始值问题的解和 Duhamel 原理

考虑非齐次波动方程的始值问题

$$\begin{cases} \square u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) & (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases} \quad (1)$$

由于方程和定解条件都是线性的,所以可把问题(1)的解 u 表示为

$$u = u_1 + u_2$$

其中 u_1 和 u_2 分别是下面问题的解

$$\begin{cases} \square u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases} \quad (1)'$$

$$\begin{cases} \square u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) & (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 & (-\infty < x < +\infty) \end{cases} \quad (1)''$$

问题(1)'的解前面已研究过, 现只关心问题(1)''的解. 它可以归结为齐次波动方程的始值问题, 这样的处理方法称为齐次化原理或 Duhamel 原理.

设 $w = w(x, t; \tau)$ 是下面问题

$$\begin{cases} \square w = w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0 & (t > \tau, -\infty < x < +\infty) \\ w|_{t=\tau} = 0, w_t|_{t=\tau} = f(x, \tau) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases} \quad (2)$$

的解, 那么

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t, \tau) d\tau \quad (3)$$

给出问题(1)''的解.

事实上, 如 u 由式(3)给出, 那么

$$u|_{t=0} = \int_0^0 w(x, t, \tau) d\tau|_{t=0} = 0$$

$$\begin{aligned} u_t|_{t=0} &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t w(x, t, \tau) d\tau \right]_{t=0} \\ &= [w(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} w(x, t, \tau) d\tau]_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

利用了式(2)中的始值条件. 以上结果表示, u 满足(1)''中的始值条件, 剩下要验证 u 满足式(1)''中的方程. 考虑到 w 满足式(2), 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= w(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x, t, \tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x, t, \tau) d\tau \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial w(x, t, t)}{\partial t} + \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t, \tau) d\tau \\ &= f(x, t) + \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t, \tau) d\tau \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t, \tau) d\tau \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \square u &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) + \int_0^t \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t, \tau) \right] d\tau = f(x, t) \end{aligned}$$

这样 u 的确是问题(1)''的解.

代换 $t' = t - \tau$, 那么式(2)可改写为

$$\begin{cases} w_{t't'} - a^2 w_{xx} = 0 & (t' > 0, -\infty < x < +\infty) \\ w|_{t'=0} = 0, w_{t'}|_{t'=0} = f(x, \tau) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

由 D'Alembert 公式给出

$$w = \frac{1}{2a} \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(\xi, \tau) d\xi = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \quad (4)$$

将式(4)代入式(3),得问题(1)"的解

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \\ &= \frac{1}{2a} \iint_G f(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

$$G: \{0 < \tau < t, |\xi - x| < a(t - \tau)\}$$

在几何上, G 是 $\xi\tau$ 平面上通过 (x, t) 点的两条特征线和 ξ 轴所围成的三角形区域.

下面给出式(3)的一个推导. 为此要利用 $\delta(x)$ 函数:

$$\delta(x) = 0 \text{ 当 } x \neq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

把 $f(x, t)$ 表示为

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_0^{+\infty} f(x, \tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (6)$$

根据式(1)"的力学意义, $f(x, t)$ 表示外力项. 那么式(6)表示外力项 $f(x, t)$ 可以考虑为瞬时力

$$f(x, \tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

的总和. 对应每一瞬时 τ , 上述瞬时力造成的振动记为 $w(x, t, \tau) d\tau$, 那么总的振动应是所有这些 $w(x, t, \tau) d\tau$ 的总和, 即

$$u = \int_0^{+\infty} w(x, t, \tau) d\tau \quad (7)$$

但是当 $\tau > t$ 时, 对应 τ 的瞬时力在时刻 $t(t < \tau)$ 还未起作用, 因此可以认为相应的 w 满足

$$w(x, t, \tau) = 0 \quad \tau > t \text{ 时}. \quad (8)$$

考虑到 w 作为位移关于 t 为连续, 所以由式(7)继续得

$$w(x, t, t) = 0 \quad (9)$$

联合式(7)、(8)给出式(3). 由式(3)出发, 重复前面的推导, 给出

$$\frac{\partial u}{\partial t} = w(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x, t, \tau) d\tau \quad (10)$$

$$\square u = \frac{\partial w}{\partial t}(x, t, t) + \int_0^t \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t, \tau) - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t, \tau) \right] d\tau \quad (11)$$

联系式(8)、(9)、(10)、(11), 为使 u 满足(1)", 必需要求 w 满足式(2). 这正是要作的推导.

顺便指出, 上述齐次化原理和常微分方程中的常数变易法十分类似. 为解下面的非齐次常微分方程始值问题

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + \beta(t)y = f(t) \\ y|_{t=0} = y'|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (t > 0) \quad (12)$$

如果已知对应的齐次方程

$$z'' + a(t)z' + \beta(t)z = 0 \quad (13)$$

的通解为

$$z = C_1 Z_1(t) + C_2 Z_2(t)$$

其中 C_1, C_2 是任意常数, $Z_1(t), Z_2(t)$ 为式(13)的两个线性无关解. 那么式(12)的解可以表示为

$$y = C_1(t)Z_1(t) + C_2(t)Z_2(t)$$