

现代控制系统理论小丛书

# 线性控制系统理论在 惯性导航系统中的应用

关肇直 主编

科学出版社

现代控制系统理论小丛书

# 线性控制系统理论在惯性 导航系统中的应用

关肇直 主编

王思平 崔毅 编著

科学出版社

1984

## 内 容 简 介

本书是《现代控制系统理论》小丛书之一。这套小丛书介绍了现代控制系统理论的各个部分，并着重说明这种理论是如何由工程实践的需要而产生，怎样应用它来解决工程设计中的实际问题。

本书主要介绍线性系统理论和卡尔曼滤波在惯性导航系统设计中的应用。全书共分六章：第一章和第二章主要介绍惯性导航系统的基本原理和误差分析；第三章介绍线性系统的基本理论；第四章用初等方法介绍卡尔曼滤波；第五章讨论惯性导航系统初始对准方案的设计；第六章用卡尔曼滤波讨论组合导航问题。其中第五章和第六章都是作者多年来工作的总结。

本书可供从事惯性导航和控制理论的工程技术人员参考，也可作为高等院校有关专业的高年级学生、研究生和教师的参考书。

### 现代控制系统理论小丛书 线性控制系统理论在惯性 导航系统中的应用

关肇直 主编

王恩平 崔毅 编著

责任编辑 刘兴民 袁放尧

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1984年2月第一版 开本：787×1092 1/32

1984年2月第一次印刷 印张：8 1/2

印数：0001—2,950 字数：189,000

统一书号：15031·550

本社书号：3394·15-8

定价：1.35 元

## 现代控制系统理论小丛书序言

在五十年代末六十年代初,在工程实践的基础上,特别是在空间技术等方面的实践基础上,自动控制理论发展到以状态变量为标志的现代控制理论的阶段。这种新的理论对于控制系统的性能提供了更深入的认识,使得在实践中发现的一些现象得到更好的说明。这些理论成果在以往十几年当中又在许多空间技术与航海、航空的型号设计中得到了应用,受到了实践的检验。

工程实践迫切需要发展理论,而一些新技术,特别是计算技术与现代数学的方法使现代控制理论的发展成为可能。为了控制更复杂的系统,并提高控制精度,数字控制逐渐代替模拟装置。这主要是利用了数字电子计算机,同时有赖于新的数学的描述与方法。

解放以来,我国科学技术得到迅速发展。我国人造地球卫星的发射与回收的成功以及其它尖端技术上的巨大成就都表明我国的控制技术已经达到较高的水平。我们应当本着“精益求精”的精神,使利用数字电子计算机来控制的这种先进技术更广泛地应用到各种有关的工程技术中去,并在工程实践中不断总结提高。我们撰写这一套《现代控制系统理论》小丛书,就是为了介绍现代控制系统理论的各个部分,并着重说明这种理论怎样由工程实践的需要而产生,又怎样用来解决工程设计中的实际问题。

这套小丛书,理论与实际并重。从每一种书来说,或偏重基础理论的阐述,但也给出应用的例子;或偏重于一项工程问

题，但也把它放在坚实的理论基础之上。本丛书之所以叫做“小丛书”，主要是指每种书的篇幅小，而不是指通俗普及性小册子。本书主要是为从事控制理论研究的科研工作者和工程技术人员而撰写的。

本丛书包括线性系统理论、非线性系统理论、极值控制理论、系统辨识、最优估计与随机控制理论、分布参数系统理论及其他有关内容。全套丛书计划分十几册出版。

希望这套丛书对于我国实现四个现代化作出它的贡献。

关肇直

1982年5月于北京

## 前 言

本书是《现代控制系统理论》小丛书的第四种。虽然惯性导航方面的书我国已出版过多种(包括翻译书),但几乎都是建立在古典控制理论上的。自六十年代以来,现代控制理论的发展使得许多科学工作者把这种理论应用到惯性导航系统的分析与设计中去。在国外,这方面的工作大多散见于各种期刊与科学技术报告中。在我国,航海、航空等方面的工作者也都为这种理论在惯性导航上的应用做了不少工作。至于这方面的专著,不但国内没有,而且国外也少见。

本书的作者都曾参加惯性导航系统的论证与设计工作。在这些工作中,他们较系统地应用了现代控制系统理论的各个方面。由于惯性导航系统的分析通常建立在误差方程上,从而这里涉及的只是线性系统,而线性控制系统理论,能系统地应用到惯性导航上去。本书包括了惯性导航系统的能控性能观测性的讨论、用极点配置和观测器理论设计惯性导航系统、用极小方差递推滤波方法作初始对准、用随机控制理论设计组合导航系统等许多方面。特别是作者和他们的合作者除了制定方案以外,还在计算机上做过大量的模拟计算,说明了所提方案的原理正确、实际可行。总之,本书是作者在自己多年实际工作的体会与经验基础上写成的,有自己的特色。本书不仅能帮助读者通晓惯性导航的原理,还能帮助读者在自己工作中实际运用这些原理。这样可使读者用较短的时间直接了解和掌握现代控制系统理论的研究工作。

关肇直

1982年5月于北京

• • •

## 作 者 的 话

本书是为介绍现代控制理论在惯性导航系统设计中的应用而写的，书中所涉及的系统设计方法大部分是作者和同事们的工作总结。关肇直、冯德兴、章祥荪、安鸿志、郑朝洲、李凤翎、刘智敏、崔平如、汪顺亭、曲忠志、陈亚灵、庄良杰、王文孝、韩福江、李玉梅、范传林等同志都曾与作者直接和间接地合作从事过这方面的研究工作，因此，可以说这本书是集体智慧的结果。在此，特向他们表示感谢。

由于我们水平有限，书中难免存在缺点和错误，希望读者给予批评指正。

# 目 录

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 第一章 惯性导航系统的动力学方程.....       | 1  |
| § 1 坐标系 .....               | 1  |
| § 2 惯性导航系统动力学方程的矢量形式 .....  | 3  |
| § 3 惯性导航系统动力学方程的分量形式 .....  | 5  |
| 第二章 惯性导航系统的误差分析.....        | 10 |
| § 1 误差源 .....               | 10 |
| § 2 真坐标系、平台坐标系和计算机坐标系 ..... | 11 |
| § 3 $\phi$ 方程 .....         | 16 |
| § 4 平台漂移率 .....             | 21 |
| § 5 加速度表的标度因子误差和安装误差 .....  | 24 |
| § 6 经度和纬度误差方程 .....         | 27 |
| § 7 平台姿态角误差方程 .....         | 28 |
| § 8 速度误差方程 .....            | 29 |
| § 9 误差传播特性 .....            | 31 |
| § 10 高度误差特性.....            | 38 |
| § 11 标度因子误差对系统特性的影响.....    | 40 |
| § 12 随机误差源对导航误差的影响.....     | 41 |
| 第三章 线性系统理论概述.....           | 42 |
| § 1 线性控制系统的数学描述 .....       | 42 |
| § 2 坐标变换 .....              | 51 |
| § 3 能控性和能观测性 .....          | 57 |
| § 4 定常线性系统的标准结构 .....       | 75 |
| § 5 传递函数的零极相消 .....         | 81 |
| § 6 极点配置和系统镇定 .....         | 85 |
| § 7 状态观测器 .....             | 98 |

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| § 8 离散定常系统的观测器 .....          | 110 |
| 第四章 卡尔曼滤波方法 .....             | 112 |
| § 1 极小方差线性递推滤波方法 .....        | 112 |
| § 2 带有相关量测噪声的极小方差递推滤波方法 ..... | 124 |
| § 3 带有相关模型噪声的极小方差递推滤波方法 ..... | 127 |
| § 4 闭环系统的极小方差线性递推滤波方法 .....   | 129 |
| § 5 连续随机线性系统的极小方差滤波方法 .....   | 130 |
| § 6 广义卡尔曼滤波方法 .....           | 137 |
| § 7 分段常增益卡尔曼滤波方法 .....        | 141 |
| 第五章 惯性导航系统的初始对准 .....         | 145 |
| § 1 导引 .....                  | 145 |
| § 2 单轴水平回路的初始对准 .....         | 147 |
| § 3 方位对准 .....                | 163 |
| § 4 最优方位对准 .....              | 174 |
| 第六章 组合导航系统 .....              | 181 |
| § 1 概述 .....                  | 181 |
| § 2 惯性-多卜勒最优组合导航系统 .....      | 182 |
| § 3 惯性-位置信息最优组合导航系统 .....     | 211 |
| § 4 卫星-惯性组合导航系统 .....         | 215 |
| 附录 A 运载体速度与角速度的关系 .....       | 247 |
| 附录 B 加权系数 $w$ 的选择 .....       | 252 |
| 附录 C 关于等式 (6.4.43) 的证明 .....  | 259 |

# 第一章 惯性导航系统的动力学方程

## §1 坐标系

众所周知,惯性导航系统是测量载体位置、速度等运动参数的系统。载体的运动参数都是相对于某个基准坐标系而言的。因此为了研究惯性导航系统的动力学方程,首先需要建立描述载体运动的基准坐标系。根据需要下面我们将介绍三个坐标系,即地心惯性坐标系、地球坐标系和东北天地理坐标系。

**地心惯性坐标系** 惯性导航系统是靠安装在平台上的加速度表来敏感载体的运动加速度的,然后由导航计算机进行积分运算得到载体的速度和位置信息。根据加速度表的工作原理可知,加速度表敏感的是载体的非引力惯性加速度。因此,为了使得加速度表的量测输出有明显的物理意义,必须建立一个惯性坐标系。当研究在地球表面附近的载体运动时,通常考虑地心惯性坐标系就够了。C. Broxmeyer 在《惯性导航系统》一书中讨论了太阳引力场的影响,最后他指出,太阳引力场是可以忽略不计的。

我们选择地心惯性坐标系为:坐标原点在地心,第一根轴在地球赤道平面指向春分点,第三根轴与地球极轴重合,第二根轴在地球赤道平面与另外两根轴构成右手正交坐标系。在本书中我们总是用“ $i$ ”表示地心惯性坐标系。

**地球坐标系** 在地球表面附近运动的载体速度都是相对地球而言的,因此,需要有一个与地球固联的基准坐标系,这

个基准坐标系叫做地球坐标系。地球坐标系是这样—个坐标系：它的坐标原点在地心，—根轴与地球极轴重合，记做  $OZ$  轴，它的  $OX$  轴和  $OY$  轴都在地球的赤道平面内，其中  $OX$  轴是格林尼治子午面和赤道平面的交线， $OY$  轴与  $OX$  轴、 $OZ$  轴构成右手正交坐标系。为简单起见，通常我们用“ $e$ ”表示地球坐标系。

地球坐标系相对地心惯性坐标系以角速度  $\Omega$  转动，转轴方向沿地球极轴方向，转动角速度的大小为  $\Omega = 15^\circ/\text{小时}$ 。

**东北天地理坐标系** 为了计算上的方便，在建立惯性导航系统的动力学方程时，需要有一个称为指示坐标系的基准坐标系。在指北半解析式惯性导航系统中，—种习惯上的取法是以东北天地理坐标系为这个指示坐标系，如有必要也可取另外的指示坐标系。这个地理坐标系是随载体运动而不断变化的动坐标系，它的坐标原点  $P$  取在载体所在当地地理位置，它的  $px$  轴指东， $py$  轴指北，它们都在当地水平面内， $pz$  轴铅垂向上。下面我们—用“ $i$ ”表示东北天地理坐标系。

图 1.1 示出的是地球坐标系和地理坐标系。

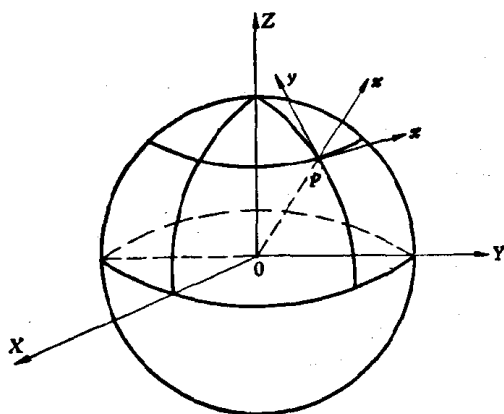


图 1.1 地球坐标系与地理坐标系

## §2 惯性导航系统动力学方程的矢量形式

本书主要讨论指北半解析式惯性导航系统，惯性平台始终保持当地地理水平和方位指北。这是我们建立惯性导航系统动力学方程的基本出发点。

为了测量载体运动的惯性加速度，在惯性平台上正交的安装有三个加速度表，每个加速度表测量载体运动沿着加速度表敏感轴方向上的非引力惯性加速度分量。当惯性平台严格保持当地地理水平时，那么其中两个加速度表测量载体非引力惯性加速度的两个水平分量，第三个加速度表测量载体非引力惯性加速度的铅垂分量。如果惯性平台始终方位指北，那么三个加速度表可按东北天定向安装，从而给出载体非引力惯性加速度在地理坐标系内的三个投影分量。

根据加速度表的工作原理，它测量的是载体的非引力惯性加速度。假设我们用  $\mathbf{r}$  表示载体在惯性空间的位置矢量， $\mathbf{a}$  表示载体的非引力惯性加速度矢量， $\mathbf{g}_m$  表示地心引力加速度矢量。于是有

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \mathbf{a} + \mathbf{g}_m, \quad (1.2.1)$$

其中角标  $i$  表示相对惯性空间取微商。方程(1.2.1)是我们研究惯性导航系统动力学方程的出发点。

在研究载体运动速度时，总是考虑相对地球的速度。令  $\mathbf{v}_e$  表示载体的速度矢量，那么由于惯性坐标系和地球坐标系的原点重合，因此有

$$\mathbf{v}_e = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_e, \quad (1.2.2)$$

这里角标  $e$  表示相对地球坐标系取微商。根据相对微商原理

有

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_e + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (1.2.3)$$

进而推知

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i = \mathbf{v}_e + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (1.2.4)$$

对(1.2.4)式两边再相对惯性空间取微商得

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i + \left. \frac{d}{dt} \right|_i (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (1.2.5)$$

因为地球自转角速度矢量  $\boldsymbol{\Omega}$  相对惯性空间是一个常矢量, 所以

$$\left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_i = 0.$$

于是方程(1.2.5)可改写为

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i + \boldsymbol{\Omega} \times \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i.$$

再利用相对微商原理和等式(1.2.2)推知

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_e + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (1.2.6)$$

在指北半解析式惯性导航系统中, 由于惯性导航系统的动力学方程是在东北天地理坐标系内求解的, 因此需要把  $\mathbf{v}_e$  相对惯性空间的微商转换成相对地理坐标系的微商。这时利用相对微商原理可得

$$\left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_e + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_e, \quad (1.2.7)$$

式中  $\boldsymbol{\omega}$  表示载体(或者说地理坐标系)相对惯性空间的角速度矢量。假设  $\boldsymbol{\rho}$  表示载体(或者说地理坐标系)相对地球(或者说地球坐标系)的角速度矢量, 那么根据角速度合成定理有

$$\omega = \rho + \Omega. \quad (1.2.8)$$

为书写简单起见,今后凡是在地理坐标系内取微商我们都用在字母上边打一“·”表示。这样综合等式(1.2.6)—(1.2.8)得出

$$\left. \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \dot{\mathbf{v}}_c + (2\Omega + \rho) \times \mathbf{v}_c + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}). \quad (1.2.9)$$

现在我们来分析等式(1.2.9)右边各项的物理意义。第一项 $\dot{\mathbf{v}}_c$ 是载体速度相对地理坐标系的变化率,注意,它不是相对加速度;第二项是由地球自转和载体相对地球的运动产生的有害加速度,所谓有害加速度并不是严格的物理概念,之所以这样叫将在下面说明;第三项是由地球自转而产生的向心加速度。

比较等式(1.2.1)和(1.2.9)两边得到

$$\dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{a} - (2\Omega + \rho) \times \mathbf{v}_c + \mathbf{g}, \quad (1.2.10)$$

其中 $\mathbf{g} = \mathbf{g}_m - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$ 表示重力加速度矢量,它的方向铅垂向下,大小近似为9.81米/秒<sup>2</sup>。方程(1.2.10)就是我们要求的惯性导航系统动力学方程的矢量形式。

从方程(1.2.10)我们可以看出,为了解出载体运动速度,必须从加速度表测得的加速度矢量中去掉 $(2\Omega + \rho) \times \mathbf{v}_c$ 这一项,由于这一项没有明显的物理意义,而又被加速度表所敏感,因此给它取名为有害加速度。由此可见,为了从加速度表的量测输出中算出速度必须对它进行有害加速度补偿和重力补偿。

### §3 惯性导航系统动力学方程的分量形式

在东北天地理坐标系内分解矢量方程(1.2.10)便得到惯性导航系统动力学方程的分量形式。为此首先将矢量 $\Omega$ 和 $\rho$ 进行分解。假设 $\lambda$ 、 $\varphi$ 分别表示经度和纬度坐标,那么 $\rho$ 可以

用  $\lambda$  和  $\varphi$  表示。我们知道，载体相对地球的运动可分成两部分，一部分是载体相对地球绕极轴的转动，一部分是载体相对地球绕东向的转动，前者反映了经度的变化，后者反映了纬度的变化。因此， $\rho$  可以用下式表达：

$$\rho = \lambda \mathbf{i}_e - \varphi \mathbf{i}_x \quad (1.3.1)$$

其中  $\mathbf{i}_e$  表示地球极轴方向上的单位矢量， $\mathbf{i}_x$  表示地理坐标系的东向单位矢量。由于载体绕东向旋转时，纬度向减小的方向变化，因此在等式 (1.3.1) 中的第二项是负的。

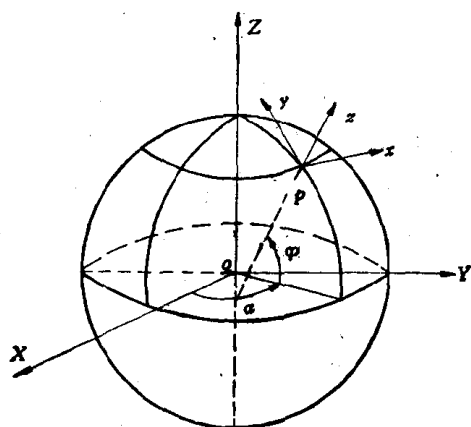


图 1.2 经纬度坐标示意图

由图 1.2 看出，地球的极轴在地理坐标系的  $pyz$  平面内，极轴方向与北向之间的夹角等于地理纬度角，因此将  $\mathbf{i}_e$  分解在地理坐标系的北向和天向有

$$\mathbf{i}_e = \cos \varphi \mathbf{i}_y + \sin \varphi \mathbf{i}_z, \quad (1.3.2)$$

这里  $\mathbf{i}_y$ 、 $\mathbf{i}_z$  分别表示地理坐标系的北向和天向上的单位矢量。由等式 (1.3.1) 和 (1.3.2) 得出：

$$\begin{aligned} \rho_x &= -\dot{\varphi}, \\ \rho_y &= \dot{\lambda} \cos \varphi, \\ \rho_z &= \dot{\lambda} \sin \varphi. \end{aligned}$$

令

$$\omega_n = \dot{\varphi}, \quad (1.3.3)$$

$$\omega_e = \dot{\lambda} \cos \varphi. \quad (1.3.4)$$

显然  $\omega_n$  代表载体相对地球的西向角速度分量,  $\omega_e$  代表载体相对地球的北向角速度分量. 用  $\omega_n$  和  $\omega_e$  表达  $\rho_x$ ,  $\rho_y$  和  $\rho_z$  有:

$$\rho_x = -\omega_n, \quad (1.3.5)$$

$$\rho_y = \omega_e, \quad (1.3.6)$$

$$\rho_z = \omega_e \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.3.7)$$

同理, 地球自转角速度矢量  $\Omega$  在地理坐标系内的分量为:

$$\Omega_x = 0, \quad (1.3.8)$$

$$\Omega_y = \Omega \cos \varphi, \quad (1.3.9)$$

$$\Omega_z = \Omega \sin \varphi. \quad (1.3.10)$$

于是由角速度合成定理可以推出:

$$\omega_x = -\omega_n, \quad (1.3.11)$$

$$\omega_y = \omega_e + \Omega \cos \varphi, \quad (1.3.12)$$

$$\omega_z = \omega_e \operatorname{tg} \varphi + \Omega \sin \varphi. \quad (1.3.13)$$

这就是载体相对惯性空间的角速度矢量  $\omega$  在地理坐标系的投影分量.

现在, 将方程 (1.2.10) 写成分量形式为:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= a_x + (2\Omega \sin \varphi + \omega_e \operatorname{tg} \varphi)v_y \\ &\quad - (2\Omega \cos \varphi + \omega_e)v_z, \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

$$\dot{v}_y = a_y - (2\Omega \sin \varphi + \omega_e \operatorname{tg} \varphi)v_x - \omega_n v_z, \quad (1.3.15)$$

$$\dot{v}_z = a_z + \omega_n v_y + (2\Omega \cos \varphi + \omega_e)v_x - g, \quad (1.3.16)$$

其中  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ ,  $a_x$ ,  $a_y$  和  $a_z$  分别表示速度矢量  $\mathbf{v}$  和加速度矢量  $\mathbf{a}$  的投影分量.

由方程 (1.3.3) 和 (1.3.4) 得出载体的经纬度位置坐标所满足的微分方程:

$$\dot{\varphi} = \omega_n, \quad (1.3.17)$$

$$\dot{\lambda} = \omega_e \sec \varphi. \quad (1.3.18)$$

剩下的问题是寻找速度和角速度之间的关系，并给出载体离开地面高度  $h$  所满足的微分方程。附录 A 详细论证了速度和角速度之间的关系，那里指出：

$$\omega_n = \frac{v_y}{R_N}, \quad (1.3.19)$$

$$\omega_e = \frac{v_x}{R_M}, \quad (1.3.20)$$

其中

$$R_N = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} + h, \quad (1.3.21)$$

$$R_M = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} + h. \quad (1.3.22)$$

而  $a$  表示地球的长半轴， $e$  表示地球的椭圆偏率。附录 A 中同时给出了高度方程

$$\dot{h} = v_z. \quad (1.3.23)$$

方程(1.3.14)——(1.3.23)就是我们所要的惯性导航系统的动力学方程。在这组方程中  $a_x$ ,  $a_y$  和  $a_z$  是加速度表的量测输出值，如果在  $t_0$  时刻引进正确的初始速度和初始位置以后，导航计算机就可以通过解这组方程实时提供各种导航数据。

在地球表面导航时， $h=0$ ,  $v_z=0$ ，所以在动力学方程中不出现(1.3.16)和(1.3.23)式。但是，就是对航空惯性导航而言，常常也省略这两个方程，而高度通道由高度计提供  $h$  和  $v_z$  这两个信息。这样做的理由是惯性导航系统的高度通道是按指数规律发散的，我们将在第二章详细讨论这个问题。

需要特别指出的是，指北半解析式惯性导航系统的陀螺稳定平台始终要跟踪当地地理水平，且在方位上指北，也就是