高等数学

上册

主编 章栋恩 金元怀

中国标准出版社

高等工科院校数学改革系列教材

高 等 数 学

上 册

主编 章栋恩 金元怀

安徽建筑大学
藏书
图书馆

中国标准出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学上册/章栋恩等主编. -北京:中国标准出版社,
1997.8
高等工科院校数学改革系列教材
ISBN 7-5066-1415-4

Ⅰ.高… Ⅱ.章… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O
13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 10329 号

中国标准出版社出版
北京复兴门外三里河北街 16 号
邮政编码:100045
电　话:68522112
河北永清第一胶印厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
版权专有　不得翻印
*

开本 787×1092 1/16　印张 13　字数 303 千字
1997 年 8 月第一版　1997 年 8 月第一次印刷
印数 1—6000　　　　定价 19.20 元

面向二十一世纪

北京市普通高等学校教育教学改革试点立项成果

高等工科院校数学改革系列教材
编　委　会

名誉顾问　李心灿　盛祥耀

主　　任　郭锡伯

副主任　金元怀　章栋恩　任开隆

邢铁骕　高　崇

编　　委　杨延龄　王勇烈　李铁臣　刘伟霞

丁逢彬　翁丽娟　陈子真　孙福伟

许晓革　石瑞民　徐安农

编 者 的 话

《高等工科院校数学改革系列教材》是北京信息工程学院等十几所首都高等学校，在国家教委工科处、北京市教委高教处、国家教委工科数学课委会的关怀和支持下，共同立项后决定编写的(见国家教委教高司[1996]96 号文件、北京 1996 年普通高等学校第一批教改立项)。它总结了北京部分高等学校多年来教改的经验，汇集了教师们献身教育的智慧和心血，各科的内容覆盖了数学课委会制定的各项基本要求。

1996 年，国家教委公布了面向 21 世纪高等工程教育教学内容和课程体系的改革计划。根据这个计划，我们制定了这套系列教材的编写指导思想和改革的目标，积极稳妥地进行高等数学与工程数学教学内容和课程体系改革的理论研究与实践。我们将计算机引进课堂，实行计算机辅助教学(即 CAI)，改变传统的教学模式，开设数学实验课；加强数学应用于工程实践的教学环节，减少繁琐推导和过份强调技巧的部分，增加数值计算、数学建模等；吸取了国外许多新教材的优点，注意保持新教材体系的科学性与系统性。

社会的日益数学化与计算机网络化，为数学课程的革新提供了广阔的空间和研究方向。我们这套系列教材的最大特点是实现了课堂教学与数学实验课的有机结合，这有利于提高大学生的数学素质，培养他们的工程实践能力、进行科学研究的能力以及解决实际问题的能力，使我们培养的人才适应 21 世纪信息社会的需要。根据教委的改革计划，我们下一阶段教材的改革目标是在课程体系与结构方面做较大的变动，并编出电子、音像教材。

最后，我们特别感谢北京数学会和北京高等学校数学教学研究会对我们的指导和帮助，感谢中国标准出版社对教学改革的积极支持，才使这套教材如期面世。科教兴国、任重道远，让我们为提高教学质量共同努力！

参加编写的学校有：

北京信息工程学院； 北方工业大学；
北京轻工业学院； 北京首钢工学院；
北京电子科技学院； 北京印刷学院；
北京石油化工学院； 北京联大电子自动化工程学院；
北京联大机械工程学院； 北京联大化学工程学院；
北京联大纺织工程学院； 北京人民公安大学；
桂林电子工业学院。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

序

本书是北京地区十所普通高等学校数学教研室集体编写的一部《高等数学》教材。

这部教材在内容上基本覆盖了国家教委工科数学课程教学指导委员会制定的“教学基本要求”，并具有下列一些特点：

一、为了加强计算机辅助教学，为了使教学全过程能与此课程配合的《高等数学实验课》密切结合，本书在内容的体系上作了一些新的安排。第一、二章向量代数、空间解析几何，在引入空间直角坐标系的同时引入了柱坐标与球坐标，并引入了空间曲线、曲面的参数方程。从而使学生一开始就能利用“高等数学图形系统”、“Mathematica”等软件。

二、为了节约学时、减少篇幅、避免重复，并加强有关内容的相互联系。本书不仅同时引入了一元函数的定义与多元函数的定义；同时讨论了一元函数与多元函数的连续性；同时介绍了不定积分与定积分的换元积分法、分部积分法；也同时给出了二重积分与三重积分的概念与性质；用第一型曲线积分、曲面积分定义第二型曲线、曲面积分。另外，本书对概念的叙述、定理的表述与证明较为简明。

三、为了培养学生用数学的意识、兴趣和能力，本书增加了“数学建模初步”、“函数逼近初步”及其他一些内容。

上述这些安排，使这部教材颇具特色，我预祝它的出版能对高等数学的教学改革与教学质量的提高发挥积极作用。

我很赞赏本书的编者们近年来形成的可贵的协作、探索、实践和开拓精神，并诚挚地希望编者们在教学实践中不断总结经验，不断收集使用本教材的教师和学生的意见，使之进一步提高与完善。

李心灿

1997年春　于北京航空航天大学

前　言

本书分上、下两册，并有《高等数学实验课讲义》与本书配套。上册包括向量代数、空间解析几何、函数与极限、函数的连续性、一元函数微分学、多元函数微分学、不定积分与定积分(上)；下册包括不定积分与定积分(下)、重积分、曲线与曲面积分、无穷级数与函数逼近初步、付立叶级数、常微分方程、数学建模初步。书中带有＊号的内容已超出国家教委颁发的高等工业学校《高等数学课程基本要求》，各院校可作适当取舍。除最后一章外，各章均配有习题。

1995年，"北京市普通高等学校数学改革协作组"的十所院校集体编写了用于《高等数学》改革试点班的讲义——《高等数学讲义》上、下册。经各院校一学年的使用，我们收集到很多宝贵意见和建议，在此基础上，又作了较大的修改，现由中国标准出版社出版。

本书可作为高等工科学校高等数学课程的教材。同时我们建议在使用本教材时，有条件的院校应开设《高等数学实验》课程，并使用本书的配套教材——《高等数学实验课讲义》。

本书第一、二章由任开隆、王信峰编写；第三、四章由王友仁编写；第五、六章由齐进军编写；第七章由章栋恩编写；第八章由杨延龄编写；第九章由许晓革编写；第十章由金元怀编写；第十一章由石瑞民、金元怀编写；第十二、十三章由李铁臣、王勇烈、章栋恩编写；第十四章由高崇、刘伟霞编写；第十五章由李宝健编写；第十六章由黄伟峰编写；第十七章由孙福伟、王信峰编写。

本书由北京印刷学院盛祥耀教授主审，盛祥耀教授仔细审阅了原稿并提出了不少改进意见。本书的出版还得到了北京航空航天大学李心灿教授的关怀，他在百忙中为本书写了序。我们参加编写教材的全体教师向盛祥耀、李心灿二位教授表示衷心感谢。我们还特别感谢首钢工学院领导和基础部数学教研室在本书编写过程中给予的积极支持。

限于编者水平，不妥之处，在所难免。希望广大读者批评指正。

编　者

1997年3月

目　　录

第一章 向量代数

向量代数在工程技术中有着广泛的应用，它是研究几何问题的重要工具。而空间直角坐标系的建立，使我们可以用代数方法来研究几何问题。

预备知识 二、三阶行列式及克莱姆法则

一、二阶行列式

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，并称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

二、三阶行列式

同二阶行列式类似，用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

并称为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

行列式有以下性质：

(1) 行列互换，所得行列式与原行列式相等；

(2) 两行(列)互换，行列式变号；

(3) 用数乘以行列式的一行(列)上的各元素，等于以此数乘以整个行列式；

(4) 行列式中，将一行(列)上各元素的同一倍数加到另一行(列)的对应元素上，行列式不变；

(5) 行列式中两行(列)的元素对应成比例，行列式为零；

(6) 三阶行列式与二阶行列式有以下关系：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

三、克莱姆法则

对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

消元后可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

即有当系数行列式 $D \neq 0$ 时，二元一次方程组的解为

$$x_j = \frac{D_j}{D} \qquad (j = 1,2).$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

同样，对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

当系数行列式 $D \neq 0$ 时，其解为

$$x_j = \frac{D_j}{D} \qquad (j = 1,2,3).$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

这里给出的求解方法称为求解线性方程组的克莱姆法则。

第一节　向量及向量的线性运算

一、向 量 概 念

在自然界中，常会碰到两类不同的量，一类在取定测量单位后，可用一实数来表示，例如

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

体积、温度、时间、质量等，这类仅仅给出大小就可以确定的量称为**数量**；但另一类仅仅给出大小却不能完全确定，例如力、位移、速度、加速度、电场强度等，要完全确定它们，不仅要给出它们的大小，而且要给出它们的方向，这种既有大小、又有方向的量称为**向量**.

通常向量用有向线段来表示(如图 1-1). 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为始点，M_2 为终点的向量记作$\overrightarrow{M_1M_2}$. 向量常用上边带箭头的字母或黑体字母表示，例如，向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 或 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 等. 向量的大小称为**向量的模**. 向量 $\boldsymbol{a}$、向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$、$|\overrightarrow{M_1M_2}|$. 模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于零的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$. 零向量的始点与终点重合，其方向可认为是任意的.

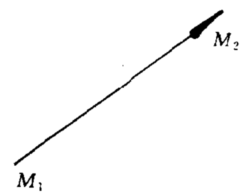

图 1-1

由于我们只研究与始点无关的向量，因此用有向线段表示向量时，始点是可以任取的. 因而，长度相等方向相同的有向线段表示相同的向量. 如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相同，则称**向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等**，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 向量经平移后，仍与原向量相等，这种向量称为自由向量. 显然互相平行的向量经平移后可成为共线的.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

根据力学中的力、速度和加速度等的合成法则，规定向量加法运算如下：

定义　用两个已知向量为邻边作一平行四边形，则以公共点为始点的对角线所表示的向量称为这两个向量的和向量. 这种运算称为向量的加法(此法则称为向量加法的**平行四边形法则**)

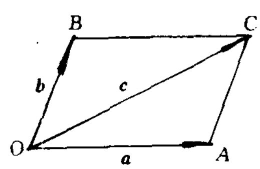

图 1-2

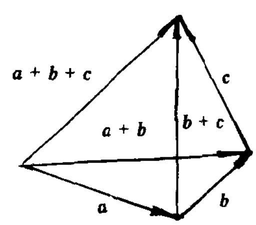

图 1-3

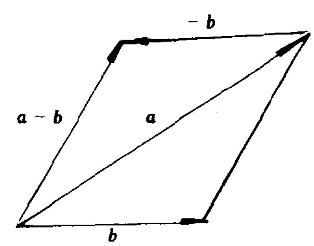

图 1-4

已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的和记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 1-2 所示).

根据向量加法的平行四边形法则和两个向量相等的定义，可以得到两个向量相加的**三角形法则**：

已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，把向量 $\boldsymbol{b}$ 的始点移至 $\boldsymbol{a}$ 的终点，则以 $\boldsymbol{a}$ 的始点为始点，$\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和向量：$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 此法则包含了两个共线向量的和向量定义.

向量的加法满足如下运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$　(如图 1-3 所示).

定义　向量减法是向量加法的逆运算，如果 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$(如图 1-4).

把一个与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称作 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，并记为 $-\boldsymbol{a}$，由图 1-4 不

难看出，向量减法 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可以看成是将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的负向量相加而得到的向量.

2. 数与向量的乘法

定义　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda \boldsymbol{a}$ 为一向量，其模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda \boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda \boldsymbol{a}$ 为零向量；

当 $\lambda=-1$ 时，$\lambda \boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量.

向量与数的乘法满足如下运算规律：

(1) 结合律　$\lambda(\mu \boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda \boldsymbol{a}+\mu \boldsymbol{a}$；　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda \boldsymbol{a}+\lambda \boldsymbol{b}$.

记与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{a}^\circ$，根据数与向量乘法的定义可知，任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以看成 $\boldsymbol{a}$ 的模与单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ$ 的乘积，即 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ$.

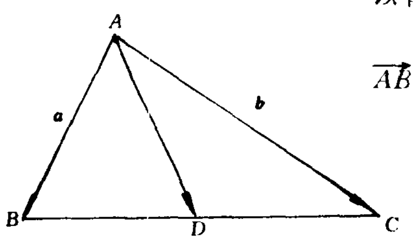

图 1-5

例 1　在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边的中点，已知向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，如图 1-5 所示，试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$.

解　因为 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，　$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，

所以　$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

例 2　证明四面体中相对棱的中点的连线相交且相互平分.

证：　设四面体的四个顶点为 A,B,C,D(图 1-6). AB 边的中点为 E，CD 边的中点为 F. 又任取一点 O，由例 1，$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$. 同理　$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.

又设 P 为 EF 中点，

则　$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

但表达式的对称性表明，每一对相对棱都将导出相同的表达式，故 P 是公共交点.

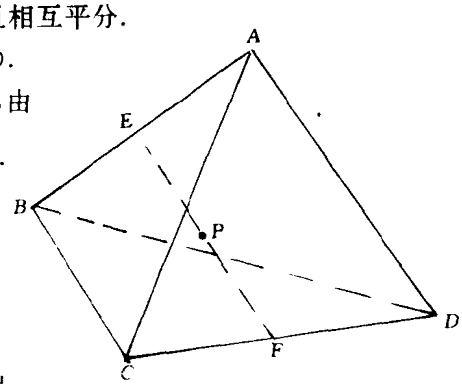

图 1-6

习题　1-1

1. 在▱$ABCD$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$M$ 为对角线 AC、BD 的交点，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示：$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$.

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=13$，$|\boldsymbol{b}|=19$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=24$，求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

3. 已知平行四边形 $ABCD$，空间任一点 O 到平行四边形三个顶点 A、B、C 的向量表达式为：$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，试求向量 $\overrightarrow{OD}$ 的表达式.

4. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试应用向量运算证明它是平行四边形.

5. 利用向量代数证明：三角形两边上中点的连线平行第三边且等于第三边的一半.

第二节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标

在空间，任取一点 O、一个单位长及三条经过点 O 且互相垂直的直线 Ox、Oy、Oz，选取正向使它们成为坐标轴，则得到一空间直角坐标系，常记为 $O\text{-}xyz$. 分别称三条相互垂直的直线为 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴，或 x 轴、y 轴、z 轴. 习惯上，三个坐标轴的正向按右手法则确定，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向. 我们称以右手法则形成的坐标系为右手系.

设 M 为空间中任意一点，过 M 分别作三个平面与三个坐标轴垂直，与三个坐标轴 Ox、Oy、Oz 的交点依次记为 P、Q、R，点 P、Q、R 在各坐标轴上的坐标分别为 x、y、z，从而，空间中任意一点 M 对应一组有序实数 (x,y,z). 反之，按上述的相反过程，(x,y,z) 也对应空间中唯一一个点 M，(x,y,z) 称为点 M 的直角坐标，依次称为横、纵、竖坐标. 平面 xOy、yOz、zOx 称为坐标系的三个坐标面（如图 1-7），三个坐标面将空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限，上半空间为第一、二、三、四卦限，在它们下方分别是五、六、七、八卦限. 在第一卦限内的点的坐标有 $x>0, y>0, z>0$.（如图 1-8）.

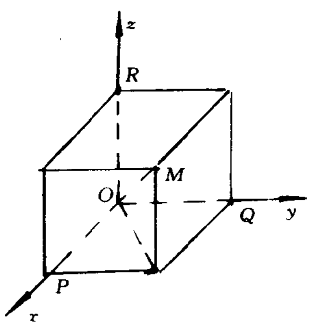

图 1-7

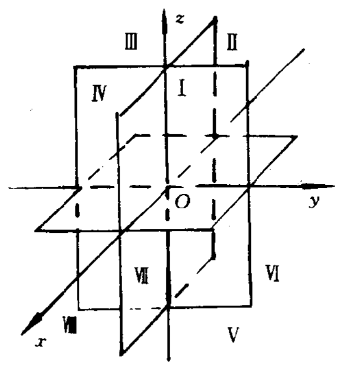

图 1-8

我们把以原点为起点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 叫做**向径**. 由此可知，空间内的点与三元有序数组之间构成一一对应关系（从而也与向径之间构成一一对应关系），因此常称空间直角坐标系中所有点构成一个三维空间，三维空间也可以看成由所有有序数组 (x,y,z) 组成.

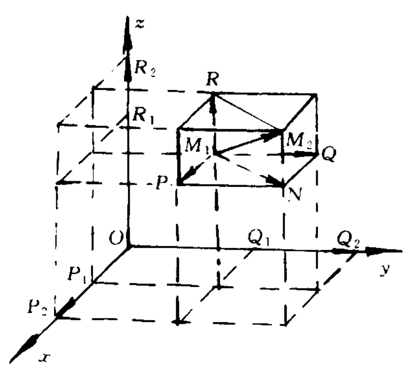

图 1-9

从图 1-7 可以看到，过 M 点作三个平面分别和 x，y，z 轴垂直，这三个平面和三个坐标面围成一个边长分别为 $|x|$、$|y|$、$|z|$，对角线为 OM 的长方体，所以

$$\begin{aligned}|OM| &= \sqrt{|OP|^2+|PM|^2}\\ &= \sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}\\ &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}.\end{aligned}$$

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，则过这两个点分别作垂直于三个坐标轴的平面得一长方体，而 M_1 与 M_2 之间的距离刚好为这个长方体对角线的长（如图 1-9），因此

有

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1}$$

这就是空间直角坐标系中的**两点间距离公式**.

二、柱坐标与球坐标

设 $M(x,y,z)$ 为空间内一点,并设点 M 在 xOy 面上的投影 P(即 M 向 xOy 面作垂线的垂足)的极坐标为 r, θ 则三个数 r,θ,z 就叫做点 M 的**柱坐标**(如图 1-10),这里规定 r、θ、z 的变化范围为

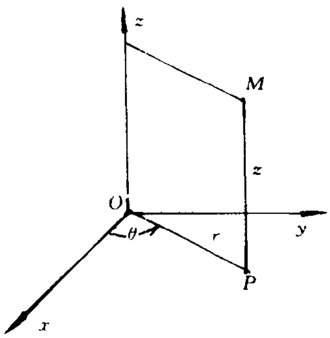

图 1-10

$$0 \leqslant r < +\infty,$$
$$0 \leqslant \theta < 2\pi,$$
$$-\infty < z < +\infty.$$

三组坐标面分别为

r=常数,即以 z 轴为轴的圆柱面;

θ=常数,即过 z 轴的半平面;

z=常数,即与 xOy 面平行的平面.

因此,点 M 的直角坐标与柱坐标间关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases} \tag{2}$$

对于空间内一点 $M(x,y,z)$,则点 M 也可以用这样有序数组(r,φ,θ)来确定. 其中 r 为原点 O 与点 M 间的距离,φ 为向径$\overrightarrow{OM}$与 z 轴正向所夹的角,θ 为从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向转到有向线段$\overrightarrow{OP}$的角,这里 P 为点 M 在 xOy 面上的投影(如图 1-11),这样的三个数 r,φ,θ 叫做点 M 的**球坐标**,这里 r,φ,θ 的变化范围为

$$0 \leqslant r < +\infty,$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$
$$0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

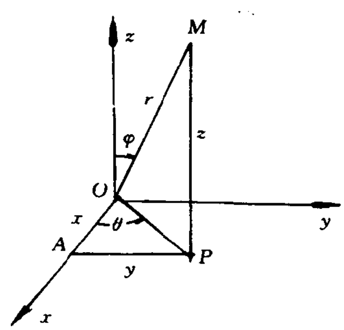

图 1-11

三组坐标面分别为

r=常数,即以原点为心的球面;

φ=常数,即以原点为顶点、z 轴为轴的圆锥面;

θ=常数,即过 z 轴的半平面.

设点 M 在 xOy 面上的投影为 P,点 P 在 x 轴上的投影为 A,则 $OA=x$,$AP=y$,$PM=z$. 又

$$OP = r\sin\varphi, \qquad z = r\cos\varphi,$$

因此,点 M 的直角坐标与球坐标的关系为

$$\begin{cases} x = OP\cos\theta = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = OP\sin\theta = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases} \tag{3}$$

习题 1-2

1. 在空间直角坐标系中,说明下列各点的位置.

$A(0,3,4)$, $B(-2,-3,2)$, $C(1,-2,-4)$,

$D(\sqrt{2},-2,2)$, $E(0,0,-2)$, $F(-2,6,-2)$.

2. 求点 $M(a,b,c)$到(1) 各坐标面的距离;(2) 各坐标轴的距离;(3) 坐标原点的距离.

3. 适合下列条件的点 $P(x,y,z)$各在什么位置.

(1) $x=y$; (2) $y=z$; (3) $z=x$.

4. (1) 在 x 轴上求与点 $A(1,2,3)$和 $B(-2,-3,5)$等距离的点;

(2) 在 yOz 面上,求与点 $A(4,-2,-2)$,$B(3,1,2)$和 $C(0,5,1)$等距离的点.

5. 求柱坐标为$(\sqrt{2},\frac{\pi}{4},2\sqrt{2})$与球坐标为$(2,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$的两点间距离.

6. 求证:以 $M_1(4,3,1)$,$M_2(7,1,2)$,$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形为等腰三角形.

第三节 向量的投影与向量的坐标

一、向量在轴上的投影

首先,我们引进两个向量夹角的定义.**当空间两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$(或一向量 $\boldsymbol{a}$ 和一根轴 u)相交时,两个向量的正方向之间的夹角 φ(不大于 π),被定义为这两个向量之间的夹角**,即

$$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi \quad (0\leqslant\varphi\leqslant\pi).$$

两个向量不相交时,可平行移动使其相交,从而确定两个向量的夹角.

定义 **设空间一向量$\overrightarrow{AB}$及一轴 u,过 A,B 两点分别作垂直于轴 u 的两个平面与轴 u 交于点 A',B'.则 B' 与 A' 的坐标之差$(u_{B'}-u_{A'})$称为向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的投影**(如图 1-12).记为

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=u_{B'}-u_{A'}$$

或

$$(\overrightarrow{AB})_u=u_{B'}-u_{A'}$$

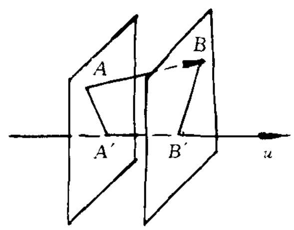

图 1-12

若 $\boldsymbol{e}$ 为 u 轴正向的单位向量,则$\overrightarrow{A'B'}=(u_{B'}-u_{A'})\boldsymbol{e}$.

由几何容易证明以下两个结论:

(1) 向量$\overrightarrow{AB}$在任意轴 u 上的投影等于该向量的模乘以它与轴 u 之间夹角 φ 的余弦.即

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AB})_u=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi. \tag{1}$$

(2) 两个向量的和在某轴 u 上的投影等于这两个向量在该轴上的投影之和,即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u=(\boldsymbol{a})_u+(\boldsymbol{b})_u. \tag{2}$$

结论(2)可以推广到 n 个向量相加.

二、向量的分解与向量的坐标

设有空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$，令 $\boldsymbol{i}、\boldsymbol{j}、\boldsymbol{k}$ 分别表示与 x 轴、y 轴、z 轴方向相同的单位向量，$\boldsymbol{i}、\boldsymbol{j}、\boldsymbol{k}$ 称为**基本单位向量**.

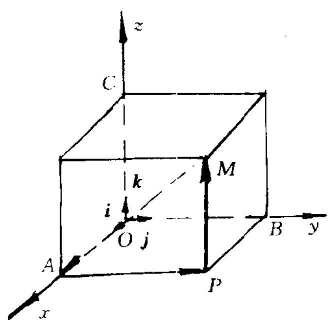

图 1-13

设向径$\overrightarrow{OM}$的终点 M 的坐标为(x,y,z)，过点 M 分别作与三个坐标轴垂直的平面，分别交 x,y,z 轴于 A,B,C 三点(如图 1-13). 则

$$(\overrightarrow{OM})_x = x,\quad (\overrightarrow{OM})_y = y,\quad (\overrightarrow{OM})_z = z.$$

$x、y、z$ 称为**向量$\overrightarrow{OM}$的坐标**. 根据向量的加法运算有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} \\ &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.\end{aligned} \qquad (3)$$

这就是向量在直角坐标系中的分解，$x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 叫$\overrightarrow{OM}$**在坐标轴上的分向量**. 向量$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 可简记为

$$\overrightarrow{OM} = (x,y,z).$$

并把此式叫做$\overrightarrow{OM}$的**坐标表示式**. 称 $x、y、z$ 为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标。由此可见，向径$\overrightarrow{OM}$的坐标与终点 M 的坐标是一致的. 对表示式(x,y,z)，将依上下文，确定它表示点或向量.

例 1 设$\overrightarrow{M_1M_2}$为置于空间直角坐标系中的任一向量，点 M_1、M_2 的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2)，如图 1-14 所示. 求$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式.

解 因为 $\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M_2}$，

所以

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}.$$

而向量

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

因此

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k},$$

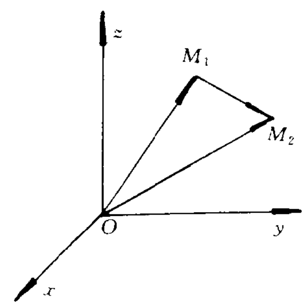

图 1-14

从而$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式为

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,y_2 - y_1,z_2 - z_1).$$

设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别有坐标表示式 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的充要条件是：$a_x=b_x,a_y=b_y,a_z=b_z$. 利用向量的坐标，可得如下向量的加法、减法以及向量与数的乘法运算：

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x,a_y + b_y,a_z + b_z),$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x,a_y - b_y,a_z - b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

三、向量的方向角与方向余弦

对于非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(a_x,a_y,a_z)$，我们定义它依次与三条坐标轴 Ox、Oy、Oz 的正向的夹角 $\alpha、\beta、\gamma$ 为这个向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**. 向量的方向由它的方向角完全确定(如图 1-15).

因为向量的坐标就是向量在坐标轴上的投影，从而有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com