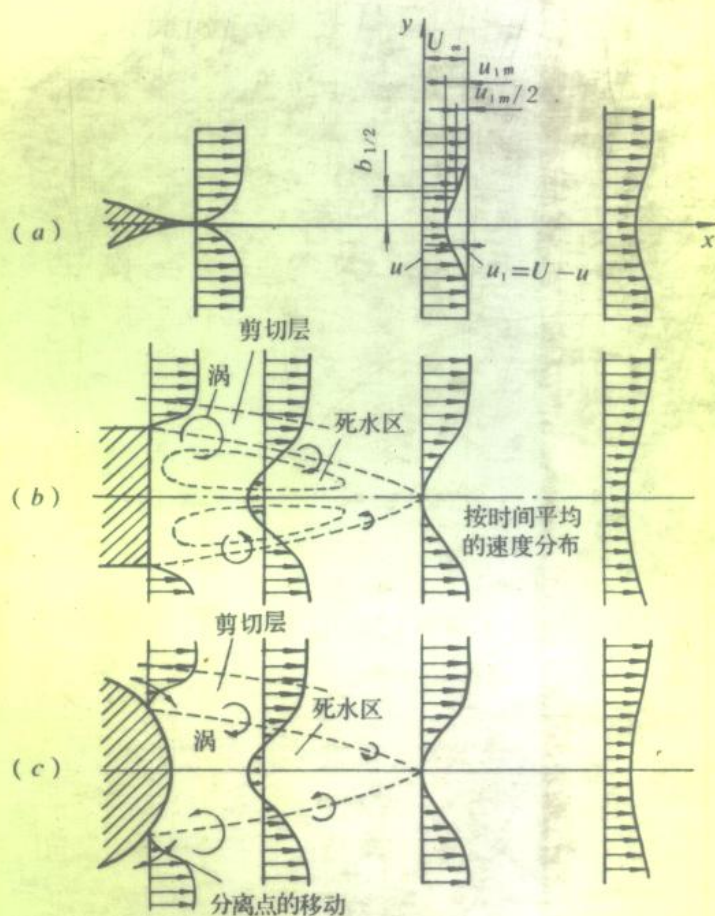


哈尔滨工业大学研究生教材

VISCOUS HYDRODYNAMICS



王致清 主编

粘性流体动力学

哈尔滨工业大学出版社

D 357
W 457

362886

粘性流体动力学

王致清 主编



哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书系统地阐述了不可压缩粘性流的基础理论和解决实际工程问题的方法,反映了一些现代最新理论和研究成果。

全书共分八章,内容包括:粘性流概要、粘性流的基本方程、粘性流基本方程的准确解、粘性流体缓慢运动、层流边界层理论、湍流、湍流边界层理论、射流与尾迹流,每章均附有习题,供读者练习。

本书可作为流体传动与控制以及机械类专业的研究生教材,也可供有关专业的教师、研究生、本科生和工程技术人员参考。

D298/33
04

粘性流体动力学

王笃清 王生编

*

哈尔滨工业大学出版社出版
新华书店首都发行所发行
哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/16印张16.625 字数358 000
1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷
印数1—2500

ISBN 7-5603-0270-X/TK·14 定价3.65元

前 言

本书是为高等工科院校流体传动与控制专业以及机械类专业的研究生编写的教材，授课时数为40学时。本书也可供有关专业的教师、研究生和工程技术人员参考。

本书对粘性流体力学的基本物理概念和基本理论进行了详细的阐述，数学推演严密，反映了一些现代最新理论和研究成果。为了满足机械类专业的教学需要，本书主要介绍了不可压缩流体粘性流动的基础理论及其在实际工程问题中的应用。例如管道中的流动（内流）问题，低雷诺数润滑流动问题等，还特别对作者所做的有关短管道流动应用基础理论的研究工作进行了阐述。关于湍流流动问题，本书仅叙述了半经验理论。虽然这种理论尚有一定的缺陷，但就解决工程实际问题而言，目前还没有一种比它更好的方法。

边界层理论是本书的主要内容，尤其在对湍流边界层理论和计算方法的阐述中，除了介绍古典的方法外，还介绍了一些较新的理论计算方法，这将有助于对此类问题进行更深入的研究和探讨。另外，本书各章均附有一定数量的习题，读者可以在解题过程中加深对本书基本内容的理解。

本书由王致清主要编写，参加编写的还有丁忠满和张雅文。在编写过程中，得到了作者研究生的许多帮助。本书的初稿承蒙北京大学吴望一教授审阅，并提出了许多修改意见，使作者受益匪浅。浙江大学盛敬超教授任本书的主审，也提出了很多宝贵意见。对他们的关心、支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢。

限于作者水平，书中不当之处在所难免，欢迎读者批评指正。

作 者

1990年

目 录

第一章 粘性流概要	(1)
§1-1 引言.....	(1)
§1-2 粘性 广义牛顿摩擦定律.....	(2)
§1-3 流体的压缩性.....	(8)
§1-4 相似律 雷诺 (Reynolds) 数.....	(10)
§1-5 层流与湍流.....	(12)
第二章 粘性流基本方程	(16)
§2-1 连续性方程.....	(16)
§2-2 粘性流体运动方程式.....	(18)
§2-3 能量方程式.....	(24)
§2-4 初始条件和边界条件.....	(29)
§2-5 涡量输运方程.....	(30)
§2-6 基本方程的无量纲化.....	(33)
§2-7 粘性流的基本性质.....	(34)
§2-8 粘性不可压缩流体动力学问题综述.....	(36)
第三章 粘性流体运动基本方程的准确解	(39)
§3-1 层状流动.....	(39)
§3-2 平面驻点附近流动.....	(48)
§3-3 旋转圆盘附近的流动.....	(52)
§3-4 平板附近的非定常流.....	(56)
§3-5 两平行平板间突然启动的库塔流.....	(60)
§3-6 圆管内非定常流动.....	(63)
第四章 粘性流体缓慢运动	(73)
§4-1 低雷诺数流动的特性和基本方程式.....	(73)
§4-2 绕圆球的斯托克司流动.....	(76)
§4-3 斯托克司流动解的修正.....	(82)
§4-4 滑动轴承内流动.....	(83)
§4-5 考虑惯性项影响层流润滑流动.....	(87)
§4-6 两平行圆板间考虑流动惯性径向扩散层流流动.....	(90)
第五章 层流边界层理论	(96)
§5-1 边界层理论问题综述.....	(96)
§5-2 边界层运动方程式.....	(98)

§5-3	边界层的性质与分离	(102)
§5-4	边界层方程的相似解法	(107)
§5-5	边界层的积分关系式及其应用	(121)
§5-6	无压力梯度($\frac{dp}{dx} = 0$)时积分关系式的近似解法	(126)
§5-7	有压力梯度($\frac{dp}{dx} \neq 0$)时积分关系式的近似解法	(128)
§5-8	轴对称物体上边界层, 曼格勒 (Mangler) 变换	(137)
§5-9	轴对称管道中边界层	(140)
§5-10	圆管层流进口段发展区流动	(144)
§5-11	非定常层流边界层	(150)
第六章	湍流	(163)
§6-1	从层流向湍流的过渡	(164)
§6-2	层流稳定性理论简介	(166)
§6-3	湍流运动基本方程式——雷诺方程式	(169)
§6-4	湍流应力方程和湍动能方程	(173)
§6-5	管道中湍流	(176)
§6-6	湍流模式理论	(190)
第七章	湍流边界层理论	(195)
§7-1	湍流边界层的特性	(195)
§7-2	湍流边界层运动方程式	(197)
§7-3	湍流边界层积分关系式	(199)
§7-4	湍流边界层的时均流速分布	(202)
§7-5	湍流边界层动量积分关系式近似解法	(210)
§7-6	湍流边界层微分方程式解法	(220)
§7-7	圆管湍流进口段发展区流动	(227)
第八章	射流和尾迹流	(233)
§8-1	自由射流的性质	(233)
§8-2	层流自由射流	(235)
§8-3	二维湍流自由射流	(240)
§8-4	圆形湍流自由射流	(246)
§8-5	大气中的水射流	(249)
§8-6	尾迹流	(252)
参考文献		(258)

第一章 粘性流概要

§ 1-1 引言

在自然界中,一切客观存在的实际流体都具有粘性,所以,将一切实际流体都称为**粘性流体**。但是,有的流体粘性大,有的流体粘性小,如油、蜂蜜的粘性比水、空气的粘性要大。

粘性流体动力学研究的是粘性流体宏观运动规律以及流体和固体之间相互作用的规律。流体的宏观运动规律和流体受外力作用的外部约束(指边界条件和初始条件)以及流体本身的物理性质(粘性、压缩性和热传导性等)有关。

在实际流体运动中,两相邻接触层之间将产生切应力(摩擦应力)作用,这就是流体所具有的**粘性**。但对每种具体流动,粘性的表现和所起的作用不尽相同。凡是可以完全忽略粘性的流体,称为**理想流体**。它是实际流体的一种近似模型,研究它的宏观运动规律的是**理想流体动力学**。理想流的理论在许多运动情况下,对于某些问题也能给出与实际相符合的满意结果。例如,在解决无脱体绕翼型流动问题中,用理想流的理论求出升力和压力分布与实验结果相比是基本相符合的。也还有其它如表面波的运动等。但是,求翼型的阻力时会得出阻力为零($d'Alembert$ 佯谬)这一不合理结果。原因是:理想流理论没有考虑切应力,在实际流体中是有切应力作用的。因而必须按实际流体来处理。

粘性流与理想流的外部约束的边界条件也是不相同的。粘性流粘附于固体壁面上,有与固体壁面相同的速度,称为**粘附条件**或叫**无滑移条件**(稀薄气体除外)。理想流不同,在固体壁面上一般是发生相对滑移,称为**滑移条件**。这个外部约束边界条件构成理想流与粘性流的本质差别。

对于粘性力比惯性力小得多的流体流动,即大雷诺数流动,在固体壁面附近的一薄层区域内,必须考虑粘性作用,在这薄层区域外,可视为理想流,这一薄层区域称为**边界层**(或附面层)。研究边界层区域流动规律的是边界层理论,它是粘性流体动力学的一个重要研究分支。

粘性力比惯性力大得多的流动,称为**低雷诺数流动**(或叫**蠕动流**)。这种流动需要在整个流动空间内,都考虑粘性作用。它也属于粘性流体动力学的研究范围。

流体可压缩性。如空气,其密度明显地随压力而变化,它常被认为是**可压缩流体**。对于液体在某些条件下流动,也要作为可压缩流体来处理。当然,可压缩性在某些流动中也可不起主导作用,例如空气在低速下流动和液体在一般情况下流动,是可以把可压缩性忽略的。这时认为流体的密度在运动过程中是不变化的,并称为**不可压缩流体**。也

就是说不可压缩流体是指每个流体质点的密度在运动的时间过程中保持不变, 即有 $\frac{d\rho}{dt} = 0$ (ρ 是流体的密度)。但是, 不可压缩流体不需要在它所充满的流动空间中具有

均匀的密度。如果流体密度是均匀分布的, 此种流体叫**均质流体**。此时, 密度在每一时刻的空间分布均匀, 即在各点处密度相等, 应有 $\rho = \text{const}$ (同一时刻)。对于不可压缩流体, 即使不是均质流体, 也应有 $\frac{d\rho}{dt} = 0$ (即使 $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$)。对于**均匀不可压缩流体**,

即表示流体各点密度分布均匀而且在运动的时间过程中又保持不变, 对于此种流体密度 ρ 恒为一常数, 即 $\rho \equiv \text{const}$ (常数)。它与不可压缩流体是不同的。但在一般流体力学中, 常常不加以区分。

我们把流体分为不可压缩和可压缩流体两种不同类型, 进行理论研究是方便的。本教材主要是讨论不可压缩流体的流动。

流体热传导性。不论流体是运动或是静止的, 只要是温度分布不均匀, 热量就由温度高处向温度低处传输, 这就是**热传导性**。这是由于分子运动引起的热量输运结果。如果流体介质的热传导性是各向同性, 由实验为基础, 热传导将遵守**富利叶 (Fourier) 定律**: 热传导所引起的热流量密度 $\vec{q}$ 与温度梯度 $\text{grad}T$ 成正比, 其热流量密度的方向与温度梯度的方向相反。即

$$\vec{q} = -k \text{grad}T \quad (1.1)$$

式中 T ——绝对温度, $\vec{q}$ ——热流量密度矢量, 即单位时间内通过垂直于温度梯度的单位面积输运的热量, k ——热传导系数, k 一般取决于流体介质的种类和温度以及压力, 其单位是 $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。

§ 1-2 粘性 广义牛顿摩擦定律

在实际的流体运动中, 速度分布不均匀时, 即当有速度梯度产生时, 从微观来说, 此时将有分子运动引起动量输运, 其结果是在两相邻流体层间产生切应力, 也称为摩擦应力, 这就是流体粘性的表现。

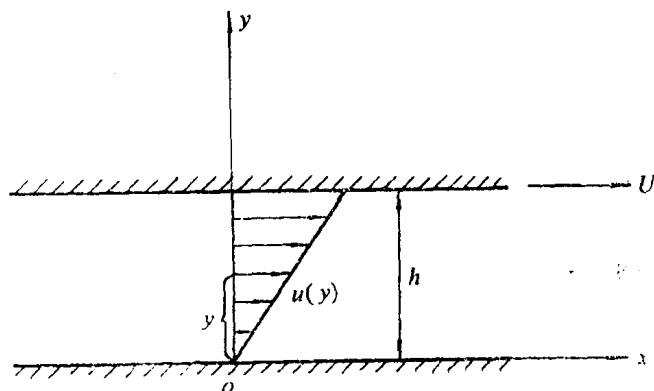


图 1-1

切应力和速度梯度之间有一定的关系, 它就是**牛顿摩擦定律**。对于简单的平面直线流动, 见图1-1所示。在两相邻流体层间的切应力正比于垂直于运动方向的速度梯度, 即有

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.2)$$

式中 τ_{yx} 是切应力, $\frac{du}{dy}$ 是速度

梯度, μ 是流体的特性参数, 叫动力粘性系数。它在很大程度上依赖于流体的温度, 并与压力有关。它是流体粘性的度量。它的SI制单位是帕·秒 (Pa·s)。

在粘性流体的一般运动中, 切应力自然要和变形速度存在一定的关系。为了简便, 我们采用张量记号来表达这些一定的关系式。设直角坐标为 $x_i (x_1, x_2, x_3)$, 速度分量 $u_i (u_1, u_2, u_3)$ 是 x_i 和时间 t 的函数。

一、应力与变形速度

设点 $A(x_i)$ 的速度分量 u_i , 其相邻点 $(x_i + \delta x_i)$ 的速度分量是 $u_i + \delta u_i$, 则

$$\begin{aligned} \delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta x_j \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta x_j \end{aligned} \quad (1.3)$$

式中字母下标 $i, j, \dots$ 均可取值 1, 2, 3。对以后论述, 均约定: 在任何一项内下标如果重复出现两次, 就表示对下标所取值暗中求和。

在 (1.3) 式中的对称部分

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

是二阶对称张量的分量, 独立的有六个, 即 $e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12} = e_{21}, e_{23} = e_{32}, e_{31} = e_{13}$ 。对称张量表示为

$$\begin{aligned} E = \{e_{ij}\} &= \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

它叫**变形速度张量**。在其对角线上的分量 e_{ii} , 表示平行于 x_i 轴的线段的**伸缩变形速度**。在非对角线上的分量 $e_{ij} (i \neq j)$, 表示平行 x_i 轴及 x_j 轴的两个线段间的角度变化率, 称为**剪切变形速度**。

在 (1.3) 式中的反对称部分

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

是二阶反对称张量的分量, 在非对角线上有三个独立的分量, 即 $\omega_{12} = -\omega_{21}, \omega_{13} = -\omega_{31}, \omega_{23} = -\omega_{32}$ 。在对角线上的分量均为零。并且可表示为

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ijk} \omega_k$$

式中 ε_{ijk} 表示置换记号, 当 i, j, k 都不相等时, $\varepsilon_{ijk} = \pm 1$ ($\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$), i, j, k 有相等者, ε_{ijk} 均为零 ($\varepsilon_{111} = \varepsilon_{112} = \dots = 0$), 即有

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{当 } (i, j, k) \text{ 是 } (1, 2, 3) \text{ 的偶次置换} \\ -1, & \text{当 } (i, j, k) \text{ 是 } (1, 2, 3) \text{ 的奇次置换} \\ 0, & \text{当 } i, j, k \text{ 中有相等者} \end{cases}$$

称为Eddington记号。 ω_k 是旋转角速度

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u}$$

的分量, 且有 $\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$

$$\text{即 } \omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = \omega_{32}, \quad \omega_2 = \omega_{13}, \quad \omega_3 = \omega_{21}$$

它表示以 A 为中心的流体微团绕平行于 x_i 轴的轴旋转角速度。则反对称张量表示为

$$\Omega = \{\omega_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

因此 (1.3) 式可写成下列形式

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j = e_{ij} \delta x_j + \varepsilon_{ijk} \omega_k \delta x_j$$

另一方面, 点 A 的应力也可由一个二阶张量

$$P = \{p_{ij}\} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

来表示, p_{ij} 表示作用在通过点 A 垂直 x_i 轴的平面上, 平行 x_j 轴方向的应力。在对角线上分量 p_{ii} ($i = j$) 为法向应力, 非对角线上分量 p_{ij} ($i \neq j$) 是切应力。这个应力张量是对称张量 (在第二章中将要证明), 有

$$p_{ii} = p_{ii}$$

特别当流体是静止情形, 或者是理想流体情形, 不存在切应力, 因而其应力张量为 ($p_{11} = p_{22} = p_{33} = -p$)

$$P = \{p_{ij}\} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -pI$$

其中 $I = \{\delta_{ij}\}$ 是单位矩阵, 而

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3$$

在粘性流体的一般运动中, 通常可以将应力张量分成两个部分:

$$P = -pI + P' \quad (1.4)$$

其中 $-pI$ 是代表流体静止时应力状态部分 (p 是静压力, 与热力学压力相同); P' 是由于粘性流体运动产生的应力状态部分, 与变形速度有关, 称它为**偏应力张量**。当流体静止时, 偏应力张量为零。或将 (1.4) 式表示为

$$\{p_{ij}\} = -p\{\delta_{ij}\} + \{p'_{ij}\}$$

假设所研究的粘性流体模型, 满足下述两个条件: (1) 偏应力张量分量与变形速度张量分量成为线性齐次函数关系; (2) 流体是各向同性。

由于流体是各向同性, 所以偏应力张量与变形速度张量不论直角坐标系如何旋转或是坐标变换, 均保持不变。并且它们的对角线上的元素之和, 也是不变量。因此, 满足上述条件的偏应力张量应是

$$\{p'_{ij}\} = \lambda e_{kk}\{\delta_{ij}\} + 2\mu\{e_{ij}\} \quad (1.5)$$

其中 λ 和 μ 是流体的特性参数, 后一项中系数 2 是为了便于解释加的; $e_{kk} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ 是**体膨胀速度**。由 (1.4) 式得总应力张量

$$\{p_{ij}\} = (-p + \lambda e_{kk})\{\delta_{ij}\} + 2\mu\{e_{ij}\} \quad (1.6)$$

或者

$$\begin{cases} p_{11} = -p + \lambda e_{kk} + 2\mu e_{11} \\ p_{22} = -p + \lambda e_{kk} + 2\mu e_{22} \\ p_{33} = -p + \lambda e_{kk} + 2\mu e_{33} \\ p_{12} = p_{21} = 2\mu e_{12} \\ p_{13} = p_{31} = 2\mu e_{13} \\ p_{23} = p_{32} = 2\mu e_{23} \end{cases} \quad (1.7)$$

上面 (1.6) 式或 (1.7) 式的严格证明, 可查阅连续介质力学或张量专著。我们把满足 (1.7) 式的流体, 称为**牛顿流体 (或线性粘性流体)**。(1.7) 式是牛顿流体的本构方程 (表示应力与变形速度间的关系式), 也称为**广义牛顿摩擦定律**。

当流体作简单的平面直线流动 (平行剪切流动): $u_1 = u_1(x_2), u_2 = u_3 = 0$

对于这种流动, 有 $e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{13} = e_{23} = 0, e_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ 。所以 $p_{11} = p_{22} = p_{33} =$

$-p, p_{13} = p_{23} = 0$, 但是 $p_{12} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$

这就是 (1.2) 式牛顿摩擦定律, μ 是动力粘性系数, 可见, 在 (1.7) 式中的流体特性参数 μ 就是动力粘性系数。这也同时说明了在 (1.5) 式中加系数 2 的原因。系数 λ 还要进一步讨论。不过可以看出, 对于不可压缩流体, 因为 $e_{kk} = 0$, 所以系数 λ 就不出现在 (1.5) 关系式中, 因此 λ 只有在可压缩流体中才是重要的。

从 (1.5) 式求得偏应力的法向分量平均值

$$-\frac{1}{3}p'_{i i} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)e_{i i} = \lambda_0 e_{i i} \quad (1.8)$$

其中系数

$$\lambda_0 = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

它是表示偏应力的法向分量平均值与体膨胀速度之比的比例常数,叫做**体积粘性系数**(或叫第二粘性系数)。

从 (1.6) 式求得法向应力平均值

$$\frac{1}{3}p_{i i} = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)e_{i i} \quad (1.9)$$

由上式可见,压力 p 一般不是平均法向应力。如果假设 (Stokes 假设) 平均法向应力 $\frac{1}{3}p_{i i}$ 与体变形速度 $e_{i i}$ 无关,则我们必须取

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$$

因此

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

从而在可压缩流体中,系数 λ 与粘性系数 μ 联系起来。因而特性参数由二个变成一个,与不可压缩流体一样的,所以应力与变形速度之间关系式 (1.6) 变为

$$\{p_{i j}\} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu e_{k k}\right)\{\delta_{i j}\} + 2\mu\{e_{i j}\} \quad (1.10)$$

即是

$$\begin{cases} p_{11} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu e_{k k}\right) + 2\mu e_{11} \\ p_{22} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu e_{k k}\right) + 2\mu e_{22} \\ p_{33} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu e_{k k}\right) + 2\mu e_{33} \\ p_{12} = 2\mu e_{12} \\ p_{13} = 2\mu e_{13} \\ p_{23} = 2\mu e_{23} \end{cases} \quad (1.11)$$

这就是牛顿流体的**本构方程**。这个关系式只在体变形速度很小情况下才是适合的。实际上,斯托克司 (Stokes) 假设是一个不太准确的假设,它只是一个很好的近似。但利用这个关系所导出的结果和实验相比,适用范围并不过于狭小,因为对于大多数流体来说,体膨胀速度 $e_{k k}$ 一般不大,所以造成的误差不大。

由 (1.7) 式可见, λ 只出现在偏应力的法向分量中,并且还包含有压力 p , 这表明系数 λ 的物理意义与流体微元的有限速度改变体积时的耗散有关,因此才将 λ_0 称为体积粘性系数。

对于不可压缩牛顿流体，此时有 $e_{kk}=0$ ，本构方程简化为

$$\{p_{ij}\} = -p\{\delta_{ij}\} + 2\mu\{e_{ij}\} \quad (1.12)$$

即

$$\begin{cases} p_{11} = -p + 2\mu e_{11} \\ p_{22} = -p + 2\mu e_{22} \\ p_{33} = -p + 2\mu e_{33} \\ p_{12} = 2\mu e_{12} \\ p_{13} = 2\mu e_{13} \\ p_{23} = 2\mu e_{23} \end{cases} \quad (1.12')$$

由上式可得

$$p = -\frac{p_{ii}}{3} = -\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33})$$

这表示压力 p 就是负的平均法向应力，实际上，它就是斯托克司 (Stokes) 假设，在这里可以得到准确的满足。

如果流体的应力与变形速度之间的关系，不能用本构方程 (1.6) 来描述，这种流体就称为**非牛顿流体**。例如，油漆、糖浆、聚合物溶液等均属非牛顿流体。有关这方面的内容，可查阅非牛顿流体力学专著。

本教材只限于研究牛顿流体。

二、粘性系数

各种流体均有各自的粘性系数值，对于具有简单结构的气体，可用气体分子运动理论来计算它的值，但对于复杂结构的气体只有进行实地测量。从实用角度来说，只要压力不是特别高，就可以不必考虑粘性系数随压力的变化，可以认为它只是温度的函数。通常气体的粘性系数可采用麦克斯韦-瑞雷 (Maxwell-Rayleigh) 关系式

$$\frac{\mu}{\mu_0} \approx \left(\frac{T}{T_0}\right)^n \quad (1.13)$$

式中 T_0 为绝对温度的参考值， μ_0 为绝对温度 T_0 时粘性系数的参考值， n 是气体的特征常数。大多数气体的 n 值量级接近0.7。在表1-1中列出各种气体的 T_0 、 μ_0 和 n 值。

准确度较高些的是苏泽兰德 (Sutherland) 关系式

$$\frac{\mu}{\mu_0} \approx \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \cdot \frac{T_0 + S}{T + S} \quad (1.14)$$

式中 S 为气体的特征温度，叫做**苏泽兰德常数**。把它也列在表1-1中。从(1.13)和(1.14)式看出，当气体的温度越高时，粘性系数值就越大。也就是说，**气体的粘性系数是随着温度的升高而增大的**。

液体的粘性系数与气体相反，是随温度的升高而减少的。在表1-2中列出几种液体的粘性系数。动力粘性系数 μ 与密度 ρ 的比值，称为**运动粘性系数**，以 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 表示之。

表 1-1

几种气体的 T_0 、 μ_0 、 n 和 S 值

气 体 种 类	T_0 (K)	μ_0 (10^{-6} Pa·s)	n	(1.2)式温度 适用范围 (K)	误 差 (%)	S (K)	(1.3) 式温度 适用范围 (K)	误 差 (%)
空 气	273.2	17.16	0.666	210—1900	± 4	111	170—1900	± 2
氢	273.2	21.25	0.72	200—1500	± 3	144	120—1500	± 2
二氧化碳	273.2	13.70	0.79	210—1700	± 5	222	190—1700	± 2
一氧化碳	273.2	16.57	0.71	230—1500	± 2	136	130—1500	± 2
氮	273.2	16.63	0.67	220—1500	± 3	107	100—1500	± 2
氧	273.2	19.19	0.69	230—2000	± 2	139	190—2000	± 2
氫	273.2	8.41	0.68	80—1100	± 2	97	200—1100	± 2
水蒸气	416.7	17.03	1.04	280—1500	± 3	861	360—1500	± 2

表 1-2

几种液体粘性系数 ($1.0133 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1$ 个大气压)

液体种类	温 度 (°C)	粘性系数 μ (Pa·s)	运动粘性系数 ν (m^2/s)
水	0	1.783×10^{-3}	1.783×10^{-6}
	20	1.002×10^{-3}	1.004×10^{-6}
	40	0.651×10^{-3}	0.656×10^{-6}
	100	0.283×10^{-3}	0.296×10^{-6}
汽 油	20	0.31×10^{-3}	0.46×10^{-6}
轻 油	20	2.0×10^{-3}	2.4×10^{-6}
轻润滑油	60	4.17×10^{-3}	4.95×10^{-6}
甘 油	20	14.90×10^{-3}	11.80×10^{-6}
水 银	20	1.55×10^{-3}	0.115×10^{-6}

注: $10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2 = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$

§ 1-3 流体的压缩性

当温度不变时, 流体(液体和气体)在外压力作用下, 其体积减小的性质, 叫做流体的压缩性。用来度量压缩性大小的量, 是流体的弹性模数 E , 由下列等式所确定

$$\Delta p = -E \frac{\Delta V}{V_0} \quad (1.15)$$

式中 Δp ——压力增量;

$\frac{\Delta V}{V_0}$ ——体积相对改变量。

液体的压缩性是非常小的。例如, 水的弹性模数 $E = 2000 \text{ MPa}$, 也就是说, 当每增加一个大气压时将要引起体积相对改变量 $\Delta V/V_0 \approx -\frac{1}{20000} = 0.005\%$ 。对于其它液体也是这样, 所以液体在大多数情况下, 由于压缩性甚小可以忽略, 因此可视为不可压缩

的。但是在某些特殊情况如水中爆炸和管道中水击等现象应视为可压缩的。

气体的可压缩性较大。如果在等温状态下气体体积改变量 ΔV ，压力改变量 Δp ，根据完备气体状态方程式，有

$$(p_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta V) = p_0 \cdot V_0$$

当 $\frac{\Delta V}{V_0}$ 不大时，可得出

$$\Delta p = -p_0 \frac{\Delta V}{V_0} \quad (1.16)$$

即，气体的弹性模数就等于初始状态压力 p_0 。例如，空气在标准状态下（在一个大气压下，温度为 0°C ）弹性模数 $E = 0.1\text{MPa}$ ，可见空气的压缩性比水的压缩性大20000倍。对于其它气体也相类似。

当气体流动时，气体的压力变化与其流动是相联系的。体积的改变量可用密度改变量来计算，因此压力改变量可用密度相对改变量来表示。根据质量守恒定律，有

$$(V_0 + \Delta V)(\rho_0 + \Delta \rho) = V_0 \rho_0$$

当 $\frac{\Delta V}{V_0}$ 不大时，可得出

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = -\frac{\Delta V}{V_0}$$

于是(1.15)式变为下面形式

$$\Delta p = E \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \quad (1.17)$$

由上式可见，当密度的相对改变量 $\frac{\Delta \rho}{\rho_0}$ 很小时，即当 $\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \ll 1$ 时，气体可视为不可压缩的。

设流体质点的运动速度为 u ，压力为 p ，则由伯诺利 (Benoulli) 方程： $p + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{const}$ 得出，压力改变量 Δp 跟流动过程相联系，并且与流体动压 $\frac{1}{2}\rho u^2$ 具有相同的数量级，因此由(1.17)式推得

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \approx \frac{1}{E} \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (1.18)$$

如果气体流动是不可压缩的，应当有 $\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \ll 1$ ，根据(1.18)式有

$$\frac{1}{E} \frac{1}{2} \rho u^2 \ll 1$$

由此得出结论，当流体动压 $\frac{1}{2}\rho u^2$ 比流体的弹性模数 E 小得多时，则气体可认为是不可压缩的。这个结论还可以用另一种方法来表达：如果在流体中声音传播速度为 c ，根据

表示音速的拉普拉斯公式

$$c^2 = \frac{E}{\rho_0}$$

气体是不可压缩的条件, 可以表达为下列形式

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c} \right)^2 \ll 1 \quad (1.19)$$

如果把气流速度 u 与音速之比, 称为**马赫数**, 用 $M = \frac{u}{c}$ 来表示, 则从(1.19)式得

出, 气体流动是不可压缩时的条件为

$$\frac{1}{2} M^2 \ll 1 \quad (1.20)$$

也就是说, 当马赫数 M 比1小很多, 或者说, 气流速度比音速小很多时, 压缩性是可以忽略的。例如, 对于空气在温度为 0°C 时音速 $c = 330\text{m/s}$, 气流速度 $u = 100\text{m/s}$, 则密度相对改变量

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \frac{1}{2} M^2 = 0.05$$

如果密度相对改变量允许在5%范围内变化, 那么依此气流速度为不可压缩流的上限, 则气流速度不超过 100m/s 时, 就可以忽略它的压缩性。

§ 1-4 相似律 雷诺 (Reynolds) 数

在圆管中的哈根-泊肃叶 (Hagen-Poiseuille) 流动, 这种流动的每一个流体质点只在切应力和压力影响下运动, 而惯性力处处等于零。但在圆管进口段上流动, 收缩或扩张管道中流动, 每个流体质点除了受到切应力和压力作用外, 还受到惯性力作用。

关于相似流动问题, 在这里只简单叙述一下。显然, 两个流动是力学相似首先应当满足边界是几何相似 (如几何相似管道)。但是, 仅有边界几何相似还不能使两个流动是力学相似, 因为在两个相似管道中, 流动可能是很不一样的。如果边界是几何相似, 那么在什么样的条件下两个流动 (不可压缩流) 才是力学相似呢? 它们应当满足下述条件: 在几何相似对应点上, 作用在每一流体质点上的所有作用力的比值, 在每一时刻都是彼此相等的。

现在考虑当仅有切应力 (粘性力) 和惯性力作用时的重要流动情况。假设是不可压缩流体和不考虑重力。在这样假设条件下, 两个边界几何相似的流动, 在几何相似对应点上惯性力和粘性力的比值相等, 才是力学相似的。如果考虑两个沿 x 方向的流动, 沿 x 方向上的流体质点速度为 u , 则作用在单位体积上惯性力等于 $\rho \frac{du}{dt}$ 。那么, 对于定常

流动, 将有

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho u \frac{\partial u}{\partial x}$$

即单位体积的惯性力等于 $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$ 。根据牛顿摩擦定律很容易求出粘性力。为此，考虑微元体积（图1-2示），其边长为 dx, dy, dz ，在 x 运动方向上切向力合力等于

$$\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy\right) dx \cdot dz - \tau dx \cdot dz = \frac{\partial \tau}{\partial y} dx dy dz$$

即单位体积上的摩擦力等于 $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ ，或者根据（1.2）式它有 $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 。

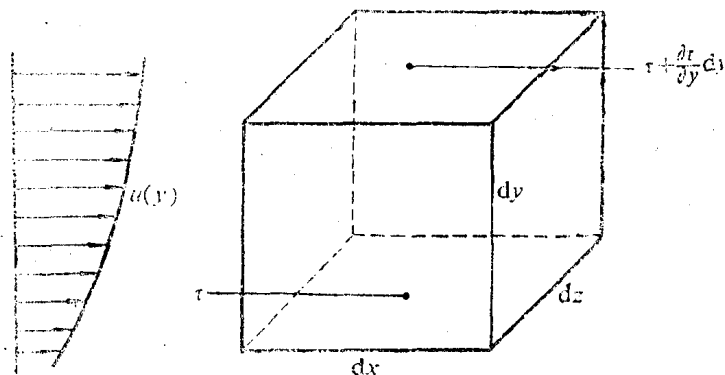


图 1-2

因此，两个边界几何相似的流动，它们是力学相似，就应满足下列条件

$$\frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \text{const} \quad (1.21)$$

假设所研究的相似流动：流体的密度为 ρ ，粘性系数为 μ ，特征长度为 L （例如是圆管的直径），特征速度为 V （例如是圆管断面的平均速度），则有 $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$ 与乘积 $\rho V^2/L$ 成比例， $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 与 $\mu V/L^2$ 成比例，于是惯性力与粘性力的比

$$\frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \frac{\rho V^2/L}{\mu V/L^2} = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu}$$

式中 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ——运动粘性系数，因此，如果在两个边界几何相似的流动中 $\rho V L / \mu$ （或

$V L / \nu$ ）具有相同的数值，则满足力学相似条件。由于 $V L / \nu$ 是两个力的比值，所以是一个无量纲数，称为雷诺（Reynolds）数，用 Re 表示之。由此得出：两个流动的雷诺数 Re 相等，则这两个流体力学相似。这是雷诺在研究圆管中流动规律时首先发现的，所以称为雷诺相似律。按照雷诺相似律，如果流动边界几何相似，那么即使管道尺寸大小不同，或者速度不同或者流体不同，只要是它们的雷诺数相同，这两种流动就是力学相似的。