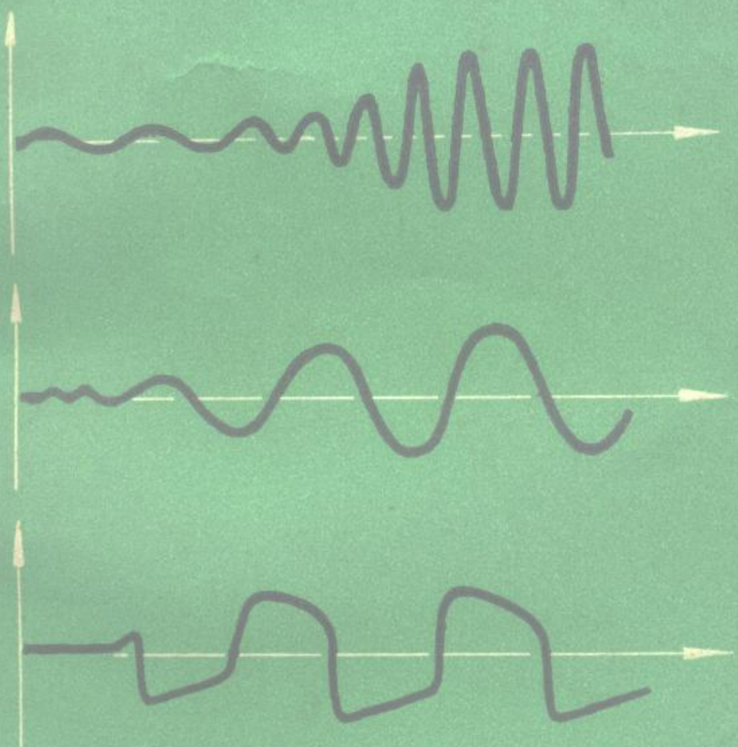
数字与模拟电子线路教学小丛书

# 非线性振荡引论

张肃文 编



高等教育出版社

数字与模拟电子线路教学小丛书

# 非线性振荡引论

张肃文　编

高等教育出版社

本书较系统地介绍了与无线电技术有关的非线性振荡理论，内容包括发展简史、非线性振荡自持系统的几何方法和解析方法，非线性振荡的非自持系统分析法，对高阶系统及近代振荡理论也作了一般的介绍。作为一本引论性的读物，本书内容简洁，充实，由浅入深，系统性较强。

本书系高等工业学校《电子线路》课程的参考书，它扩充了该课程中关于振荡原理方面的内容，可供有关专业师生和科技工作者参考。

责任编辑　谭骏云

数字与模拟电子线路教学小丛书

非线性振荡引论

张肃文 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 6　字数 145,000

1982 年 11 月第 1 版　1983 年 7 月第 1 次印刷

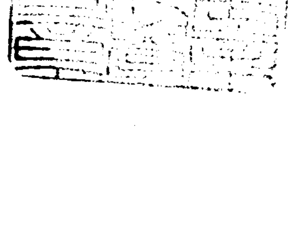
印数 00,001—6,500

书号 15010·0491　　定价 0.92 元

谨以此书献给

华中工学院三十周年校庆

(1953—1983)



# 序　言

本书是根据1980年6月在成都召开的高等学校工科电工教材编审委员会扩大会议所通过的电子线路1981～1985年教材编写规划编写的，目的是为了扩展高频电子线路教材中关于振荡原理的内容，供有关专业师生与科技工作者参考。

振荡理论涉及到力学、声学、机械、电磁学等广阔的领域，它对于无线电技术尤其具有特殊的重要性。这本小册子只讨论了与无线电技术有关的若干内容。限于作者水平，书中难免有不妥与错误之处，请读者不吝指正。

本书内容曾为华中工学院无线电系79级研究生讲授过，初稿完成后承华南工学院黄贯光、黄兆源同志等审阅，提出宝贵意见，谨致谢忱。

张肃文

1982年7月

# 目　录

# 第一章 绪　论

## § 1.1 非线性振动理论的发展简史

所谓振动“一般指机械振动，是物体（或物体的一部分）沿直线或曲线并经过其平衡位置所作的往复运动，在科学技术中振动一词通常指周期性振动，……此外，不具有周期性规律的振动称为无规则振动或随机振动。电的振动往往称为振荡。”①因此，振动一词的涵义要比振荡更为广泛。

关于振动问题的研究可以追溯到 Galileo、Huygens、Newton 等人，他们研究过单摆运动的问题。在 Lagrange 的著作中已有较完整的微振动理论。到了 19 世纪，H. Poincaré 在研究天体力学时，提出了摄动理论②；A. M. Ляпунов 提出了稳定性理论。这些理论至今仍是自动调整理论、振荡理论等的重要基础。

十九世纪末叶，H. Helmholtz 与 J. Rayleigh 已注意到非线性振动。到了 1920 年前后，B. Van der Pol 和 E. Appleton 为了说明三极管振荡器的波形，从研究电子管的非线性特性开始，推导出著名的 Var der Pol 方程，建立了非线性振荡的理论基础。在此以后，W. M. H. Greaves、A. Liénard 等也做出了贡献。

1930 年以后，研究中心移到苏联。在苏联，建立了两个学派：

---

① 参看《辞海》1965 年版本，第 1296 页，中华书局出版。

② Perturbation Theory 在天体力学中译为摄动理论，在量子力学中译为微扰理论，在无线电技术中则常译为小参数理论。

莫斯科学派和基辅学派。

莫斯科学派以 Л. Мандельштам 为首，于 1930 年建立了莫斯科振动研究所，对非线性振动作过深入的研究。其中特别有名的学者为 Н. Д. Папалекси、А. А. Андронов、С. З. Хайкин、А. А. Витт 等。他们除了采用 Poincaré 的方法外，还运用了 Ляпунов 的稳定性理论。这个学派的代表作是 Андронов、Хайкин 与 Витт 合著的《振动理论》(1937 年初版, 1959 年再版)。

基辅学派主要有 Н. Н. Боголюбов、Н. М. Крылов 等人，他们的代表作是《非线性力学引论》(1937 年) 与《非线性振动理论中的渐近方法》(1955 年第一版, 1958 年第二版) 二书。

第二次世界大战期中和大战以后，美国和西欧开始研究非线性振动问题。较著名的学者有 N. Minorsky、J. J. Stoker、S. Lefschetz、LeCorbeiler 等人。Minorsky 于 1962 年发表了《非线性振荡》一书, Stoker 于 1950 年发表了《力学及电学系统中的非线性振动》一书, Lefschetz 将俄文《振动理论》等书译成英文。

非线性振动涉及到力学、声学、电磁学等各个学科领域，特别是电磁振荡与无线电技术有着极为密切的关系。可以说，非线性振荡理论主要是随着电工学发展起来的，其中许多要研究的对象都关系到非线性电路中的振荡问题。因此，研究非线性振荡理论对于无线电电子学来说，有着特殊重要的意义。由于非线性振荡在数学上表示为非线性微分方程，目前还没有解非线性微分方程的普遍方法，只能采用近似的解法，而且往往限于某些特殊方程形式。本书将只限于研究二阶常微分方程(或二元联立常微分方程)的数学模型。

## § 1.2 振动的基本概念

1. 任何一个振动都可以用时间或频率的函数来表示，即

$$\begin{cases} x = x(t) & \text{时间函数} \\ X = X(\omega) & \text{频率函数} \end{cases}$$

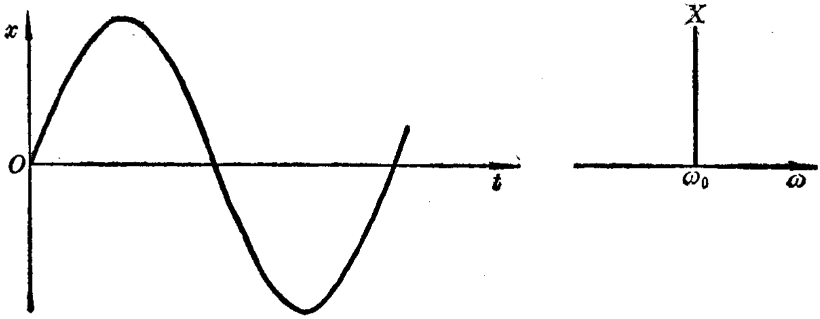
二者之间可用拉氏变换来互换。图 1.1 表示几种振动波形图与频谱图的例子。由图可知，振动可分为周期性振动与非周期性振动。

图 1.1(*a*)、(*b*)、(*c*)属于周期性振动，它又可以分为正弦振动 [图 (*a*) 与 (*b*)] 和张弛振动 [图 (*c*)]，二者的频谱都是离散的线状谱。

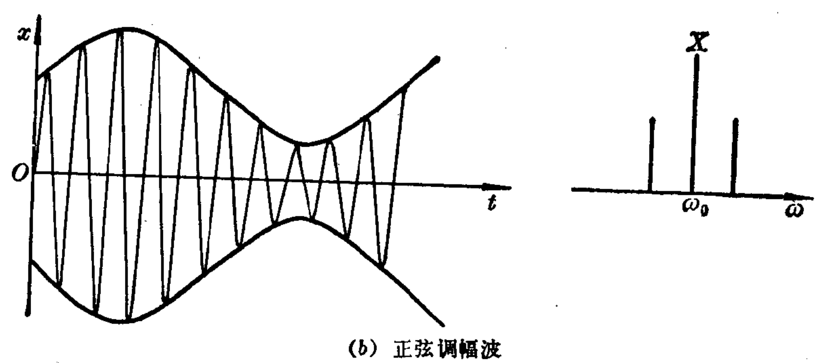
图 1.1(*d*)属于非周期性振动，它的频谱是连续的。

2. 产生振动的原因有：

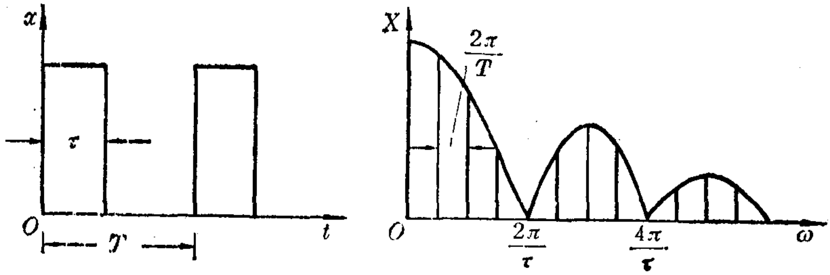
1) 自由振动(固有振动)：这种振动一般是衰减振动。振动频率决定于系统内部的参量，振幅和相位则决定于初始条件。



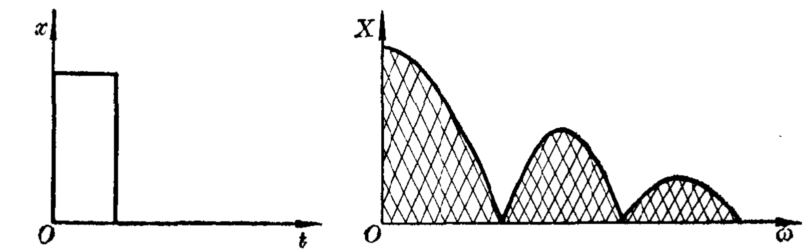

(*a*) 正弦波




(*b*) 正弦调幅波




(c) 周期性脉冲




(d) 单脉冲

图 1.1

2）强迫振动：是由外力而引起系统的振动。振动频率决定于外力的频率，振幅则决定于外力的大小与系统的内部参量等。

3）自激振动：系统不断地从外界吸取能量（单向）转变成为交变（振动）能量。振动频率决定于系统的内部参量，振幅则决定于内部参量与初值的大小，振动的相位则是任意的。自激系统一定是非线性系统。

4）参量振动：系统中的某一参量受到周期性外力（泵源）的作用，也可能产生振动。例如变容二极管在泵源的作用下，可能产生参量振动。

3. 振动系统可以分为线性系统与非线性系统两种。

如果系统中只含有线性元件，它的振动规律可以用线性微分

方程来表征，这就是线性系统。

如果系统中含有一个或一个以上的非线性元件(例如电子管、晶体管、有铁芯的线圈等)，系统的振动规律要用非线性微分方程来表征，这就是非线性系统。

线性系统的微分方程式可以求出准确的解，因此能够对该系统中的所有可能过程作出完全确定的结论。

非线性系统的微分方程则难以求出准确的解，所以，一般都是采用近似的方法来求解。我们主要是讨论这种系统的自激振动和在外力作用下的自激振动问题。

4. 电系统的阶和自由度

例如图 1.2 所示的 $RC$ 电路，有如下的电路方程:

$$\frac{1}{C}\int i\,dt+iR=0$$

或 $$i+RC\frac{di}{dt}=0 \qquad (1.1)$$

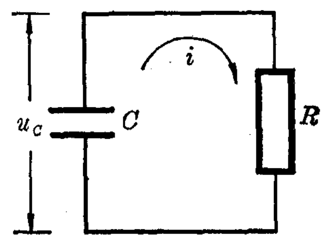



图 1.2

式(1.1)为一阶微分方程，即，包含一个储能元件的电路工作状态可由一个坐标决定。亦即，一个起始条件可单值地确定一阶微分方程式的解。

如果是 $RLC$ 串联回路，则电路方程式为

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0 \qquad (1.2)$$

方程式成为二阶的，即电路的工作状态由两个坐标决定。

由此可见，电系统的坐标数目等于系统的微分方程式的阶数，同时也等于独立储能器的数目。这个数目就称为电系统的阶数。$n$ 阶系统的状态由 $n$ 个独立的电压和电流(或它们的导数)确定，并可由 $n$ 阶微分方程来描述它们的变化。

现在我们来研究图 1.3 的电路。由图可得

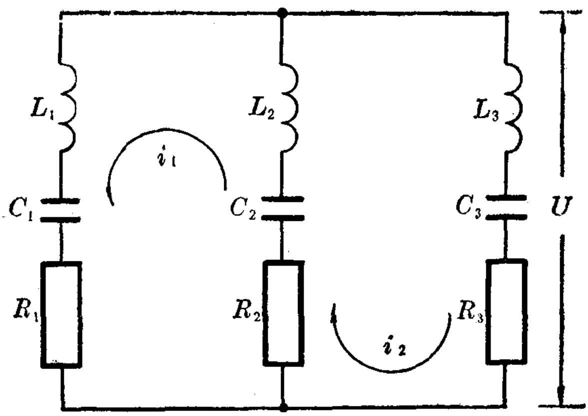



图 1.3

$$(L_1+L_2)\ddot{i}_1+(R_1+R_2)\dot{i}_1+\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)i_1$$

$$+L_2\ddot{i}_2+R_2\dot{i}_2+\frac{1}{C_2}i_2=0 \tag{1.3}$$

$$(L_2+L_3)\ddot{i}_2+(R_2+R_3)\dot{i}_2+\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)i_2$$

$$+L_2\ddot{i}_1+R_2\dot{i}_1+\frac{1}{C_2}i_1=0 \tag{1.4}$$

式中 $\dot{i}\equiv\frac{di}{dt}$, $\ddot{i}\equiv\frac{d^2 i}{dt^2}$. 以下我们将普遍采用这样的符号来表示变数对时间微分的次数。

显然，对于图 1.3 所示的电路，最少要断开两条支路，才能使它不再保留闭合回路。因此，它的自由度数目 $n=2$。也就是说，电路的自由度数目等于将电路断开，使某些回路不成为回路，或者使某些回路仅由电阻(耗能元件)组成所必需的最少断开次数。

如果将式(1.3)与式(1.4)进一步合并，则可化为一个四阶方程式。也就是说，图 1.3 是一个四阶系统。或者说，它的独立储能器只有四个。因为它虽然有六个储能器，但很容易证明，只要知道

两个电容器上的电压与两个电感线圈中的电流，则另外一个电容器上的电压与另外一个线圈中的电流即可被确定。因此，独立的储能器实际上只有四个。

上例是每一支路含有两种储能器的情况。如相应于这自由度的回路只含有一种储能器，则这个自由度称为简并的。如回路不包含任何储能器，则这个自由度称为双重简并的。按照这一定义，系统的阶数等于两倍自由度数目减去简并的数目。如图1.4所示的移相振荡器，它的自由度等于三，所以电路由三阶微分方程描述，而不是六阶方程。它是三次简并系统，电路中含有三个独立电容，因而是三阶系统。

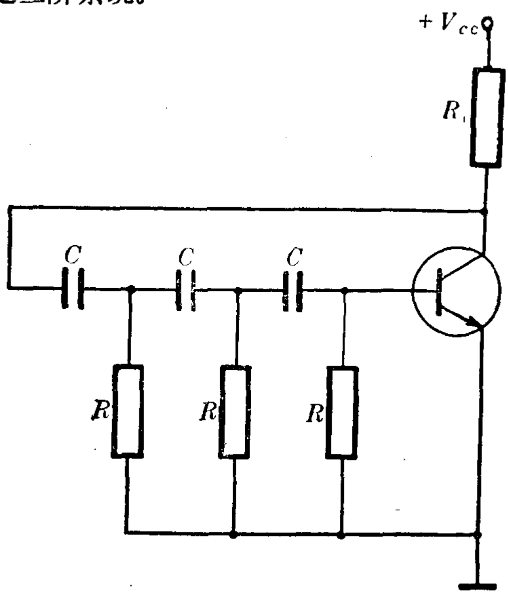



图 1.4

5. 自持和非自持系统

如果电路没有外部作用，或者虽有外部作用，但不依赖于时间，则系统的微分方程式不含有或不以明显的形式含有时间变数。这样的系统称为自持(自治)系统。例如，系统的微分方程为下列

形式:

$$\dot{x}=P(x, y), \qquad \dot{y}=Q(x, y) \tag{1.5}$$

式(1.5)表示二维的自持系统。

如果在系统上有交变的外电动势作用，或者系统在外部交变电动势作用下,对它的参量有严重的影响,则在这种系统的微分方程中,时间 $t$ 便以明显的形式出现。这样的系统就称为非自持(非自治)系统。例如,系统的微分方程为下列形式:

$$\dot{x}=P(x, y, t), \qquad \dot{y}=Q(x, y, t) \tag{1.6}$$

式(1.6)表示二维的非自持系统。

## § 1.3 研究非线性振荡问题的方法

研究非线性振荡问题的方法很多，本书主要介绍几何法和解析法。

1. 几何法(拓扑法)

这种方法的优点是: 所用的数学工具较简单; 通过这个方法可以看到振荡系统的全貌。它的缺点是: 不够准确、细致。因此,它适宜于作定性分析之用。

2. 解析法(分析法)

这种方法的优点是:在某一范围内可得出较准确的解,因此适用于定量分析。它的缺点是:数学工具较复杂,不易看出系统振荡的全貌。

以上两种方法可互为补充,以便得到较满意的结果。

# 第二章　自持系统的几何方法

## §2.1　相平面与相点

对于二维自持系统，可用两个一阶微分方程表示：

$$\dot{x}=P(x,y),\qquad \dot{y}=Q(x,y) \tag{2.1}$$

式中　$y\equiv\dot{x}$,　　$\dot{y}\equiv\ddot{x}$

上二式也可用一个二阶微分方程表示

$$F(\ddot{x},\dot{x},x)=0\quad 或\quad \ddot{x}+x=\mu f(x,\dot{x})\qquad (0<\mu\ll 1) \tag{2.2}$$

上式中，$x$, $y$ 所定义的平面叫作**相平面**；满足方程的点$(x, y)$叫作**相点**；相点运动(随时间 $t$ 而运动)的轨迹叫作**相轨迹**。相平面上使 $\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$ 的点$(x_0, y_0)$叫作**平衡点**，即

$$P(x_0,y_0)=0,\qquad Q(x_0,y_0)=0 \tag{2.1a}$$

显然，平衡点是方程式(2.1)的解。在数学上，平衡点也叫作奇点①。平衡点是振动理论中的一个非常重要的问题，下节将较详细地讨论。

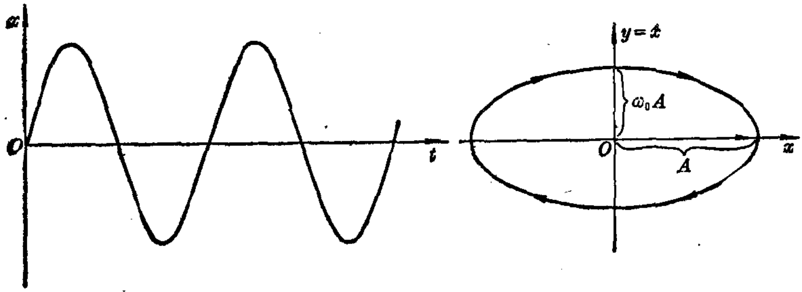
现在举几个例子来说明相轨迹。

[例 2.1-1]　设 $x=A\sin(\omega_0 t+\varphi)$，则 $y=\dot{x}=\omega_0 A\cos(\omega_0 t+\varphi)$由以上二式消去 $t$，即得

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{\omega_0^2A^2}=1 \tag{2.3}$$

① 平衡点有时不等于奇点，例如所谓"随遇平衡"区域中便会发生这种情况。但在工程上这种例外情形很少，所以一般将二者视为等同。

式(2.3)是一个椭圆方程。因此，在 $x$-$y$ 相平面上相点运动的轨迹是一个椭圆，如图 2.1($b$)所示。相点运动的方向可判断如下：




($a$) 波形图　　($b$) 相轨迹(相图)

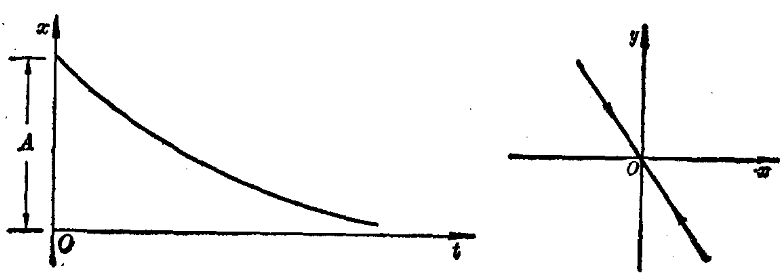
图 2.1

由于 $y=\frac{dx}{dt}$，因此当 $y>0$ 时，$\frac{dx}{dt}>0$，即 $x$ 随时间 $t$ 而增长；当 $y<0$ 时，则 $x$ 随时间 $t$ 而减小。因此，相点沿顺时针方向运动，并以 $\omega_0$ 的角频率在椭圆轨迹上周而复始地运动。

[例 2.1-2]　图 2.2($a$)为指数衰减曲线，其数学表示式为

$$x=Ae^{-\frac{t}{\tau}}\qquad(\tau\text{ 为时间常数})$$

则 $y=\dot{x}=-\frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$. 由以上二式消去 $t$，即得




($a$)　　($b$)

图 2.2

$$y=-\frac{x}{\tau}$$