规范场及其他物理问题讨论会文集

李华钟 谷超豪 周光召 主编

上海科学技术出版社

规范场及其他物理问题讨论会文集

李华钟 谷超豪 周光召 主编

上 海 科 学 技 术 出 版 社

内容简介

本文集是1982年9月份在复旦大学举行的《规范场及其他物理问题学术讨论会》的报告汇编．共收集了经典规范场、规范场的量子理论、格点规范场、手征场、磁单极、宇宙学和统计物理等方面的论文23篇．作者是我国在这些方面有成就的专家或他们的国外合作者．论文中叙述了他们的最新研究成果．

本书可供理论物理、数学等专业的科研、教学人员、研究生及高年级学生参考．

规范场及其他物理问题讨论会文集

李华钟 谷超豪 周光召 主编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 11.25 字数 248,000

1984年4月第1版 1984年4月第1次印刷

印数：1—2,900

统一书号：13119·1123 定价：（科五）1.55元

前　　言

1982年9月4、5两日，在上海复旦大学举行了规范场及其他物理问题学术讨论会．来自全国各高等学校及中国科学院的有关人员23人参加了会议，美国纽约州立大学石溪分校理论物理研究所聂华桐教授也应邀参加，会上共有17人作了学术报告，并在会内开展了讨论．本文集是会议报告的汇编，还包含了未能前来参加会议的几位学者所寄来的书面交流文章．会议所交流的研究成果，是在杨振宁教授的关怀和推动下取得的，许多工作还直接得到他的帮助和启发．与会人员对杨振宁教授在科学上的卓越成就，对他为发展我国科学事业所作出的多方面的努力都深表敬意，并衷心祝愿他今后为中国和世界的科学发展作出更大的贡献。

1982年9月

目　录

COLLECTIONS OF MEETING ON THE GAUGE FIELDS AND OTHER PHYSICAL PROBLEMS

CONTENTS

$SU(5)$ 大统一理论中的磁单极和双子解

马　中　骐

（中国科学院高能物理研究所）

提　　要

基于标准微分环路位相因子方法，我们得到了 $SU(5)$ 大统一模型中静态球对称规范势和 Higgs 场的一般形式，导出了它们满足的常微分方程，作为正则解在无穷远处的渐近形式，得到所有不等价的静态球对称点磁单极和点双子解。

一、引　　言

自从 1931 年 Dirac[1] 提出可能存在磁单极的想法以来，不少人在这领域进行了研究[2]．最近 Cabrera[3] 用超导环检测到一个可能的磁单极事例，将会进一步促进磁单极的理论和实验的研究．

在 $U(1)$ 规范理论中引进磁单极，必然会导致规范势有奇异弦．吴大峻、杨振宁教授[4] 运用纤维丛理论，引入区域规范 (Section gauge) 来解决这奇异性的问题．'t Hooft 和 Polyakov[5] 把 $U(1)$ 电磁场浸入到 $SO(3)$ 规范场中，再通过 Higgs 机制自发破缺到子群 $U(1)$，得到带有一个单位 Dirac 磁荷的能量有限的正则磁单极解：在空间无穷远处，Higgs 场趋于 Higgs 真空，规范场趋于吴-杨解[6]（称为点磁单极解），在有限区域，可以按照 't Hooft 变分方法[5]，引入试验函数，对能量表式进行变分，得到磁单极的数值解．

为了把这一方法运用到更现实的模型中去，首先会考虑 Weinberg-Salam 模型[7]，其次是 $SU(5)$ 大统一模型[8]．已经证明 Weinberg-Salam 模型没有磁单极解[9]，因此研究 $SU(5)$ 大统一模型中的磁单极解和双子解有很大的兴趣．和 't Hooft 一样，大家首先研究静态球对称的磁单极解，关键是找作为正则解在无穷远处边界条件的点磁单极解．方法主要有两类：一类以 Wilkinson-Goldhaber[10] 为代表，假定点磁单极解都可以通过奇异规范变换化到带奇异弦的 Abelian 规范去．在作了某些假设 (ansatz) 后，他们得到了在 Abelian 规范下点磁单极解的一般形式，并找到了变回无弦规范的奇异规范变换．他们没能导出静态球对称规范势满足的常微分方程组，因此无法讨论点双子解的一般形式[11]．另一类以 Corrigan-Olive-Fairlie-Nuyts[12] 为代表，他们希望直接在无弦规范中找出静态球对称规范势的一般形式及其运动方程，然后解出作为 $r\to\infty$ 边界条件的点磁单极解，但因未找到有效的工具，他们只处理了 $SU(3)$ 规范场，推广很困难．

杨振宁教授把不可积相因子方法[13] 引入规范理论，提出规范场的积分形式[14]．谷超豪教授进一步建立了环路位相因子方法[15]，这方法可以避免规范等价引起的困难，原则上确定了静态规范场和球对称规范场的可能形式[16]．引入适当的基底和一套运算公式，可以把

静态球对称规范势的一般形式表达出来[17]，并代入 Yang-Mills 方程[18]，得到关于 r 的常微分方程[17,19]，在 $r\to\infty$ 区域，找到全部可能的静态球对称点磁单极解和点双子解[19~21]. 本文讨论 $SU(5)$ 大统一模型中的静态球对称点磁单极解和点双子解.

二、$SU(5)$ 静态球对称规范势的一般形式和运动方程

根据 $SU(2)$ 规范理论的经验，人们猜想球对称规范势在转动前后可以通过常规范变换联系起来[10]. 由于不是一般地进行证明[22]，而是作为假设(ansatz)引进来，他们不了解具有这种性质的规范势所处的规范条件，因此在讨论解的等价性时存在问题[10].

谷超豪教授引进的标准微分环路位相因子，它满足相容条件

$$W^\mu(0,\ t)=0,\quad \boldsymbol{W}(\boldsymbol{r},\ t)\cdot\boldsymbol{r}=0, \tag{1}$$

它在规范变换中作常相似变换，由它可以决定规范势的一个等价类，且它本身就是这类中的一个规范势. 以后我们选择特定的规范(称为中心规范[23]，还允许作常数规范变换)，规范势就是标准微分环路位相因子. 用此方法可以证明，在空间转动和时间平移变换中，静态球对称规范势作如下变换[15,16]:

$$\begin{aligned} &W_\mu(Rx)=\mathscr{D}(R)\big[\sum_\nu W_\nu(x)(R^{-1})^\nu_\mu\big]\mathscr{D}(R)^{-1},\\ &W_\mu(\boldsymbol{r},\ t+d)=T(d)W_\mu(\boldsymbol{r},\ t)T(d)^{-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

$\mathscr{D}(R)$ 和 $T(d)$ 分别是转动群和时间平移群的表示，由它可对静态球对称规范势进行分类. 取适当相似变换，可使 $\mathscr{D}$ 取标准形式

$$\mathscr{D}(R)=\sum_j{}^{\oplus}\mathscr{D}^j(R), \tag{3}$$

因此行和列指标可用 a_j 标记，$a_j=j,\ j-1,\ \cdots,\ -j$. 已经证明[17] $T(d)$ 可取对角化形式

$$T(d)_{a_jb_k}=\delta_{jk}\delta_{ab}e^{i\alpha_jd},\qquad \sum_j\alpha_j(2j+1)=0, \tag{4}$$

这样，任意时空点的规范势可用 $t=0$ 时刻 z 轴(记作 x_0 点)上的规范势表出

$$\begin{aligned} &W_\mu(\boldsymbol{r},\ t)=T(t)W_\mu(\boldsymbol{r},\ 0)T(t)^{-1},\\ &W_\mu(x)=W_\mu(R^{-1}x_0)=\mathscr{D}(R)^{-1}\big[\sum_\nu W_\nu(x_0)R^\nu_\mu\big]\mathscr{D}(R),\\ &R=R(\varphi,\ \theta,\ 0), \end{aligned} \tag{5}$$

这等式又给 z 轴上的规范势一定的限制，它们必须满足

$$\begin{aligned} &W^1_{a_jb_k}(x_0)=(a-b)^2W^1_{a_jb_k}(x_0),\ W^2_{a_jb_k}(x_0)=-i(a-b)W^1_{a_jb_k}(x_0),\\ &W^3_{a_jb_k}(x_0)=0,\qquad (a-b)W^0_{a_jb_k}(x_0)=0. \end{aligned} \tag{6}$$

$SU(5)$ 大统一模型中有两个 Higgs 场：属伴随表示的 $\phi(x)$ 和属基础表示的 $\chi(x)$. 根据静态球对称的性质和相容条件 (1)，不难证明[19] 在转动和时间平移变换中它们也可通过同一常规范变换相联系，因此任意时空点的 Higgs 场也可用 $t=0$ 时刻 z 轴上的 Higgs 场表出:

$$\begin{aligned} &\phi(\boldsymbol{r},\ t)=T(t)\phi(\boldsymbol{r},\ 0)T(t)^{-1},\quad \chi(\boldsymbol{r},\ t)=T(t)\chi(\boldsymbol{r},\ 0),\\ &\phi(x)=\mathscr{D}(R)^{-1}\phi(x_0)\mathscr{D}(R),\quad \chi(x)=\mathscr{D}(R)^{-1}\chi(x_0). \end{aligned} \tag{7}$$

于是有

$$(a-b)\phi_{a_jb_k}(x_0)=0,\quad a\chi_{a_j}(x_0)=0. \tag{8}$$

引入适当的 5×5 和 5×1 矩阵基

$$
\begin{aligned}
&(I^{(1)}_{a_jb_k})_{cd}=\frac{1}{2}(\delta_{a_jc}\delta_{b_kd}+\delta_{b_kc}\delta_{a_jd}),\quad (I^{(2)}_{a_jb_k})_{cd}=-\frac{i}{2}(\delta_{a_jc}\delta_{b_kd}-\delta_{b_kc}\delta_{a_jd}),\\
&L^{(i)}_{a_jb_k}=\mathscr{D}(R^{-1})I^{(i)}_{a_jb_k}\mathscr{D}(R),\ i=1,\ 2,\\
&\boldsymbol{L}^{jk}_a=\hat{\boldsymbol{\theta}}L^{(1)}_{a_j(a-1)_k}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}L^{(2)}_{a_j(a-1)_k},\quad \boldsymbol{M}^{jk}_a=-\hat{\boldsymbol{\theta}}L^{(2)}_{a_j(a-1)_k}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}L^{(1)}_{a_j(a-1)_k},\\
&N^{jk}_a=N^{kj}_a=L^{(1)}_{a_ja_k},\ \tilde{N}^{jk}_a=-\tilde{N}^{kj}_a=-L^{(2)}_{a_ja_k},\\
&(K_{a_j})_c=\delta_{a_jc},\ (K^j_a)_c=[\mathscr{D}(R)^{-1}(K_{a_j})]_c=e^{-ic\varphi}d^j_{ac}(\theta),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

其中 $R=R(\varphi,\ \theta,\ 0)$．这样可把 $SU(5)$ 静态球对称规范势和 Higgs 场一般地表为

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{W}(x)=-\frac{1}{er}\sum_{ja}\Gamma^j_a\boldsymbol{M}^{jj}_a+\frac{1}{er}\sum_{jka}[\boldsymbol{L}^{jk}_a\mathrm{Re}+\boldsymbol{M}^{jk}_a\mathrm{Im}]w^{jk}_a,\\
&W^0(x)=\frac{1}{er}\sum_{jka}[N^{jk}_a\mathrm{Re}+\tilde{N}^{jk}_a\mathrm{Im}]P^{jk}_a,\\
&\phi(x)=\frac{1}{er}\sum_{jka}[N^{jk}_a\mathrm{Re}+\tilde{N}^{jk}_a\mathrm{Im}]H^{jk}_a,\\
&\chi(x)=\frac{1}{er}\sum\omega^j_0(r,\ t)K^j_0,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Gamma^j_a=\sqrt{(j+a)(j-a+1)},\quad w^{jk}_a(r,\ t)=u^{jk}_a(r,\ t)+iv^{jk}_a(r,\ t),\\
&P^{jk}_a(r,\ t)=p^{jk}_a(r,\ t)+i\tilde{p}^{jk}_a(r,\ t)=P^{kj}_a(r,\ t)^*,\\
&H^{jk}_a(r,\ t)=h^{jk}_a(r,\ t)+i\tilde{h}^{jk}_a(r,\ t)=H^{kj}_a(r,\ t)^*,
\end{aligned}
\right\}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{W}^{jk}_a=i(\alpha_j-\alpha_k)W^{jk}_a,\ \dot{P}^{jk}_a=i(\alpha_j-\alpha_k)P^{jk}_a,\\
&\dot{H}^{jk}_a=i(\alpha_j-\alpha_k)H^{jk}_a,\ \dot{\omega}^j_0=i\alpha_j\omega^j_0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

带点的量代表对时间微商，Re 和 Im 代表取实部和虚部．要求 w、P、H 和 ω 处处存在二级微商．

在代入 Yang-Mills 方程时，注意到场通过矢量代数或矢量分析运算后仍满足类似于(5)和(7)式的变换性质，从而只需要在 z 轴附近来进行计算．通过直接而又繁杂的运算后，可以得到运动方程[19]，这是关于 r 的常微分方程，这里不列出来了．但应指出，$\boldsymbol{W}$ 的第一项满足无源 Yang-Mills 方程，这正是浸入的 $SU(2)$ 吴-杨解

$$
W^0=0,\ \boldsymbol{W}_{wy}=-\frac{1}{er}\sum_{ja}\Gamma^j_a\boldsymbol{M}^{jj}_a.
\tag{13}
$$

三、点磁单极解和点双子解

在无穷远球面上，Higgs 场趋于 Higgs 真空

$$
\begin{aligned}
&V(\phi,\ \chi)=0,\ V'_\phi(\phi,\ \chi)=0,\ \frac{\partial V}{\partial\chi^+}=0,\\
&\phi=\langle\phi\rangle_{VE},\ \chi=\langle\chi\rangle_{VE},\\
&D^\mu\phi=O(r^{-2}),\ D^\mu\chi=O(r^{-2}),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

在每一空间确定方向，可通过规范变换，使 $\langle\phi\rangle_{VE}$ 对角化，对角元为 $A\nu$ 和 $B\nu$，$A=\frac{1}{\sqrt{15}}$，$B=-\frac{3}{2\sqrt{15}}$，$\nu\sim10^{15}\,\mathrm{GeV}$，$\langle\chi\rangle_{VE}$ 只有一个元素不为零，等于 $\omega\sim10^2\,\mathrm{GeV}$，而且与之相应的 $\langle\phi\rangle_{VE}$ 对角元是 $B\nu$．

设在无穷远处没有广义荷，则广义场强

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{r}}O(r^{-2}),\ \boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{r}}O(r^{-2}). \tag{15}$$

把规范势和 Higgs 场按 $\frac{1}{r}$ 展开

$$\begin{aligned}
W_a^{jk}&=W_a^{jk(1)}(t)+W_a^{jk(2)}(t)/r+\cdots,\\
P_a^{jk}&=P_a^{jk(0)}(t)er+P_a^{jk(1)}(t)+P_a^{jk(2)}(t)/r+\cdots,\\
H_a^{jk}&=H_a^{jk(0)}(t)er+H_a^{jk(1)}(t)+H_a^{jk(2)}(t)/r+\cdots,\\
\omega_0^j&=\omega_0^{j(0)}(t)er+\omega_0^{j(1)}(t)+\omega_0^{j(2)}(t)/r+\cdots.
\end{aligned} \tag{16}$$

我们的任务是要计算这些展开系数，至少前两项的系数.

点双子解具有二重性. 一方面，它作为正则解的标准微分环路位相因子在无穷远区域的渐近形式，在规范变换中作常相似变换，在限制表示取标准形式(3, 4)后，允许的相似变换的自由度是不大的. 另一方面，局限于无穷远球面附近，因运动方程是规范协变的，由一组点双子解出发，通过适当的规范变换(称小群变换)，仍满足运动方程，并有可能仍满足上述作为点双子解的条件. 一般说来，这样的点双子解并不等价，但它们可以互相推演出来，我们称它们为准等价解. 我们的任务简化为找出所有不准等价的点双子解.

存在两类小群变换：一是(4)式的 $T(t)^{-1}$ 变换，它能消去解中的时间变量，二是下面形式的变换

$$U(\hat{\boldsymbol{r}})=\mathscr{D}(R)^{-1}U_0\mathscr{D}(R),\ R=R(\varphi,\theta,0), \tag{17}$$

U_0 与 $\mathscr{D}(R)$ 的生成元 J_z 对易. 根据运动方程，可通过小群变换把点双子解化为简单的标准形式. 首先通过小群变换把 $P^{(0)}$ 和 $H^{(0)}$ 对角化($H_a^{jj(0)}$ 有三个等于 $A\nu$，两个等于 $B\nu$)，$\omega^{(0)}$ 只有一个分量 $\omega_0^{j(0)}=\omega$ 不为零(且相应 $H_a^{jj(0)}=B\nu$). 其次通过小群变换把 $P^{(1)}$ 对角化和 $H^{(1)}=0$, $\omega^{(1)}=0$[1). 最后因 $w_a^{jk(1)}$ 满足

$$\begin{aligned}
&w_a^{jk(1)}(P_a^{jj(i)}-P_{a-1}^{kk(i)})=0,\quad i=0,\ 1,\\
&w_a^{jk(1)}(H_a^{jj(0)}-H_{a-1}^{kk(0)})=0,\\
&w_1^{jk(1)}\omega_0^{k(0)}=0,\ w_0^{kj(1)}\omega_0^{k(0)*}=0,
\end{aligned} \tag{18}$$

再通过小群变换化为

$$\begin{aligned}
&w_a^{jk(1)}=iv_a^{jk},\ v_a^{jk}\geqslant 0,\\
&v_a^{jk}v_a^{lk}=\delta_{jl}(v_a^{jk})^2,\ v_a^{jk}v_a^{jl}=\delta_{kl}(v_a^{jk})^2.
\end{aligned} \tag{19}$$

对 m 个相连的非零 v

$$v_{a+1}^{jj_1}=0,\ v_a^{j_1j_2}\neq 0,\ v_{a-1}^{j_2j_3}\neq 0,\ \cdots,\ v_{a-m+1}^{j_mj_{m+1}}\neq 0,\ v_{a-m}^{j_{m+1}k}=0,$$

有

$$v_{a-n+1}^{j_nj_{n+1}}=\sqrt{n(m-n+1)}. \tag{20}$$

这就是点双子解标准形式. 如果处处没有广义电荷，$\mathscr{E}=0$, $W^0=0$，点双子解退化为点磁单极解. 在无穷远处的电荷算符 Q 在此标准形式的解中为

$$Q=\frac{1}{\sqrt{24}}\sum_{ja}N_a^{jj}q_a^{jj},$$

---

1) 存在某些特殊情况，使某些 $P^{(1)}$、$H^{(1)}$ 的非对角元和 $\omega^{(1)}$ 可不为零，但它们有一定联系，且使解的能量升高，这里不仔细讨论，详见文献[19].

$$q_a^{jj}=\begin{cases}-1, \\ 3, \\ 0,\end{cases} \quad \text{当} \quad H_a^{jj(0)}=\begin{cases}A\nu, \\ B\nu,\ \omega_a^{j(0)}=0, \\ B\nu,\ \omega_a^{j(0)}=\omega,\end{cases} \tag{21}$$

因此准等价解有相同的总电荷和总磁荷为

$$\begin{aligned} q&=\oiint d\boldsymbol{s}\cdot 2\mathrm{Tr}(\mathscr{E}Q)=q_0\sum_{ja}\frac{p_a^{jj(1)}}{\alpha}\frac{3}{4}q_a^{jj}, \\ q_0&=\frac{1}{3}q_e=\frac{1}{\sqrt{24}}e,\ \ \alpha=\frac{q_e^2}{4\pi}, \\ g&=\oiint d\boldsymbol{s}\cdot 2\mathrm{Tr}(\mathscr{B}Q)=g_0\sum_j\sum_{a>0}2a\frac{1}{4}(q_a^{jj}-q_{-a}^{jj}), \\ g_0&=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{4\pi}{e}=\frac{4\pi}{6q_0}=\frac{2\pi}{q_e}. \end{aligned} \tag{22}$$

q_e 是正电子电荷，总磁荷 g 是单位磁荷 g_0 的整数倍，而 g_0 满足 Dirac 量子化条件．经典规范理论中，总电荷不是量子化的[11]．单位电荷 q_0 和单位磁荷 g_0 满足广义的 Dirac 量子化条件[24~26]．

应该用 't Hooft 变分方法，具体计算这些磁单极解和双子解的数值解和总能量，从而确定那些解是稳定的．

Daniel-Lazarides-Shafi 根据广义磁荷量子化条件[24]

$$\mathscr{B}=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{cr^2}\mathscr{B},\quad \exp(i4\pi\mathscr{B})=\mathbf{1}. \tag{23}$$

对 $SU(5)$ 大统一模型的磁单极解进行分类．他们引入磁群 $SU(3)^c_M\times U(1)_M$ 的概念．从实际解看来，磁单极解并不一定构成磁群 $SU(3)^c_M$ 的多重态．

参 考 文 献

[1] Divac, P. A. M., *Proc. Roy. Soc.* (London), **A133** (1931), 60.

[2] Steven, D. M., VPI-EPP-73-5; Corrigan, Jr., R. A., FERMILAB-77/42; Craven, R. E.. Trower, W. P. & Corrigan, Jr., R. A., FERMILAB-81/37.

[3] Cabrera, B., *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982), 1378.

[4] Wu, T. T. & Yang, C. N., *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 3845.

[5] 't Hooft, G., *Nucl. Phys.*, **B79** (1974), 194; Polyakov, A. M., *JETP Lett.*, **20** (1974), 194.

[6] Wu, T. T. & Yang, C. N., Properties of Matter under Unusual Conditions (Ed. Mark. H & Fernbach, S) 1969 (New York, Interscience) p. 344; *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 3843.

[7] Glashow, S. L., *Nucl. Phys.*, **22** (1961), 579; Weinberg, S., *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1264; Salam, A., *Proc. of the 8th Nobel Symp. Stockholm* (Ed. N. Svartholm), (1968), 367.

[8] Georgi, H., & Glashow, S. L., *Phys. Rev. Lett.*, **32** (1974), 438; Pati, J. C. & Salam, A.. *Phys. Rev.*, **D10** (1974), 275; Fritzsch, H. & Minkowski, P., *Ann. Phys.*, **93** (1975), 193; *Nucl. Phys.*, **B103** (1976), 61.

[9] Actor, A., *Rev. Mod. Phys.*, **51** (1979), 461.

[10] Wilkinson, D. & Goldhaber, A. S., *Phys. Rev.*, **D16** (1977), 1221.

[11] Dokos, C. P. & Tomaras, T. N., *Phys. Rev.*, **D21** (1980), 2940.

[12] Corrigan, E. Olive, D. I., Fairlie, D. B. & Nuyts, J., *Nucl. Phys.*, **B106** (1976), 475.

[13] Mandelstam, S., *Ann. Phys.* (N. Y.), **19** (1962), 25.

[14] Yang, C. N., *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974), 445.

[15] 谷超豪，复旦学报(自然科学版)，**15**: 2 (1976), 51.

[16] 谷超豪，复旦学报(自然科学版)，**16**: 2 (1977), 30.

[17] 马中骐,中国科学(A辑),1982, **5**: 421.
[18] Yang, C. N. & Mills, R. L., *Phys. Rev.*, **96** (1954), 191.
[19] 马中骐,BIHEP-TH-82-13, 1982. Nucl. Phys. B(1983).
[20] 马中骐,中国科学 (A辑), 1982, **6**: 511.
[21] 马中骐,科学通报, **27** (1982), 599.
[22] Romanov, V. N., Schwarz, A. S. & Tyupkin, Yu. S., *Nucl. Phys.*, **B130** (1977), 209.
[23] Chaohao, Gu., *Phys. Rep.*, **80** (1981), 251.
[24] Goddard, P. & Olive, D. I., *Rep. Prog. Phys.*, **41** (1978), 1357.
[25] 谷超豪,复旦学报(自然科学版), **15**: 3～4 (1976); 445,高能物理与核物理, **2** (1978), 295.
[26] 聂华桐、章礼南,聂华桐在中国科学院理论物理研究所的报告, 1982, 8.

宇宙学相变、磁单极及其他

方励之　吴忠超
(中国科学技术大学)

一

含有自发破缺机制的场论，一般都提供了真空相变的可能．随着温度的变化，Higgs场值将从对称相变成破缺相，或者相反．因此，可以预期，在极早期宇宙中，随着宇宙的膨胀及宇宙温度的下降，会发生这类相变[1]．

对于$SU(5)$或$SU(10)$的GUT理论，真空相变发生于大统一能量$\sim 10^{15}$ GeV，以及弱电统一能量$\sim 10^{2}$ GeV．它们所相应的宇宙年龄分别是10^{-36}秒及10^{-12}秒．

这种相变的性质如何？它对宇宙的演化有怎样的影响？为了研究这些问题，可采用宇宙学的标准方法，即分析这种早期宇宙中的物理过程会留下那些可观测的遗迹．

宇宙学相变所可能留下的遗迹之一就是磁单极．在自发破缺规范理论中，有可能存在所谓 't Hooft–Polyakov 单极子[2]．特别地，如果规范群是半单纯的，破缺之后的群仍含有相应于电磁场的$U(1)$群，则相变时形成稳定磁单极将是不可避免的．这种磁单极的质量可由下式估计：

$$m_m \sim m_X/\alpha, \tag{1}$$

其中m_X为轻一夸克规范玻色子的质量，一般为$10^{14\sim15}$GeV，α表示大统一耦合常数g^2，有$\alpha = g^2/4\pi = 0.025$，因此，最终有

$$m_m \sim 10^{16}\ \mathrm{GeV}. \tag{2}$$

这种磁单极是研究极早期宇宙学的一种重要的“探针”．

二

迄今已有许多方法用来判定或测量磁单极在宇宙学中的数量．

根据月岩及陨石样品所给出的上限是[3]

$$\frac{n_m}{n_B} < 10^{-28}, \tag{3}$$

其中n_m及n_B分别是磁单极及重子的数密度．这个上限只适用于较轻的磁单极，即$m_m \lesssim 5 \times 10^{14}$ GeV．因为大质量的磁单极，可能在太阳系形成的过程中已沉降到地球中心或者其他行星的中心了．

宇宙线测量也给出一个上限[4]．若磁单极的质量$m_m \leqslant 10^{16}$ GeV，则只当速度$\beta > 3\times10^{-3}$时，才有可觉察的电离作用，由此得到，$\beta > 5\times10^{-3}$的磁单极的流量上限是

$$f \leqslant 300\ 米^{-2}\ 年^{-1}. \tag{4}$$

根据星系磁场的能量平衡，可以给出一个更强的上限[5]．星系磁场虽然平均只有几个微高斯，但它足以把 $\beta\sim10^{-2}$—10^{-3} 的磁单极加速到 10^{11}GeV．因此，若磁单极太多，星系磁场将会由于这种加速而被消耗掉．根据这一考虑，得到

$$\frac{n_m}{n_B}\lesssim10^{-23}. \tag{5}$$

或在银河系中受到加速的磁单极流为

$$f\lesssim10^{-3}\ \text{米}^{-2}\ \text{年}^{-1}. \tag{6}$$

这个结论也可以利用磁白矮星得到[6]．因为，有些白矮星的年龄已达 10^9 年，要求它们的磁场不被磁单极消耗掉，n_m 同样应当满足条件(5)．

以上给出的上限大体只涉及现今存在的磁单极，或者星系形成之后还存在的磁单极．如果磁单极有较快的湮没，则上述结果并不适用于极早期宇宙的情况．

根据宇宙的质量密度，可以给出一个更一般的上限．由减速参数的测定可知，宇宙质量密度不可能超过临界密度 ρ_c 太多[7]，ρ_c 由下式给出：

$$\rho_c=1.9\times10^{-29}h^2\ \text{克/厘米}^3, \tag{7}$$

其中 $h=H_0/100$ 公里/秒·百万秒差距，H_0 是现今的哈勃常数．因此，磁单极的数密度的上限为

$$n_m\lesssim\frac{\rho_c}{m_m}\sim10^{-21}\ \text{厘米}^{-3}, \tag{8}$$

由此即有

$$\frac{n_m}{n_B}<10^{-15}. \tag{9}$$

这个上限适用于任何宇宙时期．

三

如果自发破缺相变是二级的，则 n_m 可由如下方式加以估计．

Higgs 场值相当于序参数，在对称相中有 $\langle\phi\rangle=0$，在破缺相有 $|\langle\phi\rangle|=\phi_0$．两相之间的自由能密度之差为

$$\Delta V\sim b\phi_0^4, \tag{10}$$

其中 b 是 Higgs 场的 4 次幂的自耦合系数．

由 ΔV 可定义所谓 Ginzburg 温度 T_G

$$T_G\equiv\frac{4\pi}{3}\xi^3\Delta V, \tag{11}$$

其中 ξ 是相干尺度，它由下式给出[8]

$$\xi\sim1/b^{1/2}\phi_0\sim1/bT_G. \tag{12}$$

一般说，T_G 与相变温度 T_c 是差不多的．

当宇宙温度 T 高于 T_G 时，体系可在简并的破缺相之间跃迁．当 $T<T_G$ 时，$\langle\phi\rangle$ 处于一个确定的极小值附近，至于选择那一个极小，则是完全无规的，在不同区域中将有不同的破缺相．磁单极即可能在这些区域的交接之处形成．这些区域的长度尺度为 ξ．由此不难求得磁单极的数密度．

在极早期宇宙中，还有另一个重要的长度尺度，即粒子视界．大于粒子视界的两个区域之间可以认为是相互独立的．因此，也可以用粒子视界来估计磁单极的数密度，它的适用范围更与具体模型无关．

极早期的宇宙解是[9]

$$t=\left(\frac{3}{32\pi G\rho}\right)^{1/2}, \tag{13}$$

其中

$$\rho c^2=N(T)\frac{1}{2}aT^4, \tag{14}$$

$$N(T)=g_B(T)+\frac{7}{8}g_F(T), \tag{15}$$

$g_B(T)$ 及 $g_F(T)$ 分别是在温度为 T 时的相对论性玻色子及费米子的手征态数．对于 $SU(5)$，当 T 大于所有粒子的静质量时，有

$$N=160. \tag{16}$$

因此，当 $T=T_G$ 时，粒子视界为

$$d\simeq 2ct=2c\left(\frac{3c^2}{32\pi Ga}\right)^{1/2}N^{-1/2}T_G^{-2}, \tag{17}$$

几个相变单元的交界，将产生一个磁单极，因此，磁单极至少应有

$$n_m>\frac{p}{\frac{4\pi}{3}d^3}, \tag{18}$$

其中 p 决定于规范群的性质，典型情况 $p=\frac{1}{8}$，故有[10]

$$\frac{n_m}{n_B}\gtrsim N^{1/2}p\cdot 10^{-4}. \tag{19}$$

可见，这个下限远大于式(9)所给出的观测上限，二者相差达 10 个数量级之巨．

这个差别，就是 GUT 宇宙学中的一个疑难，磁单极过多疑难[11]．

四

解决磁单极疑难的一种试探是认为相变不是二级的，而是一级的[12]．

一级相变的图象是当温度下降到临界温度 T_C 后，对称相并不立即变成破缺相，而是形成过冷状态．这是因为，对称相与破缺相之间有势垒存在．由隧道效应克服这个势垒之后，破缺相才出现，一般呈泡状．泡中真空处于破缺相，泡的外面仍然是对称相，即假真空相．泡形成后，开始膨胀，使假真空区域变小，变成破缺相．相变能变成泡壁的动能．泡壁之间发生碰撞把这些动能热化，再度加热宇宙，使宇宙从过冷状态回复到正常．

现在我们来估计一级相变中磁单极的生成特点．

仍以 ΔV 表示势垒态的能量密度，并用 ε 表示两种相之间的能量密度差．若 $\Delta V\gg\varepsilon$，则在单位四体积中泡的形成率为[13]

$$P\sim\varepsilon e^{-B}, \tag{20}$$

其中 $B\sim(\Delta V)^2\phi_0^4\varepsilon^{-3}$．泡的半径为 $(\Delta V)^{1/2}\phi_0\varepsilon^{-1}$，泡壁的厚度为 $\phi_0(\Delta V)^{1/2}$．

由于现今宇宙中没有宇宙学项，或极小，因此，在破缺相中也应没有大的宇宙学项．这

样，在对称相中必有大的宇宙学项，并且是正的，即 $\Lambda>0$. 过冷阶段的膨胀，使物质热能很快下降，因此，Λ 将占主导地位，即在过冷阶段宇宙成为 de Sitter 型的，其标度因子 $R(t)$ 有下列形式：

$$R(t)\propto e^{Ht}, \tag{21}$$

其中 H 为哈勃常数.

在 de Sitter 背景中，破缺相的泡的形成性质取决于形成率 P 与宇宙膨胀率 H 二者之间的关系. 如果形成率的特征时标小于宇宙膨胀时标，即

$$P^{1/4}\ll H, \tag{22}$$

则过冷阶段相当短，相变几乎是在 T_C 时代立即就完成了. 这种情况下磁单极的数密度仍由粒子视界决定，结果与二级相变情况是大体一样的. 仍不能解决磁单极过多问题.

若泡的形成时标比宇宙膨胀时标长，即

$$P^{1/4}\gg H, \tag{23}$$

则宇宙处于过冷阶段的时间相当长，而泡数则较少. 这时，泡间的碰撞很少，每个泡都会长得很大. 这就会造成下列的困难：1. 宇宙在相变之后的一个长时期里没有热化. 但是，另一方面，在大统一相变之后的粒子生成期，宇宙应是热化了的[14]，在弱电相变之后的核合成期，宇宙也应是热化了的[9]，故太长的过冷阶段会与重子反重子不对称，以及氦丰度两个重要结果相矛盾；2. 巨大的泡可能引起大的非均匀性，这一点是与宇宙在大尺度上的均匀的各向同性的事实相矛盾的[15].

因此，看来只有适中的形成率，即

$$P^{1/4}\sim H \tag{24}$$

或许有可能得到圆满的结果，即一方面不会产生太大的非均匀性，另一方面又不会引起太多的磁单极. 不过，这种情况的细节，尚有待进一步的研究.

泡间的碰撞，还可能形成黑洞，这是原初黑洞形成的一种机制[16,17]. 在(24)情况下会有相当一部分质量变成原初黑洞[17]. 对于大统一相变，这种原初黑洞的质量约为 10^{3} 克，它们在宇宙早期就蒸发掉了，故不与观测矛盾. 对于弱电统一相变，原初黑洞的质量约为 10^{28} 克，它们到今天也只有很小的蒸发，不与背景辐射的观测相矛盾. 但它们对质量密度有明显的贡献，这一点是有待观测检验的.

五

相变能的热化主要依靠泡壁之间的碰撞. 泡壁之间的碰撞会引起什么现象？本节讨论一种最简单的情况，两种球状泡的相碰[17,18].

仍讨论 Higgs 场 ϕ，在两个独立形式的泡中，Higgs 场值一般是不同的，但可以在规范群 G 中找到一个 $U(1)$ 子群去连接它们. 这样，在两泡情况相当于一复标量场耦合于电磁场，故两泡的 Higgs 场有下列关系：

$$\begin{gathered}\phi_1=e^{i\alpha}\phi_2,\\|\phi_1|=|\phi_2|=\phi_0,\end{gathered} \tag{25}$$

α 称为相差.

在泡出现之前，假真空相由 de Sitter 度规描写，宇宙常数为 $\Lambda=8\pi\varepsilon$，具有 $O(4,1)$ 对