离散数学基础

LI SAN SHU XUE JI CHU

计算机专业教材

p	q	¬p	∨	∧
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

耿素云 屈婉玲 编著

北京大学出版社

离散数学基础

耿素云　屈婉玲　编著

北京大学出版社
北　京

新登字(京)159号

图书在版编目(CIP)数据

离散数学基础/耿素云,屈婉玲编著. —北京: 北京大学出版社, 1994.7

ISBN 7-301-02616-1

Ⅰ. 离… Ⅱ. ①耿… ②屈… Ⅲ. 离散数学-基础理论 Ⅳ. O158

出版者地址: 北京大学校内
邮政编码: 100871
排 印 者: 北京大学印刷厂
发 行 者: 北京大学出版社
经 销 者: 新华书店
850×1168毫米 32开本 11.75印张 285千字
1994年7月第一版 1994年7月第一次印刷
印数: 0001—5 000册
定 价: 10.00元

前言

离散数学是现代数学的一个分支．通过这门课程的学习，可以培养学生的抽象思维和严格逻辑推理的能力，并使他们掌握处理离散结构所必须的描述工具和方法．离散数学是计算机专业的一门重要的专业基础课，它在计算机科学与技术中有着广泛的应用．

近十多年来，许多离散数学教材陆续出版，其中大多数教材的内容是针对计算机专业本科水平的，对于专科学生来说，内容显得过多、过深．为此，我们编写了《离散数学基础》这本书做为计算机专业大学专科的离散数学教材，同时也可以做为相关专业大学本科或专科的离散数学教材或教学参考书．当然也可以做为其它专业离散数学爱好者入门的参考书．

本书不着重于学科体系的完整和定理的证明，而是遵照理论联系实际的宗旨，突出重点，精心选材，使得读者能在较短的时间内掌握离散数学中最基本的理论、概念和方法．本书在写作上力求突出以下特点：选材精练，内容严谨，讲解详细，例题丰富．并且每章最后都附有例题分析，主要着重于综合练习和典型习题的解题要领．为帮助读者掌握课程的内容，书中配有较多的习题，并在全书的最后给出部分习题的解答或提示．

本书的内容共分四个部分：

第一部分：数理逻辑(第一、二章)；

第二部分：集合论(第三、四章)；

第三部分：代数结构(第五、六章)；

第四部分：图论(第七、八、九章)．

主要内容涉及命题逻辑、一阶谓词逻辑；集合的基本概念和运算、二元关系和函数；代数系统的一般概念、半群、群、格与布尔代数；图的基本概念、树及其应用，二部图、欧拉图、哈密尔顿图、平面图等。

本书第一、二、七、八、九章由耿素云编写，第三、四、五、六章由屈婉玲编写。

由于水平所限，加之时间仓促，错误和疏漏之处难免，恳请读者批评指正。

编 者

1994.3.27.于燕园

目　　录

第一部分　数理逻辑

第二部分　集　合　论

第三部分　代数结构

第四部分　图　　论

第一部分

数 理 逻 辑

第一章 命题逻辑

1.1 命题与联结词

数理逻辑研究的中心问题是推理，而推理的前提和结论都是表达判断的陈述句。因而表达判断的陈述句就成了推理的基本要素。在数理逻辑中，称能判断真假但不能既真又假的陈述句为**命题**。就是说，做为命题的陈述句所表达的判断只有两种结果：正确的或错误的，称这种判断结果为命题的**真值**。真值只能取两个值：真或假。真对应判断正确，假对应判断错误。任何命题的真值都是唯一的，称真值为真的命题为**真命题**，真值为假的命题为**假命题**。判断给定的句子是否为命题，应首先判断它是否为陈述句，再判断它是否有唯一的真值。若它是具有唯一真值的陈述句，它就是命题。

例1.1 判断下列句子中哪些是命题。

(1) $\sqrt{3}$是有理数。

(2) 2是素数。

(3) $x+y>10$。

(4) 太阳从西方升起。

(5) 乌鸦是黑色的。

(6) 这个小男孩多勇敢呀！

(7) 明年中秋节的晚上是晴天。

(8) 您贵姓？

(9) 请把门开开！

(10)地球外的星球上也有生物。

解 在以上10个句子中，(6)是感叹句，(8)是疑问句，(9)是祈使句，它们都不是陈述句，因而都不是命题。其余7个句子都是陈述句，但也不都是命题。其中的(3)就不是命题，由于 x 与 y 的不确定性，使得该陈述句的真值不唯一。当 $x=5$，$y=8$时，$5+8>10$ 正确，而当 $x=5$，$y=4$ 时，$5+4>10$ 不正确，因而(3)不是命题。其余的6个陈述句都是命题，其中，(2)，(5)是真命题，(1)，(4)是假命题。(7) 的真值虽然现在还不知道，但到明年中秋节就知道了，因而(7)也是具有唯一真值的陈述句，所以是命题。(10)的真值也是唯一的，只是现在还不知道而已。随着科学技术的发展，它的真值也会知道的。因而它也是命题。

从以上的分析可以看出，命题一定是陈述句，但陈述句不一定是命题。另外还可以看出，真值是否唯一与我们是否知道它是两回事。

为了能用数学方法来研究命题之间的逻辑关系和推理，需要将命题符号化，本书中用 $p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots$ 表示命题。例如，在例1.1中，

p：$\sqrt{3}$ 是有理数。

q： 2是素数。…

在数理逻辑中，将命题的真值也符号化，本书中，用1表示“真”，用0表示“假”。在例1.1中，命题(2)，(5)的真值为1，(1)，(4)的真值为0。

以上讨论的命题都是简单的陈述句，它们都不能分成更简单的陈述句，这样的命题称为**简单命题**或**原子命题**。下例中给出的命题都不是简单命题。

例1.2 (1) 10不是素数。

(2) 2和3都是素数。

(3) 2或4是素数。

(4) 若数 a 是4的倍数，则它一定是2的倍数。

(5) 数 a 是偶数当且仅当它能被 2 整除。

(6) 5 不是素数。

(7) 2 和 4 都是素数。

(8) 6 或 8 是素数。

(9) 若数 a 能被 2 整除，则它一定能被 4 整除。

(10) 角 A 与角 B 相等当且仅当 A 与 B 是对顶角。

以上命题由哪些联结词联结而成的？

解 本例中给出的10个句子均具有唯一真值，它们都是命题。其中(1)—(5)真值为1，(6)—(10)真值为0。(1),(6)中使用了联结词“非”，(2)，(7)中使用了联结词“和”，(3)，(8)中使用了联结词“或”，(4)，(9)中使用了联结词“如果，则”，(5),(10)中使用了联结词“当且仅当”。

称由简单命题用联结词联结而成的命题为**复合命题**。例 1.2 中给出的10个命题都是复合命题，而且都是最基本的复合命题。它们中所用联结词都是自然语言中的联结词。在下面几个定义中，将给出联结词的精确定义，并将它们符号化。

定义1.1 设 p 为任一命题。复合命题“非 p”（或“p 的否定”）称为 p 的**否定式**，记作 $\neg p$。$\neg$ 称为**否定联结词**。

$\neg p$ 的逻辑关系为 p 不成立，于是 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假。

在例 1.2 中，设 p:10 是素数，则 $\neg p$:10 不是素数。这里，p 的真值为0，所以 $\neg p$ 的真值为1。在(6)中，设 q:5 是素数，则 $\neg q$:5 不是素数。q 的真值为1，所以 $\neg q$ 的真值为0。

定义1.2 设 p,q 为二命题。复合命题“p 并且 q”（或“p 与 q”）称为 p 与 q 的**合取式**，记作 $p\wedge q$。$\wedge$ 称为**合取联结词**。

$p\wedge q$ 的逻辑关系为 p 与 q 同时成立，因而 $p\wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真。

在例 1.2 中，设 p:2 是素数，q:3 是素数，则 $p\wedge q$ 表示 2 和 3 都是素数。由于 p,q 的真值均为1，所以 $p\wedge q$ 的真值为1。在

(7)中，仍设 p：2是素数，r：4是素数，则 $p\wedge r$ 表示2与4都是素数，由于 r 的真值为0，所以 $p\wedge r$ 的真值为0。

联结词 $\wedge$ 在用法上很灵活。自然语言中的"既…又…"，"不但…而且…"，"虽然…但是…"等都可以符号化为 $\wedge$。请看下例。

例1.3 将下列命题符号化。

(1) 张路既聪明又用功。

(2) 张路不仅聪明，而且用功。

(3) 张路虽然不太聪明，但他很用功。

(4) 张路不是不聪明，而是不用功。

(5) 肖颖和李莉都是北大的学生。

(6) 张芳与陈敏是好朋友。

(7) 姜文和姜武是兄弟。

解 设 p：张路聪明，q：张路用功。(1)到(4)分别符号化为 $p\wedge q$，$p\wedge q$，$\neg p\wedge q$，$\neg(\neg p)\wedge\neg q$。在这4个复合命题中都使用了联结词 $\wedge$。至于说它们的真值，均应由 p,q 的真值而定。在(5)中设 p：肖颖是北大学生，q：陈敏是北大学生。复合命题(5)符号化为 $p\wedge q$。(6),(7)两命题均为简单命题，因而符号化为 p,q 即可。

定义1.3 设 p,q 为任意二命题。复合命题"p 或 q"称作 p 与 q 的**析取式**，记作 $p\vee q$。$\vee$ 称为**析取联结词**。

$p\vee q$ 的逻辑关系为 p 与 q 中至少一个成立，因而 $p\vee q$ 为真当且仅当 p 与 q 中至少一个为真。

在例1.2(3)中，设 p：2是素数，q：4是素数。则 $p\vee q$ 表示2或4是素数。由于 p 的真值为1，所以 $p\vee q$ 的真值为1。而在(8)中，设 r：6是素数，s：8是素数。由于 r,s 的真值均为0，所以 $r\vee s$ 的真值为0。

析取联结词 $\vee$ 的逻辑关系是明确的，但自然语言中的"或"

具有二义性，用“或”联结的命题，有时具有相容性，有时又具有排斥性，因而在使用联结词$\vee$时要注意区分。请看下例。

例1.4 将下面命题符号化。

(1) 谢丹生于1972年或1973年。

(2) 吕小洲学过德语或法语。

(3) 派老王或老李中的一人到上海开会。

解 本例中，(1),(3)中的或是排斥的，而(2)中的或是相容的。因而(2)可符号化为$p\vee q$,其中p表示吕小洲学过德语，q表示吕小洲学过法语。只有吕小洲既没学过德语，也没学过法语时，此命题才是假的。其它情况下均为真。在(1)中，设r：谢丹生于1972年，s：谢丹生于1973年。r,s的联合真值情况有且仅有3种情况：同假；r真，s假；r假，s真。不会出现同真的情况，因而可以符号化为$r\vee s$。$r\vee s$为真当且仅当r,s中一个为真另一个为假。在(3)中，设t：派老王到上海开会，u：派老李到上海开会。t,u的联合真值情况有4种：同真，同假，一真一假（两种情况）。如果也符号化为$t\vee u$，就可能派2人去开会，因而不能符号化为$t\vee u$。可以使用多个联结词，符号化为$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$。此复合命题为真当且仅当$p,q$中一个为真，一个为假，它很准确地表达了(3)的含义。

定义1.4 设p,q为二命题．复合命题“如果p，则q”称作p与q的**蕴涵式**，记作$p\rightarrow q$。称p是蕴涵式的**前件**，q是蕴涵式的**后件**。$\rightarrow$称作**蕴涵联结词**。

$p\rightarrow q$的逻辑关系是，q是p的必要条件，或p是q的充分条件。$p\rightarrow q$为假当且仅当p为真且q为假。在使用蕴涵联结词$\rightarrow$时，应注意以下几点。

1． 在自然语言里，特别是在数学中，q是p的必要条件有不同的叙述方式，如“只要p就q”，“p仅当q”，“只有q才p”等都可以符号化为$p\rightarrow q$的形式。

2. 在自然语言里，“如果 p，则 q”中的 p 与 q 往往有某种内在联系，而在数理逻辑里，p 与 q 不一定有什么内在联系。

3. 在数学和其它自然科学中，“如果 p，则 q”往往表示的前件为真，后件为真的推理关系。但在数理逻辑中，当 p 为假时，$p \to q$ 为真。

在下例中，这 3 点注意事项都有所体现，请注意区分。

例1.5 将下列命题符号化。

(1) 若$3+3=6$，则地球是运动的。

(2) 若$3+3\neq 6$，则地球是运动的。

(3) 若$3+3=6$，则地球是静止不动的。

(4) 若$3+3\neq 6$，则地球是静止不动的。

(5) 只要 a 是 4 的倍数，a 就是 2 的倍数。

(6) a 是 4 的倍数，仅当 a 是 2 的倍数。

(7) 除非 a 是 2 的倍数，a 才能是 4 的倍数。

(8) 除非 a 是 2 的倍数，否则 a 不是 4 的倍数。

(9) 只有 a 是 2 的倍数，a 才能是 4 的倍数。

(10)只有 a 是 4 的倍数，a 才能是 2 的倍数。

解 在(1)—(4)中，令p:$3+3=6$，q:地球是运动的，在这里，p 与 q 显然没有什么内在联系，但仍可以组成蕴涵式。蕴涵式分别为 $p \to q$，$\neg p \to q$，$p \to \neg q$，$\neg p \to \neg q$。真值分别为1，1，0，1。在(5)—(10)中，令r:a是 4 的倍数，s:a 是 2 的倍数。(5)—(9)均叙述的是 a 是 2 的倍数是 a 是 4 的倍数的必要条件，因而都符号化为$r \to s$。r,s 的真值均可为0或1。但是当 r 的真值为1时 s 的真值必定为 1，因而蕴涵式 $r \to s$ 不会出现前件真后件假的情况。于是，$r \to s$ 的真值为1。而在(10)中，将 a 是 4 的倍数看成了 a 是 2 的倍数的必要条件，因而应符号化为$s \to r$。因为可能出现 s 为真，r 为假的情况，所以$s \to r$的真值为 0。比较(5)和(10)，注意这里的“只要”和“只有”是有区别的，在符号化时

一定要注意．

定义1.5 设p,q为二命题．复合命题“p当且仅当q”称作p与q的**等价式**，记作$p\leftrightarrow q$．$\leftrightarrow$称作**等价联结词**．

$p\leftrightarrow q$的逻辑关系是p与q互为充分必要条件．$p\leftrightarrow q$为真当且仅当p与q的真值相同．

例1.6 将下列命题符号化，并求其真值．

(1) $2+3=5$ 当且仅当 $\sqrt{2}$ 是无理数．

(2) $2+3=5$ 当且仅当 $\sqrt{2}$ 不是无理数．

(3) $2+3\neq 5$ 当且仅当 $\sqrt{2}$ 是无理数．

(4) $2+3\neq 5$ 当且仅当 $\sqrt{2}$ 不是无理数．

(5) O_1,O_2 两圆的面积相等当且仅当它们的半径相等．

(6) A,B 两角相等当且仅当它们是同位角．

(7) 杜明是四川人当且仅当沈力生于1970年．

解 在(1)—(4)中，设p：$2+3=5$，q：$\sqrt{2}$是无理数．(1)—(4)分别符号化为$p\leftrightarrow q$，$p\leftrightarrow\neg q$，$\neg p\leftrightarrow q$，$\neg p\leftrightarrow\neg q$．由于$p,q$的真值都是1，因而$p\leftrightarrow q$与$\neg p\leftrightarrow\neg q$两边的命题真值相同，所以它们的真值均为1．而$p\leftrightarrow\neg q$与$\neg p\leftrightarrow q$两边命题的真值均相异，因而它们的真值均为0．

在(5)中，设p：O_1,O_2两圆面积相等，q：O_1,O_2两圆半径相等．命题等号化为$p\leftrightarrow q$．p与q的真值要由O_1,O_2的具体情况而定，但p,q的真值相同（同真或同假）因而$p\leftrightarrow q$的真值为1．而在(6)中，若设p：A,B两角相等，q：A,B是同位角，命题也符号化为$p\leftrightarrow q$．但是p,q的真值可以不同，因而$p\leftrightarrow q$的真值要由p,q的具体情况而定．类似地，(7)的真值也要根据具体情况而定．

以上定义了5种联结词，组成一个联结词集$\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$，其中$\neg$是一元联结词符，其余的都是二元联结词符．有时也称它们是逻辑运算符，可以规定这些运算符的优先级，本书中规定它们优先级的顺序为$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$．如果出现的联