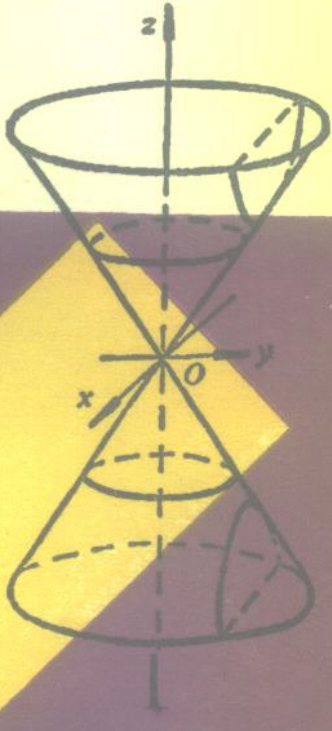
上

高等数学导论

第二版

中国科学技术大学高等数学教研室 编



中国科学技术大学出版社

高等数学导论

第二版(上册)

中国科学技术大学高等数学教研室 编

中国科学技术大学出版社

1995 · 合肥

（皖）新登字08号

内 容 提 要

本“导论”是中国科学技术大学非数学专业通用的讲义，是在35年的使用过程中，经过不断的修订、充实而成的．与同类书相比，其广度有所拓宽，论证定理、公式逻辑严谨，编排内容循序渐进，阐述概念联系实际，深入浅出．为加深对概念、定理等的理解和掌握，书中编有丰富的例题，以及习题和总复习题．

本“导论”分三册出版．本册讲述单变量函数微积分，中册讲述空间解析几何、多变量函数微积分，下册讲述级数与常微分方程．本书另配学习辅导一册．

本册内容包括函数的极限，单变量函数的微分学，单变量函数的积分学，可积常微分方程共四章．

本“导论”可作理工科院校非数学专业或师范类院校数学专业的教材或教学参考书，也可供具有一定数学基础的读者自学．

高 等 数 学 导 论

第二版（上册）

中国科学技术大学高等数学教研室　编

＊

中国科学技术大学出版社出版发行

（安徽省合肥市金寨路96号，邮编：230026）

安徽省金寨县印刷厂印刷

全国新华书店经销

＊

开本：850×1168/32　印张：15.5　字数：402千

1995年1月第2版　1995年1月第1次印刷

印数：1—10000册

ISBN 7-312-00674-4/O·160　定价：9.80

第二版序

《高等数学导论》第一版自1988年9月出版以来，已经历了6年的教学实践。本次我们根据在教学过程中积累的第一手材料，并吸取了多次使用本书的同行们提出的极其宝贵的意见，将第一版的一些内容进行了修改。另外，我们还根据当前国内外同类教材的发展动向加进了一些内容。这样一来，就使本书的理论更系统、更完整。第二版采用按章按节配备习题，并于每章末增加总复习题，以加强对基本概念和基础理论与方法的理解和提高读者的解题能力。书末附有习题的答案。

参加第二版编写工作的有中国科学技术大学高等数学教研室的杨孝先，薛春华、陈秋桂，以及函数论教研室的顾新身等同志。

第二版由数学系副主任朱国城同志主审。他认真地审阅了原稿，并提出了不少改进的意见。此外，余红兵同志还提供了一些十分有意义的习题。从而使本书在内容上、处理方法上以及总复习题上都增色许多。对此编者们都表示衷心感谢。

限于编者水平，故教材中可能存在不妥之处，希望广大读者提出批评和指正。

编　者

1994年1月

第一版序

我怀着喜悦的心情，期待着"高等数学导论"的出版。

每当我和我的同事们在修订这部"导论"时，不免回忆起那些为"导论"的诞生和发展作出过卓越贡献的专家、教授和学者，他们的名字将永远铭刻在我们的心中。

"导论"的前身是"高等数学讲义"。早在中国科学技术大学成立的初期，在原数学系系主任华罗庚教授，原高等数学教研室主任关肇直教授，副主任艾提教授及龚昇教授的亲切关怀和直接指导下，就已成立了以曾肯成教授为主笔的"讲义"编写小组。他们根据当时高教部所颁发的高等数学大纲，结合我校的特点，陆续地编写出了供除数学系外其它各系通用的"高等数学讲义"。这部讲义文笔生动，语言简练，深入浅出，通俗易懂，所以它一出现，就得到了外系师生的热烈欢迎和一致好评。

1977 年，中国科学技术大学重新恢复了招生。"讲义"又先后经过了史济怀教授，徐澄波教授、蔡宗熹教授、钟立敏副教授、夏宗威副教授以及高等数学教研室许多教师的试教、修订、充实，逐渐形成了现在的"导论"。

这次出版的"导论"共分上、中、下三册和一本配套的习题集。各册的内容分别为：单变量函数微积分；空间解析几何、多变量函数微积分及场论；级数与常微分方程。

尽管现在已经有了很多物理型的高等数学教程，但是"导论"仍有其独特之处。

由于高级中学的数学教材已经改革，函数的概念、极限论及微积分的计算法作为教学内容之一已有比较详尽的叙述。考虑到这些因素，"导论"已把现行教材的极限论补充得更加完善，使其

不再是中学极限论的简单重复，而是它的深化和发展。具体做法是：删去传统的初等函数一节，并以单调有界数列必有极限为公理建立起极限论。凡所涉及的定理如柯西收敛准则，闭区间连续函数的性质等都给以严格的论证。

高等数学的概念及方法都是从研究各种物质形态及各种运动形式的数量关系而产生的。例如，导数或积分的概念就是从速度、切线或曲边梯形的面积引入的；而第二型面积分，线积分各是从流体流过闭曲面的流量，力场对沿曲线运动的质点所作的功抽象而成的。"导论"除了注意从实际问题引入这些概念外，还对所涉及的各种定理及公式，例如勾通微分学与积分学的牛顿—莱布尼兹公式、高斯定理、重积分的计算公式等的物理背景或几何直观都作了说明，以消除微积分的神秘感。

在讲述微分方程时，一旦解已求得，"导论"又引导去讨论解的物理意义，以使读者认识到数学不仅是一些符号、公式的堆积，而且是解决物理、力学中所遇到的问题之有力武器。

关于场论的处理，"导论"则引进哈密顿算符▽和外微分形式，这就使得梯度、散度、旋度及其各种公式统一于一体，便于记忆。

为了紧密配合"导论"，在"讲义"原有习题的基础上，又从历届研究生的试题，国内外高等数学竞赛题中精选了一批有意义的题目，进行分类、加工、充实，自成一习题集。

"导论"的其它特点在此就不一一赘述了。

正是由于"导论"保持了原有"讲义"的特色，而且还进行了切合实际的改革，所以它也受到兄弟院校师生的青睐。如有的院校采用这套教材进行教学，效果良好。因此"导论"的出版就是有价值的。

在使用这一教材的过程中，常庚哲，何琛，陶懋颀等教授；陈龙玄，杜锡录，顾新身，王天威，陈祖墀，张鄂堂，周永佩，张声雷，杨孝先，吴肇曼，李金平等副教授；缪柏其博士；曾宪立，

尹业富，汪惠迪，陈群标，徐俊民，奚宏生等讲师，提出了许多建设性的意见，这些意见我在定稿时已加以利用。

配套的习题集是由高等数学教研室陈秋桂讲师在校正了全部答案，并作了重新编排后完成的；我还要指出的是高等数学教研室的薛春华讲师，她也参加了“讲义”的修订工作。

由于水平所限，谬误与不妥之处实属难免，敬请读者批评指正。

陈登远

1987年9月于合肥

目　录

1 函数的极限

极限理论是高等数学或微积分学的基础，它是研究函数性质的有力工具，也是高等数学区别于初等数学的显著标志。因此，本章主要用精确的数学语言来讨论数列极限、函数极限，并引出高等数学中有着广泛应用的一类重要的连续函数。

1.1 数列极限

1.1.1 实数与绝对值

这里对本书使用的关于集合的记号给予说明。集合是一个无法明确定义，只能描述的基本概念。把具有某种(或某些)属性的并可相互区别的事物构成的总体叫做集合。构成集合的每一个事物称为集合的元素。今后常用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 等等表示集合，用小写字母 $a, b, c, \cdots$，等等表示集合的元素。a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记为 $a \in A$；a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A、记为 $a \bar{\in} A$。或 $a \notin A$。例如，全体自然数构成一个集合，每个自然数是集合的一个元素，记为 $\mathrm{N}=\{1, 2, \cdots\}$叫做自然数集；又如，全体整数构成一个集合，每个整数是集合的一个元素，记为 $\mathrm{Z}=\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$。叫做整数集。

一般的情形下，用 $K=\{x \mid P(x)\}$ 表示由满足某个相同的条件 $P(x)$的一切元素 x 构成的集合，例如，有理数集为

$$\mathrm{Q}=\left\{x \,\middle|\, x=\frac{p}{q}，\text{且 } p \in \mathrm{Z},\ q \in \mathrm{N}\right\}$$

又如，实数集为

$$R=\{x \mid x \text{ 是实数}\}$$

不含任何元素的集合称为空集，用$\varnothing$表示。

设有两个集合 A, B，凡是 $a\in A$ 都有 $a\in B$，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作"A 包含于 B"或"B 包含A"。例如 $N\subset Q$，$Q\subset R$，或有 $N\subset Q\subset R$，并规定：任何 A 都有 $\varnothing\subset A$。

若 $A\subset B$，且至少存在一个元素 $a\overline{\in} A$，而 $a\in B$，则称 A 为 B 的真子集合。

设有两个集合 A, B，由至少属于其中一个集合的元素的全体构成的集合，称为 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$，即有

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

同时属于 A, B 的元素的全体构成的集合，称为 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$，即有

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

设 E 是非空的实数集，M 与 m 都是已知的实数。若对任何的 $x\in E$，都有 $x\leqslant M$，就称 M 是 E 的上界，并称 E 是有上界的集合。若对任何的 $x\in E$，都有 $x\geqslant m$，则称 m 是 E 的下界，并称 E 为有下界的集合。既有上界又有下界的集合称为有界集合。

若集合 E 的上界也属于 E，就称它为 E 的最大元素，记为 $\max E$。同样，若集合 E 的下界也属于 E，就称它为 E 的最小元素，记为 $\min E$。易见，这样的最大元素或最小元素显然是唯一的。

一个实数的集合若是由有限个实数构成就称为有限数集，由无穷多个实数构成的集合称为无限数集。有限数集必是有界集合，且必有最小元素与最大元素。然而，一般的数集就未必有界，即使有界也未必具有最大元素或最小元素。

例如，$E=\{x\in R \mid x>0\}$ 就是既无上界又无最小元素的数集。实际上，若不然，假定 M 为它的上界，但存在 $x=2M\in E$，并有 $x>M$。这与假设矛盾，故 E 无上界。其次，假定有 $p=\min E$，

且 $p>0$，但有 $0<\frac{p}{2}\in E$，且 $p>\frac{p}{2}$，故与 p 为最小元素显然矛盾。因此 E 中无最小元素。

又如，$F=\{x\in R|0<x<1\}$。显然它的下界 $m=0$，上界 $M=1$，故是有界集合。易证 F 既无最小元素也无最大元素。但是，不属于数集 F 的两个数 0 与 1 具有如下的性质：数集 F 中无小于 0 的数，而当任意给定一个正数 ε 时，总有小于 $0+\varepsilon$ 的数；同样，数集 F 中无大于 1 的数，而任意给定正数 ε 之后，总有大于 $1-\varepsilon$ 的数，即 0 与 1 分别是数集 F 的最大下界与最小上界。通常把它们分别称为数集 F 的下确界与上确界。

定义 设给定非空的数集 E，且 $E\subset \mathrm{R}$。若存在这样的实数 β 满足：

（1）对一切的 $x\in E$，有 $x\leqslant\beta$；

（2）对任意给定的正数 ε，总存在 $x\in E$，使 $\beta-\varepsilon<x$，则称 β 为数集 E 的上确界，记为

$$\beta=\sup E \quad 或 \quad \beta=\sup_{x\in E}\{x\}$$

同样，若存在这样的实数 α 满足：

（1）对一切的 $x\in E$，有 $\alpha\leqslant x$；

（2）对任给的正数 ε，总存在 $x\in E$，使 $\alpha+\varepsilon>x$，则称 α 为数集 E 的下确界，记为

$$\alpha=\inf E \quad 或 \quad \alpha=\inf_{x\in E}\{x\}$$

从确界的定义不难看出：β 是数集 E 的最小的上界，而 α 是它的最大下界。

若数集 E 无上界，就是任意给一个数 M，E 中总有大于 M 的数，则这个数集 E 无上确界；同样，若数集 E 无下界，则它也无下确界。若数集 E 中有最大数，则这个最大数就是它的上确界；同样，若数集中有最小数，则这个最小数就是它的下确界。

因为有限个数之中必有最大数和最小数，所以其最大数就是

由这有限个数构成的数集的上确界；其最小数就是由这有限个数构成的数集的下确界。

例 有上界的非空整数集必有最大数。

证 设 E 是有上界的非空整数集，因为 E 是非空的，所以存在整数 $m_1\in E$。又因为 E 有上界，故存在数 M，使得对 E 中的任何整数 m，都有 $m\leqslant M$。今考虑数集 $F=\{x|m_1\leqslant x\leqslant M, x$ 为整数$\}$。易见，F 是有限集。由于 $m_1\in E$，$m_1\in F$，故知 $E\cap F$ 非空。因此 $E\cap F$ 是有限的整数集。从而 $E\cap F$ 必有最大数 m_0。容易明白，m_0 就是整数集 E 的最大数。

有了前面的准备后，可得到如下的连续性公理。它是我们今后讨论问题的出发点。

连续性公理 有上界的非空数集必有上确界。

由这个公理立即可推出如下结果。

定理1 有下界的非空数集必有下确界。

证 设 $E\subset R$，且 $E\neq\varnothing$，有下界。令 $F=\{-x|_{x\in E}\}$，故 F 是有上界的非空数集。由连续性公理知，$\beta=\sup F$ 是存在的。于是对一切 $x\in E$，有 $-x\leqslant\beta$，或 $x\geqslant-\beta$，而对任给的正数 ε，存在一个 $x_0\in E$，有 $\beta-\varepsilon<-x_0$，即 $-\beta+\varepsilon>x_0$。从而得到 $-\beta=\inf F$。

定理2 对任意的 $x\in\mathrm{R}$，存在唯一的整数 m，使 $m\leqslant x<m+1$。

证 令 $E=\{n|n\leqslant x, n$ 是整数$\}$，且 $E\neq\varnothing$。则由前面的例知 E 有最大数 m，即 $m\in E$，且对任意的 $n\in E$，都有 $n\leqslant m$，故 $m=\sup E$。因为 $m\in E$，所以 $m\leqslant x$。剩下只要证明 $m+1>x$ 就行了。采用反证法，若不然，假定 $m+1\leqslant x$，则有 $m+1\in E$，这显然与 $m=\sup E$ 相矛盾。故有 $m+1>x$。总之有

$$m\leqslant x<m+1$$

最后，假定存在满足定理条件的两个整数 m 与 m_0，且 $m<m_0$。从 $m\leqslant x<m+1$ 以及 $m_0\leqslant x<m_0+1$ 与 $m<m_0$ 推出

$$x < m+1 \leqslant m_0 \leqslant x$$

这显然是矛盾的，故有 $m_0 = m$，即这样的整数 m 是存在且唯一的。

注意：若 $x \in R$。今用记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则由定理 2 知，有

$$x-1 < [x] \leqslant x$$

推论 1 对任意的实数 $a>0$，$b>0$，则可取适当的自然数 n，使 $na>b$。

证 由定理 2 知，一定存在比 $\frac{b}{a}$ 大的自然数，今取它为 n，即有 $\frac{b}{a}<n$，或 $na>b$

推论 2 在任意两个不同的实数之间都存在有理数。

证 设有两个不同的实数 a，b，且 $a<b$。由推论 1 知，可取适当的自然数 n，使 $n(b-a)>1$，即 $b-a>\frac{1}{n}$。

令 $m=[na]$，由 $m \leqslant na < m+1$，有

$$a < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a+(b-a) = b$$

其中 $\frac{m+1}{n}$ 是有理数。

类似地，在任意两个不同的实数之间都存在无理数。

实际上，与推论 2 的证法相同，可取自然数 n，使

$$n(b-a) > \sqrt{2}$$

有

$$a < \frac{m+\sqrt{2}}{n} < b$$

其中 $\frac{m+\sqrt{2}}{n}$ 是无理数。

今后所说的数都指实数，除特殊声明之外。超出了实数范围