应用数学丛书

概率论

狄昂照 编著

国防工业出版社

应用数学丛书

概率论

狄昂照 编著

内 容 简 介

本书用较少的篇幅严格地叙述了测度论、概率论、随机过程、随机微分方程等方面的一些最基本的内容，并以此作为理论基础简单地介绍了卡尔曼滤波、随机控制、随机逼近的某些结果。

本书可供从事随机系统理论研究及实际应用的科学工作者、工程技术人员参考。

应用数学丛书
概 率 论
狄昂照 编著
*
国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
$850\times1168^{1}/_{32}$ 印张$6^{1}/_{2}$ 170千字
1985年12月第一版 1985年12月第一次印刷 印数：0,001—7,900册
统一书号：15034·2876 定价：1.50元

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术领域的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学，应用数学有关领域的基础介绍，应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　　言

概率论是数学中研究随机现象的一门学科。作为一个有力的工具，它已经广泛地应用于自然科学、工程技术甚至社会科学的许多领域。随着科学技术的不断进步以及快速数字电子计算机的发展，人们需要也有可能把越来越高深的数学理论直接运用到工程技术中去。用随机微分方程来描述一个带随机干扰的系统在现代文献中已很普遍。因此向数学专业领域外的工程技术人员介绍这方面的知识就成为很迫切的事情。

这里需要说明一点的是，用这样短的篇幅系统地向读者介绍从测度论到随机微分方程的全部理论是困难的，因此取材是个关键。本书是根据研究随机系统的需要确定内容的取舍，然后再尽可能地保持数学理论的完整性。

学习本书并不需要有过多的数学知识，但需要有一定的逻辑思维能力。

厚厚的一本书往往会使读者望而生畏，但写得太简单又会使初学者印象不深。建议自学者结合本书末尾推荐的参考书，选择适当章节配合学习，并选作一定数量的习题。

北京工业学院的熊大国同志详细审阅了本书的全部内容并提出了许多宝贵意见，在此谨致以诚挚的谢意。

应用数学丛书目录●

第一批目录

1. z-变换与拉普拉斯变换……………关肇直，王恩平　编著
2. 常微分方程及其应用…………………秦化淑，林正国　编著
3. 实变函数论基础……………………………胡钦训　编著
4. 正交函数及其应用…………………………柳重堪　编著
5. 沃尔什函数与沃尔什变换…………关肇直，陈文德　编著
6. 圆柱函数……………………………………刘　颖　编著

第二批目录

7. 集合论………………………………………程极泰　编著
8. 图论…………………………………………王朝瑞　编著
9. 概率论………………………………………狄昂照　编著
10. 矩阵理论…………………………王耕禄，史荣昌　编著
11. 复变函数论…………………………………杨维奇　编著
12. 逼近论……………………………徐利治，周蕴时 孙玉柏　编著
13. 矢量与张量分析…………………冯潮清，赵愉深 何浩法　编著
14. 模糊数学…………………………汪培庄，刘锡荟　编著
15. 编码理论……………………………………肖国镇　编著
16. 应用泛函分析………………………………柳重堪　编著

● 这是第一、二批的目录，以后将陆续分批刊登。

目　录

第一章　集合与测度

§1.1　集合的概念及相互关系

一、集与类

假定我们需要研究的对象（或称元素，也可叫点）的全体以 Ω 表示，叫做空间。其中的点以 ω 表示。我们所谓的“集合”就是把空间 Ω 中某些点凑在一起，形成一个整体，这个整体就叫作集合。或简称集。这种或类似的说法并不做为一个定义，只能当作一种说明。但要把这种说明用更为原始的概念来严格定义，似乎是既不可能也不必要了。

我们用 ω 表示空间 Ω 中的元素。假定 E 是 Ω 中一个集（也叫“子集”）。如果 ω 属于 E，我们将用下面的符号来表示：

$$\omega \in E$$

如果 ω 不属于 E，我们就用下面的记号来表示：

$$\omega \overline{\in} E$$

因此，对 Ω 中每一个点 ω，我们有：

$$\omega \in \Omega$$

如果 E 和 F 都是 Ω 的子集，记号

$$E \subset F \quad 或 \quad F \supset E$$

称 F 包含 E。它表明 E 中每个点都是 F 的点。即对每个 $\omega \in \Omega$，只要 $\omega \in E$，则必然 $\omega \in F$。特别地

$$E \subset E$$

如果有两个 Ω 的子集 E 和 F，只有当

$$E \subset F \quad 同时 \quad F \subset E$$

时，我们才说它们是相等的。并记作

$$E = F$$

为了运算方便，我们还引进一个不含任何点的集，称为空集。用 $\varnothing$ 表示。显然对每个集 E 都有

$$\varnothing \subset E \subset \Omega$$

且对每个点$\omega \in \Omega$有

$$\omega \overline{\in} \varnothing$$

例1.1.1 我们如把整个实数轴（$-\infty$，$+\infty$）当作空间Ω，则下面都是它的集的例子。

任何区间 $(a\ b)$，$[a\ b)$，$[a\ b]$，$[a]$，…

一切自然数：$\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$

一切偶数：$\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$

一切质数：$\{2, 3, 5, 7, 11, \cdots\}$

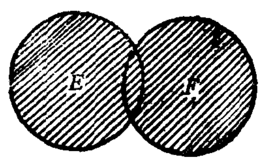
$\{\pi, e\}$

…

除了点组成之集外，还有以集为元素构成的集。例如由一切开区间构成之集。为了不和由空间的点构成之集混淆起来，我们把空间Ω中的某些集合构成之集称为类。关于上面引进的属于、包含、相等、空集等等概念，可以完全类似地搬到类中来。

二、集合的并、交与余集

设E和F是Ω中两个集，如果另有一Ω中的集A，它里面的每个点ω或者属于E或者属于F，二者必居其一。反之，E或F的每一个点属于A，则我们称集A为集E和集F之并。记作（见图1-1）



A：阴影部分

图 1-1

$$A = E \cup F$$

精确地说：如果$\omega \in A$，则或者$\omega \in E$，或者$\omega \in F$。而且$E \subset A$，同时$F \subset A$。两个集之并也可以推广到任意n个甚至无穷多个集之并：对某参数集T（有限或无穷），如果有一列集E_i（$i \in T$），我们说A为E_i（$i \in T$）之并。记作

$$A = \bigcup_{i \in T} E_i$$

如果

（1）对每个 $i\in T$ 有 $E_i\subset A$。

（2）对任一 $\omega\in A$，则至少存在一个 $j\in T$ 使

$$\omega\in E_j$$

例1.1.2 设 $\Omega=\{1, 2, 3, \cdots\}$ 由一切自然数构成的空间。$E=\{1, 3, 4, 6\}$；$F=\{2, 4, 6, 8\}$ 则

$$A=E\cup F=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$
$$B=E\cup\varnothing=\{1, 3, 4, 6\}=E$$
$$C=E\cup\Omega=\{1, 2, 3, \cdots\}=\Omega$$

假设 E 和 F 是空间 Ω 的两个子集。我们称 A 是 E、F 之交，记作（见图1-2）

$$A=E\cap F \text{（或} E\cdot F\text{）}$$

如果

（1）$A\subset E$，同时 $A\subset F$。

（2）对 Ω 中任一点 ω，只要 $\omega\in E$，且 $\omega\in F$ 则 $\omega\in A$。或者如果 $\omega\in A$，则 $\omega\in E$，同时 $\omega\in F$。和并一样也可以把交的定义推广到任意多个集的情形。即如有一参数集 T（有限或无穷），有一列集 E_i（$i\in T$），我们设集 A 是它们的交，记作

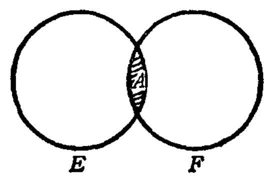


图 1-2

$$A=\bigcap_{i\in T} E_i$$

如果

（1）对每个 $i\in T$，都有 $A\subset E_i$

（2）Ω 中任一点 ω，只要对每个 $i\in T$ 都有 $\omega\in E_i$，则必定 $\omega\in A$。

例1.1.3 仍设 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ 为一切自然数所成之空间。$E=\{1, 3, 4, 6\}$；$F=\{2, 4, 6, 8\}$ 则

$$A=E\cap F=\{4, 6\}$$
$$B=E\cap\varnothing=\varnothing$$
$$C=E\cap\Omega=E$$

对任意的$E\subset F$都有

$$E\cap F=E;\ E\cup F=F$$

设E是Ω的子集，由一切属于Ω但不属于E的点构成之集称为E的余集。

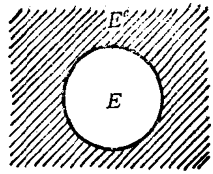


图 1-3

记作E^c（见图 1-3）。

例1.1.4 设$\Omega=(-\infty,\ +\infty)$　　$E=[a,\ b)$

则　　$E^c=(-\infty,\ a)\cup[b,\ +\infty)$，$\varnothing^c=\Omega$

上面的各种集合运算之间满足一些定律

（1）并的运算满足交换律和结合律。

$$E\cup F=F\cup E;\ E\cup(F\cup G)=(E\cup F)\cup G$$

（2）交的运算满足交换律和结合律。

$$E\cap F=F\cap E;\ E\cap(F\cap G)=(E\cap F)\cap G$$

（3）交与并两种运算中的任一种满足对另一种的分配律。

$$E\cap(F\cup G)=(E\cap F)\cup(E\cap G)$$

$$E\cup(F\cap G)=(E\cup F)\cap(E\cup G)$$

更一般地

$$E\cap\bigcup_{i\in T}F_i=\bigcup_{i\in T}(E\cap F_i)$$

$$E\cup\bigcap_{i\in T}F_i=\bigcap_{i\in T}(E\cup F_i)$$

在上面的关系式中，我们只证明最后一个。其余的留给有兴趣的读者。

证明　先证　$E\cup\bigcap\limits_{i\in T}F_i\subset\bigcap\limits_{i\in T}(E\cup F_i)$

设$\omega\in E\cup\bigcap\limits_{i\in T}F_i$。则若$\omega\in E$，这时对每个$i$都会有$\omega\in E\cup F_i$，因而$\omega\in\bigcap\limits_{i\in T}(E\cup F_i)$。如果$\omega\,\overline{\in}\,E$则$\omega\in\bigcap\limits_{i\in T}F_i$。这就是说对每个$i\in T$都会有$\omega\in F_i$，因而$\omega\in E\cup F_i(i\in T)$。所以$\omega\in\bigcap\limits_{i\in T}(E\cup F_i)$。这就是说$E\cup\bigcap\limits_{i\in T}F_i\subset\bigcap\limits_{i\in T}(E\cup F_i)$。

再证 $\bigcap_{i\in T}(E\cup F_i)\subset E\cup\bigcap_{i\in T}F_i$。如果 $\omega\in\bigcap_{i\in T}(E\cup F_i)$ 则对每个 $i\in T$ 都有 $\omega\in E\cup F_i$。这就是说或者 $\omega\in E$，那么自然 $\omega\in E\cup\bigcap_{i\in T}F$。或者 $\omega\overline{\in}E$，则必须是对每个 $i\in T$ 都有 $\omega\in F_i$。于是对每个 $i\in T$ 有 $\omega\in F_i$，因而 $\omega\in\bigcap_{i\in T}F_i\subset E\cup\bigcap_{i\in T}F_i$。因此得 $\bigcap_{i\in T}(E\cup F_i)\subset E\cup\bigcap_{i\in T}F_i$。综合这两段证明知

$$\bigcap_{i\in T}(E\cup F_i)=E\cup\bigcap_{i\in T}F_i$$

（4）余集的运算满足下列关系：

$(E^c)^c=E$；$E\cap E^c=\varnothing$；$E\cup E^c=\Omega$；$\varnothing^c=\Omega$；$\Omega^c=\varnothing$

$$\left(\bigcap_{i\in T}F_i\right)^c=\bigcup_{i\in T}F_i^c;\quad\left(\bigcup_{i\in T}F_i\right)^c=\bigcap_{i\in T}F_i^c$$

这些运算规则的证明也留给读者。另外今后还要用到两个运算，它们都可以由上面三种运算表达出来，这就是

差：$A-B=A\cap B^c$（见图1-4）

和：如有不相交集列 A_k，$k=1, 2,\cdots$ $A_k\cap A_l=\varnothing\ (k\neq l)$ 则记它们的并为

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\sum_{k=1}^{n}A_k$$

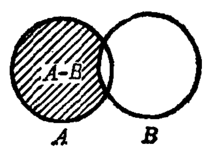


图 1-4

三、集合的极限

设 $\{E_n\}$（$n=1, 2, 3,\cdots$）是一个集合序列。如果 E^* 是由具有下列性质的一切点 ω 所构成的集：ω 属于无穷多个 E_n。或者说在集序列 $\{E_n\}$（$n=1, 2, 3,\cdots$）中有无穷多个是包含 ω 的。我们把具有这些性质的点所成之集 E^* 叫作集序列 $\{E_n\}$（$n=1, 2,\cdots$）的上极限，记作

$$E^*=\limsup_n E_n$$

如果 E_* 是由具有下列性质的点 ω 组成的集：只有有限个集 E_i 不包含 ω，我们称 E_* 为集序列 $\{E_n\}$（$n=1, 2,\cdots$）的下极限，

记作

$$E_*=\liminf_n E_n$$

显然 $E_*\subset E^*$。但如果 $E^*=E_*$，则我们认为这个集序列存在极限

$$E^*=E_*=\lim_n E_n$$

例1.1.5 作为集序列的特殊情况，我们假定

$$E_n\subset E_{n+1}\qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

称 $\{E_n\}$ 为增序列。如果

$$E_n\supset E_{n+1}\qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

则称 $\{E_n\}$ 为减序列。增序列和减序列都叫单调序列。显然单调序列极限存在。对增序列 $\{E_n\}$ 有

$$\lim_n E_n=\bigcup_n E_n$$

对减序列 $\{E_n\}$ 有

$$\lim_n E_n=\bigcap_n E_n$$

对一般的集序列 $\{E_n\}$ 有

$$E^*=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}E_n;\quad E_*=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}E_n$$

我们证明最后一个，其余的留给读者。

证明 显然 $E_*\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}E_n$。今设 $\omega\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}E_n$，则必存在 k_0 使 $\omega\in\bigcap_{n=k_0}^{\infty}E_n$。这说明对任何 $n\geqslant k_0$ 都有 $\omega\in E_n$，也就是说除了有限个(不超过 k_0 个）集 E_j（$j<k_0$）外，其余的 E_n 都包含 ω。所以，$\omega\in E_*$。得证 $E_*=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}E_n$。

以后符号 $E_n\uparrow E$，表示 $\{E_n\}$ 是单增序列，它的极限是 E，事

实上这时$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$。而符号$E_n\downarrow E$表示$\{E_n\}$是单减的序列，$E$是它的极限，即$E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$。

§1.2　域和σ-域

定义1.2.1　设有一以集为元素的非空类$\mathscr{R}$，如果它能满足下面的条件：

（1）$\Omega\in\mathscr{R}$

（2）如果E、$F\in\mathscr{R}$，则$E\cup F\in\mathscr{R}$

（3）如果$E\in\mathscr{R}$，则$E^c\in\mathscr{R}$

那么称$\mathscr{R}$为域。

例1.2.1　下面的集合类是域的例子。

（1）数直线$(-\infty,+\infty)$和它里面的各种区间的有限并所成的类是域。

（2）Ω中一切子集所构成的类是域。

（3）$\{\varnothing,\ \Omega\}$两个集构成的类是域。

根据域的定义，我们立即可以得到它的一些简单性质。

（1）域$\mathscr{R}$中必定包含空集$\varnothing$。

（2）域对任意有限并封闭。即，如有$E_i\in\mathscr{R}$，$i=1,2,\cdots n$，则用结合律知$\bigcup_{i=1}^{n}E_i\in\mathscr{R}$

（3）域对任意有限交封闭。如果$E_i\in\mathscr{R}$，$i=1,2,\cdots n$，则$E_i^c\in\mathscr{R}$。因而

$$\bigcap_{i=1}^{n}E_i=\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i^c\right)^c\in\mathscr{R}$$

定义1.2.2　设有一以集为元素的非空类$\mathscr{F}$，如果它能满足下面的条件：

（1）$\Omega\in\mathscr{F}$。

（2）如果$E_i \in \mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots$，则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{F}$。

（3）如果$E \in \mathscr{F}$，则$E' \in \mathscr{F}$。

那么称$\mathscr{F}$为σ-域。

例1.2.1中的（2）、（3）都是σ-域的例子。和域一样，根据定义很容易看出σ-域有下列性质：

（1）σ-域$\mathscr{F}$中必定包含有空集$\varnothing$。

（2）对任意可列多个$\mathscr{F}$中集$\{E_i\}$ $i=1,2,\cdots$,的交封闭。即如果$E_i \in \mathscr{F}$　$i=1,2,\cdots$，则

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{F}$$

σ-域和域之不同就在于它对可列交、并运算封闭。而域只能对有限个并、交运算封闭。

定义1.2.3　设有一个以集为元素的类$\mathfrak{W}$，如果对$\mathfrak{W}$中之集的每个单调序列$\{E_n\}$都有

$$\lim_n E_n \in \mathfrak{W}$$

则称$\mathfrak{W}$是单调类。域，如果又是单调类则称单调域。

定理1.2.1　σ-域是单调类。单调域是σ-域。

证明　定理的前半部分只需注意到下面的事实即可。当$\{E_n\}$是单增时，

$$\lim_n E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

当$\{E_n\}$是单减时

$$\lim_n E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

对于后半部分，我们只需证明单调域$\mathscr{F}$对可列并是封闭的即可。设

$$E_k \in \mathscr{F} \qquad k=1,2,\cdots,$$

因为$\mathscr{F}$是个域，因而对任意的n都有

$$A_n=\bigcup_{k=1}^{n}E_k\in\mathscr{F}$$

而一切$\{A_n\}$构成单增序列。又因$\mathscr{F}$是单调类，因而

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=\lim_n\bigcup_{k=1}^{n}E_k=\lim_n A_n\in\mathscr{F}$$

证完

这个定理说明：（1）在σ-域里对单调序列是封闭的。（2）任一集类，如果我们能证明它是域又能证明它是单调类，那么它就一定是σ-域。

定理1.2.2 设$\mathscr{E}$是任意的集类，则必存在唯一的一个域$\mathscr{R}_0$，使得$\mathscr{R}_0\supset\mathscr{E}$，并且对任何其它包含$\mathscr{E}$的域$\mathscr{R}$都有$\mathscr{R}_0\subset\mathscr{R}$。

域$\mathscr{R}_0$是包含$\mathscr{E}$的所有域中最小的，称为由$\mathscr{E}$所产生的域。记为$\mathscr{R}(\mathscr{E})$。

证明 首先由Ω的一切子集（包含Ω本身）构成的类是一个域，这个域自然包含$\mathscr{E}$。因而包含$\mathscr{E}$的域是存在的。假定一切包含$\mathscr{E}$的域为$\{\mathscr{R}_t\}$（$t\in T$），这里T为参数集，可以有限也可以无穷。我们令

$$\mathscr{R}_0=\bigcap_{t\in T}\mathscr{R}_t$$

我们证明$\mathscr{R}_0$是包含$\mathscr{E}$的最小域。最小是显然的。下面只需证明是域。首先$\Omega\in\mathscr{R}_t$（$t\in T$），因而$\Omega\in\bigcap_{t\in T}\mathscr{R}_t=\mathscr{R}_0$。另外设$E\in\mathscr{R}_0$，则对每个$t\in T$都有$E\in\mathscr{R}_t$，自然$E^c\in\mathscr{R}_t$对一切$t\in T$也成立，因而$E^c\in\bigcap_{t\in T}\mathscr{R}_t=\mathscr{R}_0$。最后设$E_k\in\mathscr{R}$。$k=1,2,\cdots n$，于是对每个$t\in T$都有$E_k\in\mathscr{R}_t$，$k=1,2,\cdots,n$。因此$\bigcup_{k=1}^{n}E_k\in\mathscr{R}_t$对一切$t\in T$成立。故$\bigcup_{k=1}^{n}E_k\in\bigcap_{t\in T}\mathscr{R}_t=\mathscr{R}_0$。这就证明了$\mathscr{R}_0$是域。

唯一性是显然的。

上面的定理和证明都可以把域改成σ-域而不需作任何修改。这时$\mathscr{F}(\mathscr{E})$叫作由类$\mathscr{E}$产生的σ-域，或包含$\mathscr{E}$的最小σ-域。

例1.2.2 下面是由类$\mathscr{E}$产生的σ-域的例子。

（1）设$\mathscr{E}=\{E\}$这里E是Ω中一个确定的集。即$\mathscr{E}$是由单个集E构成的类。则

$$\mathscr{F}(\mathscr{E})=\{\Omega,\ \varnothing,\ E,\ E^c\}$$

（2）设$\Omega=(-\infty,\ +\infty)$为数直线。$\mathscr{E}$是由$\Omega$中一切区间$[a\ b)$构成的类。则$\mathscr{F}(\mathscr{E})$叫作波雷尔域。其中集称为波雷尔可测集。

注意：通常指出了基本空间Ω，再给出了它上面的一个σ-域$\mathscr{F}$。我们就说给出了一个可测空间，记作（Ω，$\mathscr{F}$）。而$\mathscr{F}$中的集就称为可测集或叫作关于$\mathscr{F}$可测的集。

§1.3 测　度

以类为定义域的函数，叫做集函数。详细些说就是：给定某类$\mathscr{E}$中每一集$E\in\mathscr{E}$，有一实数$\mu(E)$与它对应，这个对应关系我们叫作一个集函数。

例1.3.1 下面都是集函数的例子。

（1）设$\mathscr{E}$由直线上所有区间构成。令

$$\mu([a\ b))=b-a$$

（2）设$\mathscr{E}$由三维空间中所有长方体构成。令

$$V(E)=E\ \text{之体积（重量）}\ E\in\mathscr{E}$$

（3）令$\mathscr{E}=\{\varnothing,\ E,\ E^c,\ \Omega\}$。令$\mu(\varnothing)=0$，$\mu(\Omega)=1$，$\mu(E)=\frac{1}{2}$，$\mu(E^c)=\frac{1}{2}$。也构成一个集函数。

如果$\mu(E)$ $E\in\mathscr{E}$是定义在类$\mathscr{E}$上的集函数，若它具有下面的性质：如

$$E\in\mathscr{E},\ F\in\mathscr{E},\ E\cap F=\varnothing,\ E\cup F\in\mathscr{E}$$

则

$$\mu(E\cup F)=\mu(E)+\mu(F)$$