抽象分析引论

周性伟 编著

科学出版社

抽象分析引论

周性伟 编著

科学出版社
1983

内容简介

本书以较短的篇幅简明严谨地介绍了点集拓扑、测度与积分等现代数学中最基础的内容.可作为高等院校数学专业高年级学生、研究生教材,亦可供教师和数学工作者参考.

抽象分析引论

周性伟 编著

责任编辑 张启男 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年6月第一版 开本:787×1092 1/32

1983年6月第一次印刷 印张:5 3/4

印数:0001—9,700 字数:127,000

统一书号:13031·2279

本社书号:3119·13—1

定价: 0.92 元

序

编者前几年在南开大学数学系开设了“抽象分析”课程，本书就是在当时讲稿的基础上整理补充而成的.

就本书涉及的内容来说，其中任何一部分都早已形成了一套完整的数学理论，而且也都有专门著作. 我们的目的是使只有一般数学分析知识的读者，能够在较短的时间内对这些数学理论的基本内容有一个较为完整的了解. 为此，我们尽可能适当取材和编排并给以严格而又清楚明了的叙述. 当然对一个读者来说,要能真正弄明白本书中讨论的这些材料，抽象思维和推理的能力也是十分必要的. 如果读者还具有实变函数甚至泛函分析的一些基础知识，则对这些内容就会有更深的理解.

王梓坤教授和邓汉英教授对本书的编写给予了很大的鼓励和支持. 周学光教授对本书的部分内容提出了有益的建议. 本系的研究生以及参加听课的其它院校的教师不仅仔细阅读了本书的全部内容,而且提出了许多宝贵的意见,他们之中有些人还热情地帮助誊写原稿. 对以上各位，编者在此表示衷心的感谢.

由于水平所限，本书与预想的结果还有不少差距. 敬请广大读者批评指正.

周性伟

1980 年 9 月

目　　录

第一章　集　　合

§1.1　集合及其运算

1. **集合的概念**

所谓一个**集合**(或**集**)，是指一些可以互相区别的事物的汇集．构成一个集合的事物统称为该集合的**元素**（或**元**）或**点**．例如，若我们考虑的是所有实数构成的集合，则数 1 就是该集合的一个元素；若我们考虑的是闭区间[0,1]上所有连续函数构成的集合，则 $f(x)=x$ 就是该集合的一个元素；再若我们考虑的是所有收敛的实数列构成的集合，则数列

$$1,\ \frac{1}{2},\cdots,\ \frac{1}{n},\cdots$$

就是该集合的一个元素，等等．

若 x 是构成集合 X 的事物之一，则我们经常也说集合 X **包含**事物 x，或者说事物 x **属于**集合 X，记作

$$x\in X.$$

反之，若 x 不是构成集合 X 的事物之一，则我们说集合 X **不包含**事物 x，或者说事物 x **不属于**集合 X，记作

$$x\bar{\in}X.$$

当然对任何一个事物 x 来说，命题“$x\in X$”及“$x\bar{\in}X$”中必有且只有一个成立．

以后若无特别声明，用字母 R 表示所有实数构成的集合．

2. **集合的表示**

不包含任何元素的集合称为**空集**，记为 ϕ．

此外，$\{x\}$ 表示仅含一个元素 x 的集合．这样的集合称

为单点集. 类似地, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 表示含 n 个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的集合. 这样的集合有时也记作 $\{x_k\}_{1\leq k\leq n}$.

设 X 是一个集合, 并且对 X 中每一个元素 x 有一个命题 $P(x)$ 与之对应, 则记号 $\{x: x\in X, P(x)\}$ 表示 X 中使命题 $P(x)$ 成立的一切 x 所构成的集合.

例 1.1.1 若对每一个实数 x, 命题 $P(x)$ 表示 "$0<x<1$", 则集合

$$\{x: x\in R,\ 0<x<1\}$$

实际上就表示开区间 $(0,1)$.

例 1.1.2 若 $C[0,1]$ 表示闭区间 $[0,1]$ 上所有连续函数所构成的集合, 而对每一个 $f\in C[0,1]$, 命题 $P(f)$ 表示 "$f(0)=f(1)=0$", 则集合

$$\{f: f\in C[0,1],\ f(0)=f(1)=0\}$$

就表示 $[0,1]$ 上使 $f(0)=f(1)=0$ 的所有连续函数 $f(x)$ 构成的集合.

3. 集合的相等与包含关系

若构成集合 A 的元素与构成集合 B 的元素是相同的, 则我们称集合 A 和 B 相等, 记作 $A=B$. 所以为了论证两个集合 A 和 B 相等, 必须且只须说明"若 $x\in A$ 则必有 $x\in B$; 反之, 若 $x\in B$ 则必有 $x\in A$".

更一般地, 若集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素, 则我们称集合 A 包含于 B 中, 或者说 B 包含 A, 记作

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A,$$

此时我们也称 A 是 B 的子集.

我们规定空集 ϕ 是任何集合的子集.

下面三个结论是显而易见的:

(i) 对任何集合 A, $A\subset A$;

(ii) 为使 $A=B$，充分必要条件是 $A\subset B$ 且 $B\subset A$；

(iii) 若 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，则 $A\subset C$.

4. 集合的运算

设 X 是一个集合. 我们考虑 X 的子集之间的几种运算. 为此设 A 和 B 都是 X 的子集.

由 A 中的所有元素与 B 中的所有元素汇集在一起所构成的集合称为 A 和 B 的并集，记为 $A\cup B$. 因此

$$A\cup B=\{x: x\in A \text{ 或者 } x\in B\}.$$

由 A 和 B 的一切共有元素所构成的集合称为 A 和 B 的交集，记为 $A\cap B$. 因此

$$A\cap B=\{x: x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

特别若 $A\cap B=\phi$，即 A 和 B 没有共有元素，则称 A 和 B 不相交.

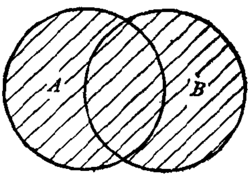
由一切属于 A 但不属于 B 的元素所构成的集合称为 A 和 B 的差集，记为 $A-B$. 因此

$$A-B=\{x: x\in A \text{ 且 } x\bar{\in} B\}.$$

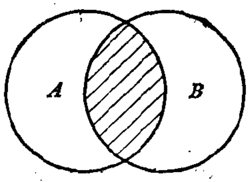
特别地，我们把 $X-A$ 称为 A 关于 X 的补集，记为 A^c. 因此，

$$A^c=X-A.$$

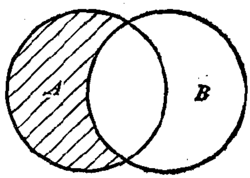
若把 A 和 B 都看作平面上的点集，则它们的并、交、差可分别用下面的阴影部分来表示：



$A\cup B$



$A\cap B$



$A-B$

定理 1.1.1 设 A,B,C 都是 X 的子集，则

(i) $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；（交换律）

(ii) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；（结合律）

(iii) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；（分配律）

(iv) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，
$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.（De Morgan 公式）

证明 我们只证 (iv). 设 $x\in(A\cup B)^c$，则 $x\overline{\in}A\cup B$，从而 $x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B$，于是 $x\in A^c$ 且 $x\in B^c$，故 $x\in A^c\cap B^c$. 因此，$(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$. 反之，若 $x\in A^c\cap B^c$，则从 $x\in A^c$ 得 $x\overline{\in}A$，从 $x\in B^c$ 得 $x\overline{\in}B$. 因此 $x\overline{\in}A\cup B$，故 $x\in(A\cup B)^c$. 这样我们又有 $A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$. 从而 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

完全类似可证 $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$. |

5. **集族**

若集合 $\mathscr{A}$ 的每个元素本身都是集合 X 的子集，则 $\mathscr{A}$ 称为集合 X 上的一个**集族**. 此时我们把 $\mathscr{A}$ 中所有元素（作为 X 的子集）的并称为**集族** $\mathscr{A}$ **的并**，记作 $\bigcup\{A:A\in\mathscr{A}\}$，亦即

$$\bigcup\{A:A\in\mathscr{A}\}=\{x:\ 存在\ A\in\mathscr{A}\ 使\ x\in A\}.$$

此外，我们把 $\mathscr{A}$ 的所有元素（作为 X 的子集）的交称为**集族** $\mathscr{A}$ **的交**，记作 $\bigcap\{A:A\in\mathscr{A}\}$，亦即

$$\bigcap\{A:A\in\mathscr{A}\}=\{x:\ 对任何\ A\in\mathscr{A}\ 有\ x\in A\}.$$

显然，一个集族的并与交是两个集的并与交的推广.

一个集族当然是一个集合，它的子集统称为该集族的**子族**.

以后若无特别声明，记号 $\mathscr{B}(X)$ 表示以集合 X 的一切子集为其元素的集族. 这样，集合 X 上的任一集族都是

$\mathscr{B}(X)$ 的子族.

若除了集合 X 以外,另有一个集合 Λ(称为参变集),使得对 Λ 中每一个元素 λ,有 X 的一个子集 A_λ 与之对应,这样我们就得到 X 上的一个集族 $\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$,或简写成 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$,它称为由参变集 Λ 所确定的 X 上的集族.这样一个集族的并与交分别记为

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda \quad \text{及} \quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda.$$

特别地,若 $\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$,则记 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\{A_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$,其并与交分别记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 与 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$. 又若 Λ 是正整数全体所构成的集合,则记 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\{A_n\}_{n\geqslant1}$,其并与交分别记为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 及 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. $\{A_n\}_{n\geqslant1}$ 也称为是一个集合序列. 若 n 是一个正整数,则记号 $\{A_k\}_{k\geqslant n}$,$\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ 及 $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ 的意义可按完全类似的方式来理解.

6. 集合序列的极限

设 $\{A_n\}_{n\geqslant1}$ 是一个集合序列.

若 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$,则我们说该序列是上升的,记为 $A_n\uparrow$;

若 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$,则我们说该序列是下降的,记为 $A_n\downarrow$.

现在对每一个正整数 n,我们可以构造两个集合:

$$B_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\qquad C_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k,$$

它们分别是集合序列 $\{A_k\}_{k\geqslant n}$ 的并与交. 显然 $B_n\downarrow$,$C_n\uparrow$. 此时我们称集合 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ 为集合序列 $\{A_n\}_{n\geqslant1}$

的上极限，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k;$$

称集合 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ 的下极限，记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，即

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

定理 1.1.2 设 $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个集合序列.

(i) 若 $A_n\uparrow$，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$;

(ii) 若 $A_n\downarrow$，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

证明 (i) 若 $A_n\uparrow$，则对任何 $n\geqslant 1$ 有

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = B_1,\quad C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n,$$

从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

(ii) 若 $A_n\downarrow$，则对任何 $n\geqslant 1$ 有

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n,\quad C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = C_1,$$

从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = C_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n. \quad \blacksquare$$

对一般的集合序列，我们有

定理 1.1.3 设 $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个集合序列，则

(i) 为了使 $x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，充分必要条件是有无穷多个 A_n 含包了 x；

(ii) 为了使 $x\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，充分必要条件是存在正整数 n_x，使得对一切 $n\geqslant n_x$，A_n 皆包含 x；

(iii) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

证明 (i) 设 $x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$，于是，对任何 $n\geqslant 1$ 有 $x\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$. 这样由 $x\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$，有 n_1 使得 $x\in A_{n_1}$. 由 $x\in\bigcup\limits_{k=n_1+1}^{\infty}A_k$，有 $n_2(>n_1)$使得 $x\in A_{n_2}$. 由 $x\in\bigcup\limits_{k=n_2+1}^{\infty}A_k$，有 $n_3(>n_2)$ 使得 $x\in A_{n_3},\cdots$. 这样 x 就属于无穷多个 A_n. 反之，若 x 属于无穷多个 A_n，则对任何 $n\geqslant 1$，必有 $x\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$，因此 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

(ii) 设 $x\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$，于是有正整数 n_x 使得 $x\in\bigcap\limits_{k=n_x}^{\infty}A_k$. 从而对一切 $k\geqslant n_x$ 有 $x\in A_k$. 反之，若对一切 $k\geqslant n_x$ 有 $x\in A_k$，则 $x\in\bigcap\limits_{k=n_x}^{\infty}A_k$. 从而 $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

结合(i)与(ii)即得(iii). ▎

以后若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，则我们称集合序列 $\{A_n\}_{n\geqslant1}$ 的**极限存在**，并把 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n(=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n)$ 称为 $\{A_n\}_{n\geqslant1}$ 的**极限**，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

由定理 1.1.2 知，当 $A_n\uparrow$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$；当 $A_n\downarrow$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

7. 有限个集合的直积

设 A 和 B 是两个集合．对任何 $a\in A$ 及 $b\in B$，我们可以组成一个序对 (a,b)．我们规定当且仅当 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$ 时 $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$．于是，若把每一个序对看成一个元素，则由 A 和 B 中的元素组成的所有序对的集合称为集合 A 和 B 的直积，记为 $A\times B$，亦即

$$A\times B=\{(a,b): a\in A, b\in B\}.$$

完全类似，对 n 个集合 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，它们的直积 $\prod\limits_{k=1}^{n} A_k$ 定义为

$$\prod_{k=1}^{n} A_k=\{(a_1, a_2,\cdots,a_n): a_k\in A_k,\ k=1,2,\cdots,n\}.$$

亦即 $\prod\limits_{k=1}^{n} A_k$ 中的元素是一个"n 维向量"$(a_1, a_2,\cdots,a_n)$，它的第 k 个"分量" a_k 属于 A_k，$k=1,2,\cdots,n$.

定理 1.1.4 设 A_1, A_2, B_1, B_2 是四个集合，则

(i) $(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$；

(ii) 为了使 $A_1\times B_1\subset A_2\times B_2$，充分必要条件是 $A_1\subset A_2$ 且 $B_1\subset B_2$；

(iii) 为了使 $A_1\times B_1=A_2\times B_2$，充分必要条件是 $A_1=A_2$ 且 $B_1=B_2$；

(iv) $(A_1\times B_1)-(A_2\times B_2)=[(A_1\cap A_2)\times(B_1-B_2)]\cup[(A_1-A_2)\times B_1]$.

证明 (i)—(iii) 是显然的，我们只证 (iv).

设 $(a, b)\in(A_1\times B_1)-(A_2\times B_2)$，则在下列两种情况中，有且只有一种情况发生：

(I) $a\in A_1, b\in B_1, a\in A_2$ 但 $b\bar{\in}B_2$. 此时

$$(a,b)\in(A_1\cap A_2)\times(B_1-B_2);$$

(II) $a\in A_1, b\in B_1, a\bar{\in}A_2$. 此时

$$(a,b)\in(A_1-A_2)\times B_1.$$

因此 (iv) 中左方⊂右方．至于相反的包含关系是显然的，故 (iv) 成立．▎

习　　题

本习题中考虑的集合都是集合 X 的子集.

1. 证明:

(i) $A\cup A^c=X$; (ii) $A\cap A^c=\varnothing$;

(iii) $A-B=A\cap B^c=B^c-A^c$.

2. 证明下面六个命题等价:

(i) $A\cap B=A$;　　(ii) $A\cup B=B$;

(iii) $A\subset B$;　　(iv) $A^c\supset B^c$;

(v) $A\cap B^c=\varnothing$;　　(vi) $A^c\cup B=X$.

3. 证明:

(i) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$;

(ii) $A-(A-B)=A\cap B$;

(iii) $A\cap(B-C)=A\cap B-C$;

(iv) $A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$;

(v) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$;

(vi) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$;

(vii) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

4. 设 $A\subset B$，证明 $A^c=B^c\cup(B-A)$.

5. 定义 $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$，$A\triangle B$ 称为 A 和 B 的**对称差**. 证明:

(i) $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$;

(ii) $A\triangle B = B\triangle A$;

(iii) $A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C$;

(iv) $A\cap(B\triangle C) = (A\cap B)\triangle(A\cap C)$;

(v) 对任何集合 A 和 B，必有集合 C 使 $A\triangle C = B$.

(vi) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个集合，则

$$A_1\triangle A_2\triangle\cdots\triangle A_n = \{x: x \text{ 属于且仅属于奇数个 } A_k\}.$$

6. 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 X 上的一个集族，证明:

(i) $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$; (ii) $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$.

7. 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 及 $\{B_\mu\}_{\mu\in\Omega}$ 是 X 上两个集族，证明:

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\cap\left(\bigcup_{\mu\in\Omega} B_\mu\right) = \bigcup\{A_\lambda\cap B_\mu: \lambda\in\Lambda,\ \mu\in\Omega\}.$$

8. 设 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 是一个集合序列，令

$$B_1 = A_1,\ B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\ (n = 2, 3, \cdots\cdots).$$

证明集列 $\{B_n\}_{n\geq 1}$ 是两两不相交的且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

9. 设 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 是一个集列，证明:

(i) $\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\right)^c = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c$; (ii) $\left(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\right)^c = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c$;

又若 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 存在，$E\subset X$，证明:

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n - E = \lim\limits_{n\to\infty}(A_n - E)$; (iv) $E - \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty}(E - A_n)$;

(v) $E\cup\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty}(E\cup A_n)$.

10. 对 $A\subset X$，设

$$C_A(x) = \begin{cases} 1 & x\in A \\ 0 & x\in A^c, \end{cases}$$

$C_A(x)$ 称为 A 的**特征函数**. 证明对任意一个集合序列 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 有

(i) $C_{\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n}(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, C_{A_n}(x)$; (ii) $C_{\lim_{n\to\infty} A_n}(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, C_{A_n}(x)$.