

机械零件的承载能力 和强度计算

〔苏〕 C.B. 谢联先 主编

机械工业出版社

机械零件的承载能力和强度计算

〔苏〕 C.B. 谢联先 主编

汪一麟 等译



机械工业出版社

本书介绍机械结构构件和机械零件承载能力计算的一般原则，从抵抗塑性变形、脆性断裂、疲劳断裂和蠕变破坏的观点出发提出强度计算方法，讨论强度与结构因素、工艺因素、使用因素的关系以及与高温、腐蚀性介质的关系。在强度计算中反映了作者对强度和塑性的最新研究成果。此外，还举了许多具体机械零件的强度计算实例，并把设计计算结果与相应的实验结果作了比较。本书可供从事机械设计和强度研究的工程技术人员及科研人员使用，也可供高等院校师生参考。

**НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ И
РАСЧЕТ ДЕТАЛЕЙ МАШИН
НА ПРОЧНОСТЬ**

С. В. Серенсен В. П. Когаев Р. М. Шнейдерович

РУКОВОДСТВО И СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ

Издание третье

переработанное и дополнение

«МАШИНОСТРОЕНИЕ»

1 9 7 5

* * *

**机械零件的承载能
力和强度计算**

〔苏〕C. B. 谢联先 主编

汪一麟 等译

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业登记证字第 117 号）

中国农业机械出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 · 印张 20 · 字数 531 千字

1984 年 3 月北京第一版 · 1984 年 4 月北京第一次印刷

印数 00,001—18,750 · 定价 3.70 元

*

统一书号：15033 · 5564

译序

机械结构构件和机械零件的强度计算是机械设计的重要环节。随着科学技术的进步，对现代机械的工作性能和可靠性提出了更高的要求。为了适应这种要求，从事机械设计的工程技术人员必须在机械强度方面具备丰富而渊博的知识。

目前，从固体力学方面和材料科学方面对塑性变形、脆性断裂、疲劳破坏和蠕变破坏的研究正在不断取得进展。这些研究成果已逐步反映到机械设计的强度计算中。为了向我国从事机械设计和强度研究的工程技术人员和科研人员以及高等院校有关专业的教师和研究生介绍先进的强度计算方法，以适应我国四个现代化的需要，我们翻译了苏联科学院院士 С. В. Серенсен 教授（已于1977年5月去世）同 В. П. Когаев 教授和 Р. М. Шнейдерович 教授（已于1978年1月去世）合著的《机械零件的承载能力和强度计算》一书。

这是机械强度计算方面的一部代表性著作。其特点是，在传统材料力学中所讨论的机械结构构件和机械零件强度问题上反映了作者最新的研究成果，从断裂力学、可靠性理论、统计分析的观点阐述强度计算方法，从而构成了高等材料力学的新体系，同时举了许多具体机械零件的强度计算实例，并把设计计算结果与相应的实验结果作了比较。作为一本机械强度计算的指导书，本书是很有参考价值的。

本书的译校分工如下：汪一麟译绪论、第十章和第十一章，秦大雄译第一章，邵本述译第二章和第六章，刘克和译第三章和第四章，唐金松译第五章和第七章，孙荣鑫译第八章和第九章，最后由汪一麟对全稿作了总校和统一，并按日文译本《機械要素强度計算便覽》（日本名古屋大学大橋義夫教授译）作了复校。

限于我们的理论知识和业务水平，译文中难免有错误和不当之处，恳请广大读者批评指正。

目 录

绪论.....	1
第一章 在静载荷作用下呈延性状态时的承载能力 和强度计算.....	7
1 抗静塑性变形的强度.....	7
2 在静弹塑性变形下的应力-应变状态	16
3 在静载荷作用下的极限状态和承载能力.....	92
参考文献.....	98
第二章 在低循环载荷作用下的承载能力和强度计算原理	101
1 抗循环塑性变形的强度	101
2 在循环弹塑性变形下的应力-应变状态.....	124
3 在循环弹塑性变形下的极限状态和承载能力	141
参考文献	155
第三章 在交变应力作用下的承载能力和强度计算原理	157
1 金属疲劳损伤的发生和进展	157
2 疲劳强度特性值的实验测定	162
3 影响机械零件疲劳强度的因素.....	170
4 提高机械零件疲劳强度的工艺方法.....	193
5 腐蚀对疲劳强度的影响.....	209
6 在稳定交变应力状态下的强度计算.....	220
7 在随时间而变化的应力幅下的疲劳计算.....	228
参考文献	241
第四章 在高温条件下以及持久静载荷和循环载荷作用下 的承载能力和强度计算	247
1 抗持久静变形和断裂的强度.....	247
2 抗持久循环变形和断裂的强度	262
3 在持久静载荷和循环载荷作用下的极限状态和承载能力.....	279
4 在持久交变应力作用下的疲劳强度	282
参考文献	296

第五章 机械零件材料呈脆性状态时在裂纹扩展期的承载能力和强度计算	301
1 抗脆性和准脆性断裂的强度判据	301
2 材料和构件抗脆性断裂强度特性值的实验测定	316
3 按抗脆性断裂强度确定承载能力和进行强度计算	326
4 在静载荷和循环载荷作用下抗裂纹扩展能力的判据	329
参考文献	334
第六章 疲劳破坏的统计规律和机械零件疲劳强度的概率计算法	341
1 强度的概率估算	341
2 机械零件疲劳强度计算特性值的统计估算	343
3 机械零件疲劳强度的概率计算法	379
4 计算举例	410
参考文献	422
第七章 轴的强度	429
1 轴的强度与结构因素和工艺因素的关系	429
2 轴的强度计算	437
3 轴的计算举例	454
参考文献	476
第八章 螺纹联接的计算	477
1 螺栓的静强度和疲劳强度计算方法	477
2 螺栓联接的计算步骤	490
3 计算举例	491
参考文献	501
第九章 焊联接的强度	503
1 焊联接的疲劳强度	503
2 焊接工艺缺陷对焊联接疲劳强度的影响	520
3 焊联接的强度计算	522
参考文献	532
第十章 压力容器结构要素和伸缩接头的计算	536
1 圆筒容器及其附属部分	536

2 凸面式和圆环式伸缩接头与挠性导管.....	541
参考文献.....	563
第十一章 机械零件计算用的参考资料	565
1 结构材料的机械性能.....	565
2 承受静载荷和低循环载荷的能力.....	566
3 机械零件的疲劳极限平均值.....	588
参考文献.....	631

绪 论

极限状态、承载能力和安全系数 结构构件的强度可通过构件中由作用载荷、温度场、磁场和其他场产生的力与导致这些构件处于极限状态的力的比较来加以评定。极限状态的判据随结构的工作条件、所用材料的机械性能、受力状态和受热条件的不同而各异。

材料可能呈延性状态，这时材料在发生断裂之前具有很大的塑性变形和相应的机械能损耗。材料也可能呈脆性状态，这时材料在发生断裂之前没有很大的塑性变形，而且断裂过程进行得很快。材料也可能呈中间状态，这时断裂伴有不大的塑性变形而以不大的速度发展。在持久地作周期性变化的载荷作用下，材料状态的缓慢变化过程引起了随时间的转移而缓慢地发生疲劳破坏的现象。在高温条件下，且在持久静载荷作用下，缓慢地进行的蠕变过程和材料状态的变化是材料随时间的转移而缓慢地发生持久静断裂的原因。环境（例如，放射线场和高频机械振动场）可能对材料的状态及其在使用过程中的变化有很大的影响。

对于很多材料，受热条件是决定结构中材料状态的重要因素。在低温下，主要是铁基合金显得容易转为脆性状态。高温特别是持久地保持高温，会引起时效和脆化现象。有很多高强度材料，在使用温度的广大范围内呈脆性状态。这是陶瓷、石英、玻璃基材料以及铬、钨、碳和其他一些化学元素型难熔金属所特有的。

当材料呈延性状态时，结构构件的极限承载能力可看作是它的一个承载阶段，经过这个阶段后，当载荷略有增加时，尺寸却发生很大的变化，即发生进展得很快的变形。在很多结构中，这种形式的极限状态，可根据与其他部件结合使用的条件按最大容许残余位移来确定。例如，涡轮机圆盘的容许扩张与所规定的转

子与壳体之间的间隙有关。在达到极限状态之前，应变和应力作明显的弹塑性再分布，因此通过力的计算来确定极限状态时，需要用塑性理论的方法和在个别情况下用材料力学的方法来求解相应的问题。在超过弹性极限而循环数有限的重复载荷作用下，应力和应变的再分布会导致塑性应变积累的衰减，即获得顺应性。

当材料呈脆性状态或从脆性状态转为延性状态(准脆性状态)时，结构构件的极限状态可看作是一个静变形或进行得很快的变形阶段，这时在初期产生的裂纹和从其他发生源(腐蚀缺陷、表面的机械损伤等)产生的裂纹迅速扩展。在金属中，通常伴有很多小的局部塑性应变的裂纹迅速扩展，这与脆性或准脆性断裂机理相关联。这个过程在脆性断裂的发生、蔓延或停止阶段具有许多特征(如果断裂是由于构件在脆性断裂区的应力分布特征和材料性能所致)。这个过程还与构件金属的脆性程度，即伴有少量塑性变形的迅速断裂的条件有很大的关系。

脆性断裂和在裂纹蔓延期断裂的判据，对评定高强度钢和低碳钢制结构及其构件、在低气温或工艺低温(液化设备)下使用的制品和建筑物，以及现代重型机械制造、动力机械制造、船舶制造和工程建筑中常用的外形尺寸和厚度很大的焊接和铸造结构的强度，特别显得需要。

这些型式的结构有很多在工作过程中承受重复作用的载荷，以致在结构中产生了重复的塑性应变，而在整个使用期限内只有有限的循环数(以千计)。这些重复的塑性应变是产生低循环疲劳裂纹的原因。在这种情况下，将结构构件的低循环极限状态，看作是仅产生疲劳裂纹或达到引起脆性断裂的临界尺寸时的状态。低循环极限状态是经过了构件中的应变和应力作周期性弹塑性再分布的过程而形成的。考虑到产生低循环疲劳裂纹的条件，可按集中区的变形判据来确定，计算相应的力和循环数时，要以求解塑性问题为基础。

当结构构件在循环数很多(以 10^6 计)的交变应力下持久地工作时，极限状态主要按金属因发生周期性变形而逐渐积累的状

态变化（疲劳过程）来确定。在这种情况下，应力状态通常可看作是弹性状态，而且不随时间而变化，但在应变中，特别是在过程的初期，含有某种比率的塑性应变。极限状态可用经过一定循环数后产生疲劳裂纹（基本上在弹性变形范围内）的力和与之成正比的集中区局部应力来加以表征。产生裂纹的条件可按反映金属循环性能和集中区应力分布特性的疲劳破坏判据来确定。

如果结构构件在高温条件下工作，则时间就是导致达到极限状态的因素之一。这是由于材料的机械性能逐渐发生变化和构件中的应变和应力因蠕变而作再分布所致。在承受持久静载荷的构件中，极限状态可按承载阶段来确定，这时由于应变的再分布和积累，在最大应力区产生了引起持久静断裂的裂纹。计算相应的力和时间时，要以求解蠕变问题为基础，从而确定应变集中区的应变积累，而且要引用持久静断裂判据，即形成缓慢脆断裂纹的判据。

在加热状态下，且在作周期性变化的持久载荷作用下，由于在载荷变化时发生有效变形，以及在承载和变形状态下随时间的延续而发生蠕变或松弛的结果，机械零件上将产生应变和应力再分布过程。计算极限状态下的力、循环数和时间时，要求解与循环和时间有关的集中区应变和应力的弹塑性分布问题，而且要引用材料中逐渐发生的持久静态变化和周期性变化组合条件下的断裂（产生裂纹）判据。

因此，从运动学意义上研究了变形状态，并引用了产生裂纹或极限容许位移的判据来分析极限状态，就能确定表征机械零件承载能力的相应极限载荷、循环数和时间。极限载荷因素（一般以 Q^* 表示）可以是力、力矩、压力。

当外作用载荷 Q_h 使机械零件所处的状态未达到极限状态时，零件的安全系数可按下式确定：

$$n_s = \frac{Q^*}{Q_h}$$

由于在很多情况下，机械零件的极限状态和工作状态相当于

弹塑性变形阶段，因此应变和应力与力不成正比。由此可见，按应力或应变算出的安全系数

$$n_s = \frac{\sigma^*}{\sigma_h} \quad \text{或} \quad n_e = \frac{\epsilon^*}{\epsilon_h}$$

不等于 n_0 。

用了按极限载荷算出的安全系数 n_0 ，就能反映机械零件在承载过程中不按正比（非线性）地转向极限状态的特征。在弹性变形的范围内，在个别情况下，例如在发生接触变形时或支承条件随载荷的增加而发生变化时，应力也可能与力不成正比。

在确定结构构件的极限载荷，即承载能力时，要用材料抗塑性变形的强度特性值（屈服极限或蠕变极限）和抗断裂的强度特性值（强度极限、临界应变或裂纹深度、形成裂纹所需的循环数或时间）。对于复合应力状态，要用塑性条件或蠕变条件，以及强度判据（对于静载荷或循环载荷）。

对于在接触变形区（圆柱面、球面或其它面的局部接触）产生的应力状态，要引用关于接触屈服极限、接触强度极限和接触疲劳极限的概念。这些特性值通常超过单轴应力状态下的相应特性值，金属的塑性愈好和应力状态愈接近于三维压缩，则超过愈多。超过的值可达一倍以上。接触强度极限可根据金属的硬度来估算。结构构件的接触承载能力的问题和相应的计算，本书中不予讨论。

为了评定在持久地工作或载荷循环数很多（在常温或高温下）时的极限状态和承载能力，要用关于按寿命（或持久性）计算的安全系数的表达式：

$$n_t = \frac{t^*}{t_h} \quad \text{或} \quad n_N = \frac{N^*}{N_h}$$

这些判据能反映从弹塑性、时间和循环上转向极限状态时的状态变化特性。

材料抗变形和断裂的强度 破坏发展阶段的极限状态 综上所述，确定承载能力时，需要求解关于弹塑性应力状态的问题，

而在很多情况下，要考虑温度和时间。求解时，要用应力、应变、时间、循环数、温度之间的关系。因此，除了在单调载荷或循环载荷作用下的一般塑性条件外，还要用描述循环塑性变形过程以及蠕变变形和松弛的状态方程。在个别情况下，必须按非等温条件来研究这些过程。相应现象上的规律可从实验研究和假说得出。

在大多数情况下，确定承载能力时，抗断裂的强度判据具有重要意义，而不论断裂是在引起裂纹扩展的循环载荷和持久静载荷作用下缓慢发生的，还是在产生脆断裂纹时迅速发生的。裂纹产生在机械零件的材料状态和应力状态发生最强烈变化的区域，而这些变化通常是由于零件的几何形状或零件上存在宏观缺陷而引起应力集中所致。这些判据能反映材料的状态、材料的物理-机械性能特征、应力状态的三维性、循环载荷或持久静载荷的变化过程。由于在缓慢发生断裂之前大多数具有塑性变形，因此所达到的应变及其积累过程，是断裂判据特别是在低循环载荷和持久静载荷作用下发生的断裂判据的主要论点。

由于对结构构件上所产生的不断扩展中的裂纹的探查和测量方法及手段的进步，最好根据破坏阶段来评定其承载能力。作这样的评定时，应该根据在循环载荷作用下的裂纹扩展规律，而这种规律是用断裂力学方法研究了裂纹扩展到临界尺寸时相应的极限状态而建立起来的。在这种情况下，从寿命的意义上，将安全系数看作是为达到极限状态而需要的时间或循环数与在使用期间所作用的时间或循环数之比值，即 n_s 或 $\frac{n}{n_s}$ 。在循环载荷和持久静载荷作用下的裂纹扩展规律，可用应力强度因子 K_I 值（见第五章）来表示。应力强度因子与裂纹尺寸和载荷条件以及描述材料机械性能的方程中的参数有关。这些参数又与使用过程中的温度和材料状态的变化有关。

结构构件强度和寿命的概率估算 这些计算的基本观点 结构构件的载荷条件和强度特性具有分散性，这是由于使用条件易变以及材料性能和制品制造技术具有偏差所致。因此，在前面列出的以力、变形和时间因素表示的安全系数表达式的右边，分子

和分母均具有随机偏差。用统计方法估算安全系数表达式中分子和分母的值时，可用正态型、对数正态型、韦伯尔（Weibull）型等相应的分布函数来表示。安全系数可按作用力和承载能力的平均值（或中值）来确定，也可按以某种概率求得的极值（力的最大值和承载能力的最小值）来确定。但在任何情况下，安全系数的所需值都要按工作条件下的可靠性要求来确定。可靠性可按被研究的这种型式制品中所用的总数中各个零件（例如，活塞式发动机的阀、汽车的半轴、涡轮机的叶片等）发生破坏的概率来评定。如果将安全系数定义为时间或循环数（即寿命）之比值，则在这种情况下用了安全系数，就能根据在给定条件下使用的总数中各个零件的工作时间来估算破坏概率，即安全系数能反映各个零件使用期限的分布（见第六章）。

在给定的寿命或一定的使用时间下的破坏概率与安全系数有关。因此，从可能发生某种形式断裂（循环断裂、脆性断裂、持久静断裂）的意义来看，安全系数之值可按使用条件下的可靠性要求来确定。

如果破坏概率是通过裂纹扩展的研究来确定的，则裂纹的扩展速度可用统计方法联系到它特有的分散性来表示。这样就能根据所规定的在结构使用阶段出现裂纹和缺陷后的适用寿命来估算形成极限状态的概率。

本书的前六章介绍了在持久静载荷和低循环载荷作用下，考虑弹塑性和温度-时间问题，以及在高循环载荷作用下根据疲劳和概率观点而建立起来的极限状态概念和强度计算方法，而后四章举了具体的结构构件计算实例来加以说明。因此，讨论了应变和应力作弹塑性再分布的容器结构要素和补偿热位移的伸缩接头的计算、与疲劳和塑性变形效应有关的螺纹联接承受循环载荷和静载荷能力的计算、用概率法评定可靠性而以疲劳为主（这时形状因素和制造工艺的影响很大）的轴类零件的计算，以及根据关于工艺因素和结构因素对静强度和疲劳强度影响的系统化实验数据进行的焊联接的强度计算。

第一章 在静载荷作用下呈延性状态时的承载能力和强度计算

1 抗静塑性变形的强度

在线性应力状态下抗塑性变形的强度可用拉伸曲线图来表示。这样的曲线可以一直作到试件断裂。

作图 1.1 所示的真实曲线时，在纵坐标轴上取真应力

$$s = \frac{P}{F_k} \quad (1.1)$$

式中 P ——在某变形阶段作用在试件上的力；

F_k ——在该阶段试件的截面积。

而在横坐标轴上取真应变

$$\epsilon = \int_{l_0}^{l_k} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_k}{l_0} = \ln \frac{1}{1 - \psi} \quad (1.2)$$

式中 l_0 和 l_k ——试件的初始长度和最终长度；

ψ ——截面收缩率。

在公称的曲线图中，取

公称应力 $\sigma = \frac{P}{F_0}$ 和公称应

变 $\epsilon_0 = \frac{\Delta l}{l_0}$ 为曲线坐标。当塑

性变形很小时，即 $\frac{P}{F_0} = \sigma$

$\approx s$ 时，公称曲线与真实曲线重合。当公称应力达到强度极限（瞬时强度） σ_a 时，

沿试件体积均匀变形的过程

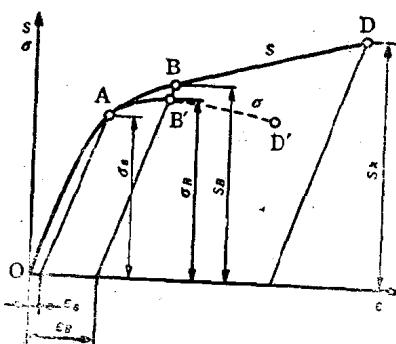


图1.1 拉伸变形曲线图

结束而开始出现缩颈(B'点), 两曲线发生很大的分歧。这时, 相应的真应力为 s_s 。

继续拉伸时, 沿试件全长的变形变成不均匀而集中在缩颈区。真实曲线上 D 点和公称曲线上 D' 点相当于试件的断裂点。应力 s_k 称为真抗拉强度。它表示材料受静载荷时的强度。当试件上出现明显的缩颈而断裂时, 应力 s_k 沿缩颈截面不均匀分布, 因此它也是公称应力。

曾根据缩颈处应力状态的分析提出了缩颈截面上最大真应力精确值的公式^[5]如下:

$$s_{max} = \frac{s}{1 + \frac{a}{4R}} \quad (1.3)$$

式中 R —— 缩颈表面的曲率半径;

a —— 试件缩颈处的半径;

$1 + \frac{a}{4R}$ 随截面收缩率 $\psi_s = \frac{F_s - F_k}{F_s}$ 而变化。

曾根据真拉伸变形曲线的分析提出了真抗拉强度的计算公式如下:

$$s_k = \sigma_s (1 + 1.35\psi) \quad (1.4)$$

受纯剪时, 出现了抗剪应力作用的现象。这种应力状态是在圆管试件的扭转试验中得到的。抗剪应力的现象可用剪切曲线图(图 1.2)来表示, 在其横坐标轴上取最大的真剪应变

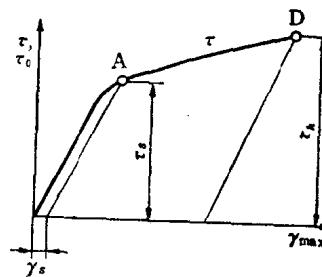


图 1.2 圆管试件的扭转变形曲线图

式中 ε_{max} 和 ε_{min} —— 最大和最小的真应变。

而在其纵坐标轴上取真剪应力 τ 。

$$\gamma_{max} = \frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{2} \quad (1.5)$$

在半径为 r 的薄壁管试件的试验中，真剪应力几乎等于公称剪应力，根据它沿截面均匀分布且在变形过程中保持不变的假设算得

$$\tau = \tau_0 = \frac{M_t}{2F_k \delta} \quad (1.6)$$

式中 M_t —— 扭矩；

F_k —— 管壁中线所包围的面积；

δ —— 壁厚。

剪切曲线上 A 点(图1.2)，残余应变达到 γ_{rs} ，相应的应力 $\tau_{rs} = \tau_s$ ，这是剪切屈服极限。曲线上 D 点相当于断裂点，而真应力 τ_b 称为(真)抗剪强度。

在实心试件的试验中，作剪切曲线图用的应力按弹塑性阶段应力分布的数据确定。

对于脆性或低塑性材料，通过圆截面试件的扭转试验测得的引起材料断裂的剪应力 $\tau_{bs} = \tau_b$ (即强度极限) 可按材料力学中对于弹性应变分布的常用公式来计算，即

$$\tau_{bs} = \frac{M_t}{W_p} \quad (1.7)$$

式中 M_t —— 引起断裂的扭矩；

W_p —— 抗扭截面模量。

将拉伸曲线图和扭转曲线图进行比较后可知，在塑性变形范围内二者相差往往不超过

5~10%，特别是在考虑了受拉时缩颈上的应力状态后，二者相当接近(图1.3)。同时，对于亚稳性和各向异性材料，就不会有这种情况[6、7]，而为了得到单一的变形曲线，必须采用考虑剪切面上正应力影响的坐标系。

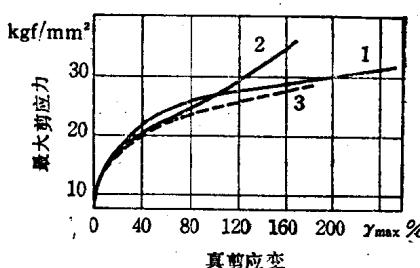


图1.3 阿姆克铁的变形曲线图
1—受扭 2—受拉 3—受拉并对缩颈处的
应力状态进行修正

为了确定塑性材料制零件的承载能力，一般利用真变形曲线的始段来研究这些零件在塑性变形不大时的特性（因为当应变为1~2%时，将达到极限容许位移）。在这种情况下，真实曲线与公称曲线几乎重合，而确定屈服极限 σ_s （图1.1上的A点）具有重大意义，在弹塑性范围内计算时，我们将取屈服极限等于比例极限，即变形曲线上直线段终点的应力。

公称的屈服极限对应于试件中一定的残余应变，即0.2%。公称屈服极限之值见有关材料机械性能的参考文献、材料标准和其他文献。

因此，以屈服极限 σ_s 和 τ_{ss} 作为抵抗小塑性变形的特性值；以强度极限 σ_b 和 τ_{bs} 作为抵抗大塑性变形的特性值；以真应力中的 s_b 和 τ_b 以及公称应力中的 σ_b 和 τ_{bs} （这是脆性或低塑性材料特有的）作为断裂特性值。

对某些材料来说，抗压断强度要比抗拉断强度高，因此，对这些材料要确定抗压强度极限 σ_{bc} 。

材料在不同应力状态下抗塑性变形的强度可按塑性条件来确定。

对于高塑性材料，可用最大剪应力和八面体应力假说。按照最大剪应力假说，当这些应力达到屈服极限值时，发生塑性变形，即

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s = 2\tau_s \quad (1.8)$$

式中 σ_1 和 σ_3 ——最大和最小主应力，二者之差的一半是最大剪应力；

σ_s ——抗拉屈服极限；

τ_s ——抗剪屈服极限。

作用有八面体应力的平面的法线与主应力方向的夹角相等。这些平面上的剪应力为^[9]：

$$\tau_n = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1.9)$$

式中 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 ——主应力。