向量分析的理论和习题

M·R·SPIEGEL 著

上海科学技术出版社

向量分析的理论和习题

M. R. 施皮格尔 著

于骏民 沈黛云 译

上海科学技术出版社

SCHAUM'S OUTLINE OF

THEORY AND PROBLEMS OF VECTOR ANALYSIS and an introduction to TENSOR ANALYSIS

By

Murray R. Spiegel

McGraw-Hill Book Company, 1974

向量分析的理论和习题

M. R. 施皮格尔　著

于骏民　沈黛云　译

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行　上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092　1/16　印张 13　字数 319,000
1981 年 11 月第 1 版　1984 年 6 月第 2 次印刷
印数 14,001—19,500

统一书号：13119·946　　定价：(科四)1.25 元

译　　序

当前，我国科学工作者、工程技术人员在向四化进军中，亟需扩大原有的数学基础．为适应这方面的需要，使广大科技工作者通过自学加强向量分析和张量分析的基础，我们将国外一套丛书(Schaum's Outline Series)中 M. R. 施皮格尔编的«Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis»一书译出，供读者参考或自学之用．

向量分析和张量分析是现代科学和工程技术(特别是物理、力学和电磁学)中的重要工具．它对简化公式，明确概念，掌握客观规律的实质将有较大裨益．原书对向量分析作了比较全面而深入的叙述，并根据近代科技的发展，对张量的基础作了介绍，这对需要了解张量的读者，将是一本很好的入门书．本书编写体裁新颖，由浅入深，步步紧扣；特别是为便于应用，每章是先讲结论，如需深入了解和证明，还可通过学习例题及详解加以掌握，然后复习巩固，这样可根据读者的需要与可能，有针对性地安排自学．根据这些要求，本书各章都分三节：第一节介绍基本内容和结论；第二节举出大量例题及详解，将基本概念、定义、定理以及应用等方面深入讲解和证明；第三节是补充题，并附有答案供读者复习巩固所学的内容．

本书共八章，前五章由于骏民同志译出，后三章由沈黛云同志译出，并经曹敏谦同志校阅了全稿．由于时间短促，译者水平有限，译文中定有不少缺点错误，欢迎批评指正．

译　者　1980 年 2 月

原　序

向量分析始于十九世纪中叶，近年来已成为工程师、物理工作者、数学工作者和其他科学工作者所必需的数学基础的基本内容．对掌握向量分析的要求绝不是偶然的，因为它不仅为由物理和几何问题引出的数学方程提供了简明的记号，而且也为形成物理和几何概念的想象提供了帮助．简言之，它也许是物理科学最受赞赏的语言和思想方式．

本书既可作为向量分析正规课程的教本，也可作为通用的标准教科书很有用的补充读物．它对于攻读物理、力学、电磁理论、空气动力学的读者或者在他从事的领域中要用到向量分析方法的读者都是颇有价值的．

本书每章的开头都对有关的定义、原理、定理作了清晰的叙述，并伴有说明性的例题及其它阐述性的材料，接着是按主题内容分组的已解出的习题及补充题．已解出的习题是用来对理论作说明和进一步引伸，使之重点突出，不然，读者可能仍会觉得自己掌握得不扎实．为了有效地进行教学，对基本原理作了必要的重复．因而一些定理的证明和公式的推导包括在已解出的习题之中．大量附有答案的补充题是每一章全面复习的材料．

本书讨论的课题包括向量代数、向量微分、向量积分、斯托克斯定理、散度定理和其它积分定理及其在各个领域中的许多应用．还增加了曲线坐标和张量分析等章节，这对近代工程学、物理、数学的研究是非常有用的．

本书比大多数初等教程容纳了更多的材料，这就使得本书更加灵活，它作为一本有用的参考书，将更进一步激发读者对所论课题的兴趣．

（下为致谢部分，译略．）

M. R. 施皮格尔
于伦塞利尔工学院

目　录

第一章 向量与纯量

§1.1 基本内容

1. 向量与纯量

向量是既有大小又有方向的量．诸如位移、速度、力和加速度等等．

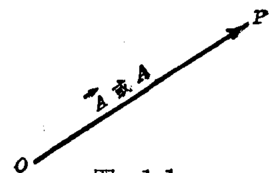

图 1-1

图形上用一箭矢 OP(图 1-1)表示向量．箭矢的指向确定了向量的方向，箭矢的长度表示向量的大小．箭矢的尾端 O 叫做向量的起点，箭矢的首端 P 叫做向量的终点．

在分析运算中常用上方带有箭头的字母 $\vec{A}$ 表示一个向量，它的大小，即模，用记号 $|\vec{A}|$ 或 A 表示．在印刷出版物中，用斜黑体字 $\boldsymbol{A}$ 表示向量 $\vec{A}$，而用记号 $|\boldsymbol{A}|$ 表示它的模．本书用斜黑体字表示向量．向量 OP 也可以用 $\overrightarrow{OP}$ 表示，而用 $\overrightarrow{OP}$ 或 $|\overrightarrow{OP}|$ 表示它的模．

纯量是只有大小而无方向的量．例如质量、长度、时间、温度以及任意实数等等．纯量象在初等代数中一样，用通常字体的字母表示，纯量的运算也遵循初等代数的运算规则．

2. 向量代数

初等代数中，大家熟悉的数量或纯量的加法、减法和乘法运算，经过适当的定义，可以推广到向量代数．下列定义是基本的．

1) 如果向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的方向一致，大小相等，不管它们的起点位置如何，则说这两个向量是相等的．记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$(图 1-2)．

2) 用记号 $-\boldsymbol{A}$ 表示一个大小与 $\boldsymbol{A}$ 相等，而方向相反的向量(图 1-3)．

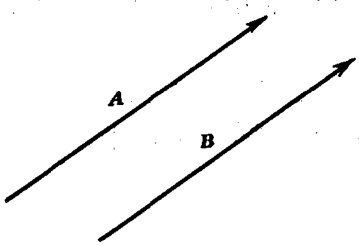

图 1-2

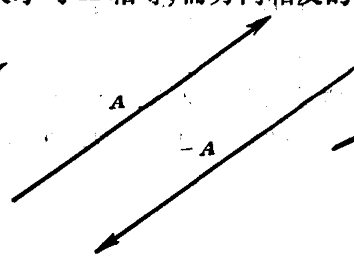

图 1-3

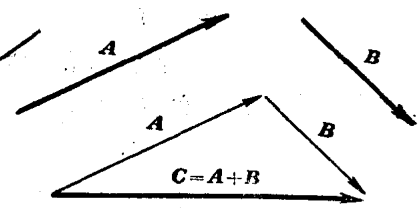

图 1-4

3) 向量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的和或合成向量是向量 $\boldsymbol{C}$，它的起点及终点是这样确定的，将 $\boldsymbol{B}$ 的起点与 $\boldsymbol{A}$ 的终点相接，那末，以 $\boldsymbol{A}$ 的起点作为 $\boldsymbol{C}$ 的起点，而以 $\boldsymbol{B}$ 的终点作为 $\boldsymbol{C}$ 的终点(图 1-4)．将 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的和写成 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$．

这里的定义与向量相加的平行四边形法则是等价的 (见题 1.3)，它可以直接推广到两个以上的向量的相加 (见题 1.4)．

4) 向量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的差是向量 $\boldsymbol{C}$，用 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 表示，它加上 $\boldsymbol{B}$ 后得向量 $\boldsymbol{A}$，等价地，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可定义为和 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$．

如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，那末 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 便定义为零向量，用符号 $\mathbf{0}$ 表示，或简写为 0. 它的模为零，因而没有确定的方向. 模不是零的向量 $\boldsymbol{A}$ 称为非零向量. 除另有说明外，所有的向量都是非零向量.

5) 向量 $\boldsymbol{A}$ 与纯量 m 的乘积是一向量 $m\boldsymbol{A}$，它的模是 $\boldsymbol{A}$ 的模的 $|m|$ 倍，它的方向按照 m 是正或负而与 $\boldsymbol{A}$ 同向或反向. 如果 $m=0$，则 $m\boldsymbol{A}$ 为零向量.

3. 向量代数运算定律

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是向量，m、n 是纯量，则

1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$,	加法交换律
2) $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$,	加法结合律
3) $m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}m$,	乘法交换律
4) $m(n\boldsymbol{A})=(mn)\boldsymbol{A}$,	乘法结合律
5) $(m+n)\boldsymbol{A}=m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{A}$,	分配律
6) $m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=m\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}$.	分配律

注意，这些定律中，只用到了一个向量和一个或多个纯量的乘法. 第二章将定义向量与向量的乘积.

这些定律可使我们象解代数方程一样，来解向量方程. 例如，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 可经移项后得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}$.

4. 单位向量

单位向量是长度为 1 的向量. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个模 $A\neq 0$ 的向量，则 $\boldsymbol{A}/A$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同向的单位向量.

任一向量 $\boldsymbol{A}$，可以用它的模 A 乘以和 $\boldsymbol{A}$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{a}$ 来表示，记为 $\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{a}$.

5. 基本单位向量

基本单位向量是一组重要的单位向量，用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 表示，它们的方向分别是三维直角坐标系中 x、y、z 轴的正方向(见图 1-5).

除非另作说明，我们总采用*右手直角坐标系*. 这种坐标系之所以称作右手系是从下列事实得出的，即一枚右旋螺钉从 Ox 轴转过 90° 到 Oy 轴时将向 z 轴的正方向推进. 如图 1-5.

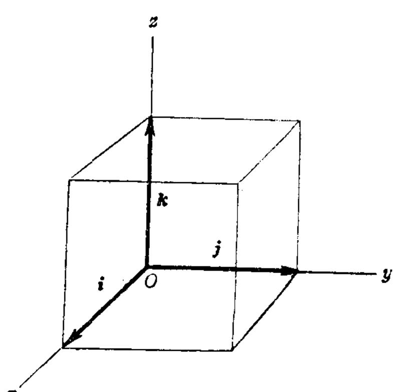

图 1-5

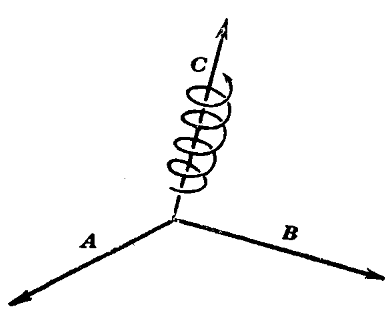

图 1-6

一般，三个向量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$，它们的起点重合而不共面、即不在同一平面上或不平行于同一平面，如果一枚右旋螺钉从 $\boldsymbol{A}$ 旋转一个小于 $180°$ 的角度到 $\boldsymbol{B}$ 时将向 $\boldsymbol{C}$ 推进，则说这三个向量形成一个右手系或右旋系．如图 1-6 所示．

6．向量的分量

三维空间中任何向量 $\boldsymbol{A}$ 都可以在一个直角坐标系中用起自原点 O 的向量来表示(见图 1-7)．设起点为 O 的向量 $\boldsymbol{A}$ 的终点坐标是 (A_1, A_2, A_3)．向量 $A_1\boldsymbol{i}$、$A_2\boldsymbol{j}$、$A_3\boldsymbol{k}$ 分别叫做 $\boldsymbol{A}$ 在 x, y, z 方向的直角分向量或分向量，而 A_1、A_2、A_3 分别叫做 $\boldsymbol{A}$ 在 x, y, z 方向的直角分量或分量．

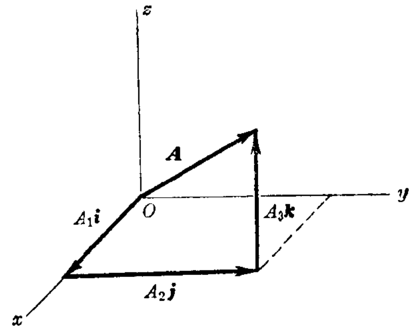

图 1-7

向量 $A_1\boldsymbol{i}$, $A_2\boldsymbol{j}$ 与 $A_3\boldsymbol{k}$ 的和或合成向量是向量 $\boldsymbol{A}$，所以可写成

$$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k},$$

$\boldsymbol{A}$ 的模是 $A=|\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}$.

特别，从 O 到点 (x, y, z) 的位置向量或向径 $\boldsymbol{r}$ 写成

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

它的模是 $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

7．纯量场

如果对于空间域 R 的每一点 (x, y, z)，有一数或纯量 $\phi(x, y, z)$ 与它对应，那末 ϕ 就叫做位置的纯量函数或纯量点函数，并说 ϕ 是定义于 R 的纯量场．

例 (1) 某一时刻地球内部或表面的各点温度定义一纯量场．

(2) $\phi(x, y, z)=x^3y-z^2$ 定义一纯量场．

与时间无关的纯量场叫做定常纯量场或恒稳纯量场．

8．向量场

如果对于空间域 R 的每一点 (x, y, z)，有向量 $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ 与它对应，那末 $\boldsymbol{V}$ 就叫做位置的向量函数或向量点函数，并说 $\boldsymbol{V}$ 是定义于 R 的向量场．

例 (1) 如果在某一时刻已知流体内任一点 (x, y, z) 的速度，那末就定义了一向量场．

(2) $\boldsymbol{V}(x, y, z)=xy^2\boldsymbol{i}-2yz^3\boldsymbol{j}+x^2z\boldsymbol{k}$ 定义了一向量场．

与时间无关的向量场叫做定常向量场或恒稳向量场．

§1.2 问题及其解

1.1 说明下列各量哪个是纯量，哪个是向量．

(1) 重量，(2) 热量(卡)，(3) 比热，(4) 动量，(5) 密度，(6) 能量，(7) 体积，(8) 距离，(9) 速率，(10) 磁场强度．

解：(1) 向量，(2) 纯量，(3) 纯量，(4) 向量，(5) 纯量，(6) 纯量，(7) 纯量，(8) 纯量，(9) 纯量，(10) 向量．

1.2 作图表示：(1) 大小为 $10\,N$ 方向东偏北 $30°$ 的力；(2) 大小为 $15\,N$ 方向北偏东

30° 的力.

解：所求的向量及选择的单位如图 1-8 及 1-9.

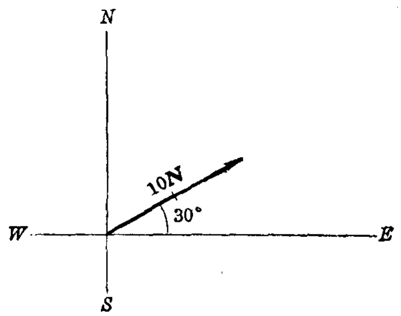

图 1-8

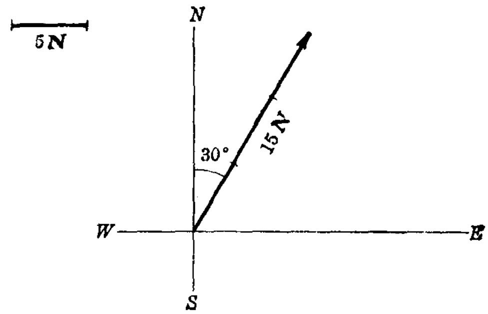

图 1-9

1.3 一辆汽车向北行驶 3 公里，然后向东北行驶 5 公里. 作图表示这些位移并确定位移的合成，用 (1) 图解法；(2) 分析法.

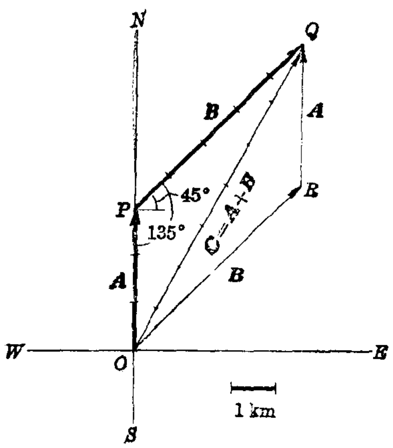

图 1-10

解：向量 $\overrightarrow{OP}$ 或 $\boldsymbol{A}$ 表示向北 3 公里的位移.

向量 $\overrightarrow{PQ}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 表示向东北 5 公里的位移.

向量 $\overrightarrow{OQ}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 表示向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的合成或者和，即 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 这是向量加法的三角形法则.

合成向量 $\overrightarrow{OQ}$ 也可由以 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{A}$ 及 $\overrightarrow{OR}$（等于向量 $\overrightarrow{PQ}$ 或 $\boldsymbol{B}$）为两边所作平行四边形 $OPQR$ 的对角线而得. 这是向量加法的平行四边形法则.

(1) 图解法求合力：在向量 $\overrightarrow{OQ}$ 上画出 1 公里单位，量出 $\overrightarrow{OQ}$ 的大小是 7.4 公里（近似值）. 用量角器量出角 $EOQ=61.5°$，那末，向量 $\overrightarrow{OQ}$ 的模是 7.4 公里，方向是东偏北 61.5°. 见图 1-10.

(2) 分析法求合力：在三角形 OPQ 中，用 A、B、C 表示 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的模，由余弦定理：

$$C^2=A^2+B^2-2AB\cos\angle OPQ=3^2+5^2-2(3)(5)\cos 135°$$
$$=34+15\sqrt{2}=55.21,$$
$$C=7.43\text{(近似值)}.$$

用正弦定理：

$$\frac{A}{\sin\angle OQP}=\frac{C}{\sin\angle OPQ},$$

于是
$$\sin\angle OQP=\frac{A\sin\angle OPQ}{C}=\frac{3(0.707)}{7.43}=0.2855,$$
$$\angle OQP=16°35'.$$

如此便得向量 $\boldsymbol{OQ}$ 的模是 7.43 公里，方向是东偏北 $(45°+16°35')=61°35'$.

1.4 求下列位移的和或合成向量：

$\boldsymbol{A}$：10 米，西北；$\boldsymbol{B}$：20 米，东偏北 30°；$\boldsymbol{C}$：35 米，正南. 见图 1-11.

解：以 $\boldsymbol{A}$ 的终点作为 $\boldsymbol{B}$ 的起点，以 $\boldsymbol{B}$ 的终点作为 $\boldsymbol{C}$ 的起点，合成向量 $\boldsymbol{D}$ 是连接 $\boldsymbol{A}$ 的起点到 $\boldsymbol{C}$ 的终点而成，即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$. 画出合成向量的图形，并量得它的模是 4.1 单位 $=20.5$ 米以及方向是东偏南 60°.

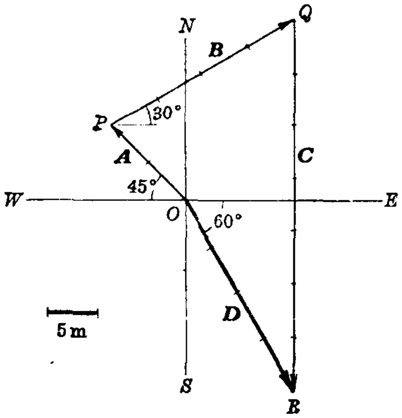

图 1-11

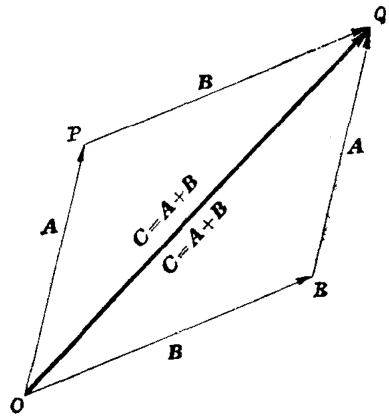

图 1-12

不管是在平面或者空间，三个或多个向量相加的分析法见题 1.26.

1.5 证明向量加法是可交换的，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$. 见图 1-12.

解: $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}$ 或 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$,

以及 $\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{OQ}$ 或 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$.

因此 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

1.6 证明向量加法是可结合的，即

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}.$$

见图 1-13.

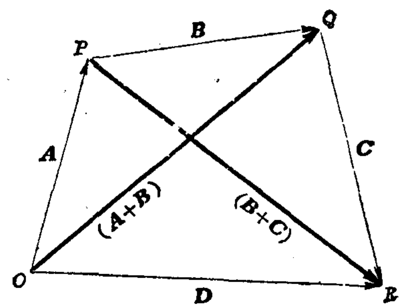

图 1-13

解: $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$,

以及

$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}).$$

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}=\boldsymbol{D}, \quad 即 \quad \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{D}.$$

$$\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}=\boldsymbol{D}, \quad 即 \quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}.$$

那末，

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}.$$

推广题 1.5 和题 1.6 的结果表明，对任意多个向量的加法与其次序无关.

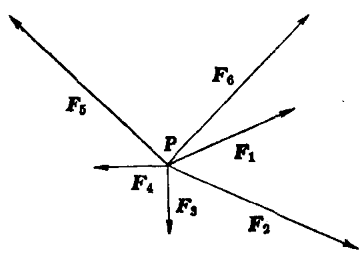

图 1-14

1.7 作用于物体 P 的力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_6$ 如图 1-14，求阻止 P 移动所需的力.

解: 因为向量的加法与次序无关，我们可以从任意一个向量，譬如说 $\boldsymbol{F}_1$ 开始，将 $\boldsymbol{F}_1$ 加上 $\boldsymbol{F}_2$，然后再加 $\boldsymbol{F}_3$，等等. 从 $\boldsymbol{F}_1$ 的起点到 $\boldsymbol{F}_6$ 的终点所作向量，就是合力 $\boldsymbol{R}$，即 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\boldsymbol{F}_4+\boldsymbol{F}_5+\boldsymbol{F}_6$.

阻止 P 移动所需的力是 $-\boldsymbol{R}$，它是一个大小与 $|\boldsymbol{R}|$ 相等而方向相反的向量，有时叫做*平衡力*(见图 1-15).

1.8 已知向量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ (图 1-16)，求解 (1) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{C}$; (2) $3\boldsymbol{C}-\frac{1}{2}(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$.

解: (1) 用图解法求出 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{C}$，如图 1-17.

(2) 用图解法先求出 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$(图 1-18)，然后求出 $3\boldsymbol{C}-\frac{1}{2}(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$，如图 1-19.

1.9 一架飞机以相对地面 125 公里/小时的航速朝西北方向飞行，这时有相对地面 5C 公里/小时的西风. 如果没有风时该机将以怎样的航速和航向飞行?

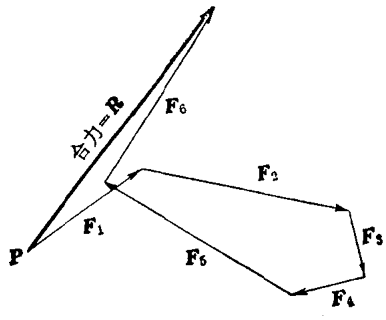

图 1-15

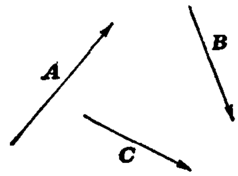

图 1-16

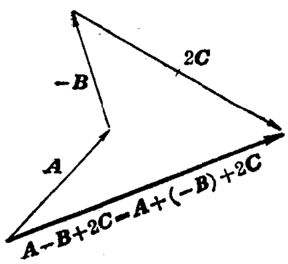

图 1-17

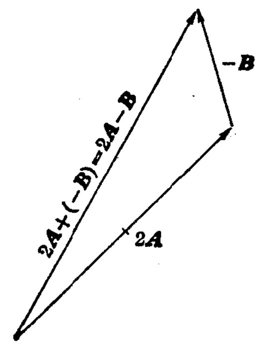

图 1-18

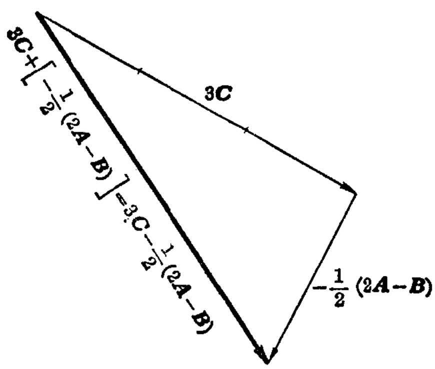

图 1-19

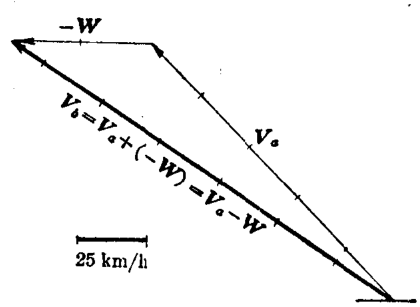

图 1-20

解：设 $\boldsymbol{W}$=风速，$\boldsymbol{V}_a$=有风时飞机航速，$\boldsymbol{V}_b$=无风时飞机航速，那么，

$$\boldsymbol{V}_a=\boldsymbol{V}_b+\boldsymbol{W} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{V}_b=\boldsymbol{V}_a-\boldsymbol{W}=\boldsymbol{V}_a+(-\boldsymbol{W}).$$

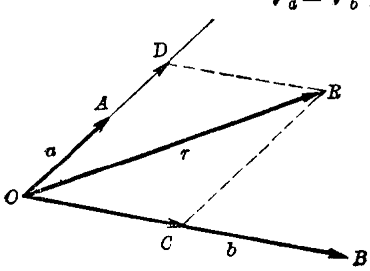

图 1-21

$\boldsymbol{V}_b$ 的大小为 6.5 单位=163 公里/小时的航速，方向是西偏北 33°. 见图 1-20.

1.10 已知两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，求位于由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 确定的平面内的任意向量 $\boldsymbol{r}$ 的表示式.

解：不共线的两个向量不平行于同一直线，因之当它们的起点重合时，便确定了一个平面，设 $\boldsymbol{r}$ 是位于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的平面内的任一向量，它的起点重合于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的起点 O. 从 $\boldsymbol{r}$ 的终点 R 作平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的直线交于 C 和 D(如有必要可作 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的延长线)，得到平行四边形 $ODRC$，见图 1-21，从图中，

$$\overrightarrow{OD}=x(\overrightarrow{OA})=x\boldsymbol{a}, \text{ 其中 } x \text{ 是纯量;}$$
$$\overrightarrow{OC}=y(\overrightarrow{OB})=y\boldsymbol{b}, \text{ 其中 } y \text{ 是纯量.}$$

而用向量加法的平行四边形法则，得

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{r}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b},$$

这就是要求的表示式. 向量 $x\boldsymbol{a}$ 和 $y\boldsymbol{b}$ 分别叫做 $\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 上的分向量. 纯量 x 和 y 可以是正的，也可以是负的，决定于向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向. 很明显，从构成的方式看，给定了 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 以后，x 和 y 是唯一的. 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 叫做一个平面上的基本向量.

1.11 已知不共面的三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 求三维空间中任意向量 $\boldsymbol{r}$ 的表示式.

解：不共面的向量是不平行于同一平面的向量. 因之当它们的起点重合时，各个向量不在同一平面内.

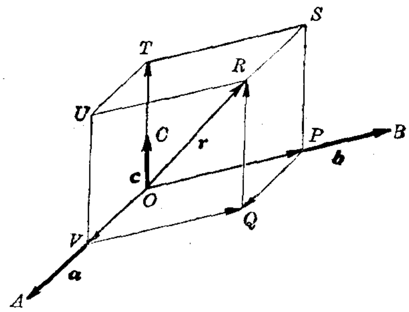

图 1-22

设 $\boldsymbol{r}$ 是空间任意向量，它的起点与 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的起点重合于 O, 通过 $\boldsymbol{r}$ 的终点 R 分别作平行于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平面，$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 平面，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{c}$ 平面的平面，得到平行六面体 $PQRSTUV$(如果需要，可作 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的延长线)，见图 1-22, 从图中，

$$\overrightarrow{OV}=x(\overrightarrow{OA})=x\boldsymbol{a}, \text{ 其中 } x \text{ 是纯量;}$$
$$\overrightarrow{OP}=y(\overrightarrow{OB})=y\boldsymbol{b}, \text{ 其中 } y \text{ 是纯量;}$$
$$\overrightarrow{OT}=z(\overrightarrow{OC})=z\boldsymbol{c}, \text{ 其中 } z \text{ 是纯量.}$$

而
$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OV}+\overrightarrow{VQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OV}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OT},$$
或者
$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}.$$

很明显，从构成的方式看，对于给定的 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{r}$, x、y、z 是唯一的.

向量 $x\boldsymbol{a}$, $y\boldsymbol{b}$, $z\boldsymbol{c}$ 分别叫做 $\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 方向上的分向量，而向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 叫做三维空间的基本向量.

作为特殊情形，如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是互相垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, 我们将看到任何向量 $\boldsymbol{r}$ 能够用 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 唯一地表示为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

如果 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 那末 $\boldsymbol{r}$ 必须位于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的平面内，便获得 1.10 的结果.

1.12 证明如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线，那末由 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 得出 $x=y=0$.

解：假定 $x\neq0$, 则由 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 得出

$$x\boldsymbol{a}=-y\boldsymbol{b}, \quad \text{或} \quad \boldsymbol{a}=-(y/x)\boldsymbol{b},$$

即 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 必须平行于同一条直线(共线)，这与假设矛盾，因而 $x=0$; 那末 $y\boldsymbol{b}=0$, 从而得 $y=0$.

1.13 如果 $x_1\boldsymbol{a}+y_1\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{a}+y_2\boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线，那末 $x_1=x_2$ 和 $y_1=y_2$.

解：
$$x_1\boldsymbol{a}+y_1\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{a}+y_2\boldsymbol{b}$$
可写成
$$x_1\boldsymbol{a}+y_1\boldsymbol{b}-(x_2\boldsymbol{a}+y_2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$$
或者
$$(x_1-x_2)\boldsymbol{a}+(y_1-y_2)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$
因之由题 1.12, 得

$$x_1-x_2=0,\ y_1-y_2=0 \quad \text{或} \quad x_1=x_2,\ y_1=y_2.$$

1.14 证明如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共面，那末由 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=0$ 得出 $x=y=z=0$.

解：假定 $x\neq0$, 于是由 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 得出

$$x\boldsymbol{a}=-y\boldsymbol{b}-z\boldsymbol{c} \quad 或 \quad \boldsymbol{a}=-(y/x)\boldsymbol{b}-(z/x)\boldsymbol{c}.$$

但是 $-(y/x)\boldsymbol{b}-(z/x)\boldsymbol{c}$ 是一个在 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的平面内的向量(题 1.10)，即 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的平面内，很明显，这与 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共面的假设矛盾，因此 $x=0$. 同理，当假定 $y\neq 0$ 和 $z\neq 0$ 将得到矛盾，故 $y=0$, $z=0$.

1.15 如果 $x_1\boldsymbol{a}+y_1\boldsymbol{b}+z_1\boldsymbol{c}=x_2\boldsymbol{a}+y_2\boldsymbol{b}+z_2\boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共面，那末 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$.

解：方程可以写成

$$(x_1-x_2)\boldsymbol{a}+(y_1-y_2)\boldsymbol{b}+(z_1-z_2)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},$$

于是由题 1.14，得 $x_1-x_2=0$, $y_1-y_2=0$, $z_1-z_2=0$ 或 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$.

1.16 证明平行四边形的对角线互相平分.

解：设已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线相交于 P. 如图 1-23 所示.

因为 $\overrightarrow{BD}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，故 $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，于是 $\overrightarrow{BP}=x(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$. 因为 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，故 $\overrightarrow{AP}=y(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. 但是 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP}$. 即

$$\boldsymbol{a}=y(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-x(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=(x+y)\boldsymbol{a}+(y-x)\boldsymbol{b}.$$

因为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线，根据题 1.13，得 $x+y=1$ 和 $y-x=0$. 即 $x=y=\frac{1}{2}$，故 P 是两条对角线的中点.

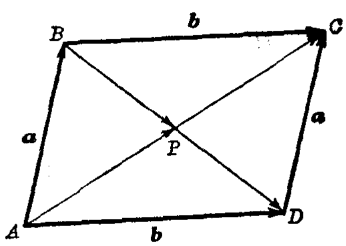

图 1-23

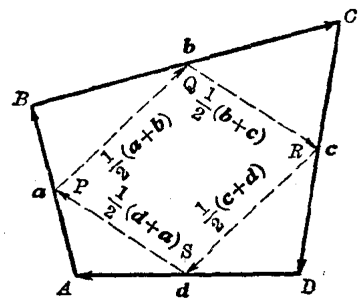

图 1-24

1.17 如果将任何四边形相邻两边的中点用直线连接，证明所得的四边形是平行四边形.

解：已知四边形 $ABCD$ 及其各边的中点 P, Q, R, S(参见图 1-24). 于是

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\ \overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

$$\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}),\ \overrightarrow{SP}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}).$$

但是　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$，那末

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\overrightarrow{SR},$$

以及

$$\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a})=\overrightarrow{PS}.$$

这样，四边形 $PQRS$ 的对边平行而且相等，所以它是平行四边形.

1.18 设 P_1、P_2、P_3 是相对于原点 O 的定点，又设 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$ 是从 O 到各点的位置向量. 证明如果 $a_1\boldsymbol{r}_1+a_2\boldsymbol{r}_2+a_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}$ 关于原点 O 成立，那末它关于任意另外的原点 O' 成立的充分必要条件是 $a_1+a_2+a_3=0$.

解：设 $\boldsymbol{r}_1'$、$\boldsymbol{r}_2'$、$\boldsymbol{r}_3'$ 是 P_1、P_2、P_3 的关于 O' 的位置向量，并设 $\boldsymbol{V}$ 是 O' 关于 O 的位置向量。我们寻求方程 $a_1\boldsymbol{r}_1'+a_2\boldsymbol{r}_2'+a_3\boldsymbol{r}_3'=\boldsymbol{0}$ 在新的参考系能成立的条件。

从图 1-25，显然

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{r}_1',\ \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{r}_2',\ \boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{r}_3'.$$

所以

$$a_1\boldsymbol{r}_1+a_2\boldsymbol{r}_2+a_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}$$

变为

$$a_1\boldsymbol{r}_1+a_2\boldsymbol{r}_2+a_3\boldsymbol{r}_3=a_1(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{r}_1')+a_2(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{r}_2')+a_3(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{r}_3')$$
$$=(a_1+a_2+a_3)\boldsymbol{V}+a_1\boldsymbol{r}_1'+a_2\boldsymbol{r}_2'+a_3\boldsymbol{r}_3'=\boldsymbol{0}.$$

因此 $a_1\boldsymbol{r}_1'+a_2\boldsymbol{r}_2'+a_3\boldsymbol{r}_3'=\boldsymbol{0}$ 成立的充分必要条件是

$$(a_1+a_2+a_3)\boldsymbol{V}=\boldsymbol{0},\quad 即\quad a_1+a_2+a_3=0.$$

这个结果可以推广。

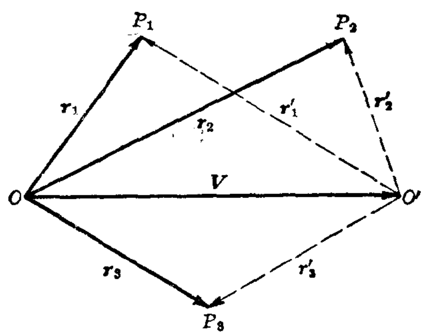

图 1-25

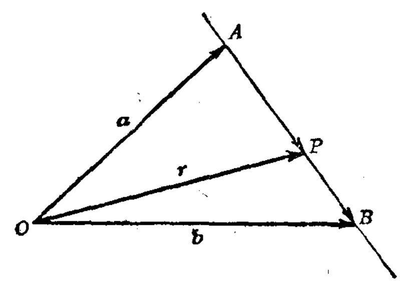

图 1-26

1.19 两定点 A 和 B 关于原点 O 的位置向量为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，求通过 A 和 B 的直线方程。

解：设 $\boldsymbol{r}$ 是通过 A、B 的直线上任意一点 P 的位置向量。从图 1-26 得：

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}$$

或

$$\boldsymbol{a}+\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{r},\quad 即\quad \overrightarrow{AP}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a};$$

以及

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$$

或

$$\boldsymbol{a}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b},\quad 即\quad \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}.$$

因为 $\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 共线，$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ 或 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}=t(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$。那末，所求方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\quad 或\quad \boldsymbol{r}=(1-t)\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}.$$

如果方程写成 $(1-t)\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}-\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 的系数的和是 $1-t+t-1=0$，因此，利用题 1.18 可知，P 在 A 和 B 的连线上，并且和原点 O 的选择无关，这就得到上述结论。

另一方法：因为 $\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{PB}$ 共线，故有纯量 m 和 n 使

$$m\overrightarrow{AP}=n\overrightarrow{PB}\quad 或\quad m(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})=n(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{r}),$$

解得 $\boldsymbol{r}=\dfrac{m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}}{m+n}$，这叫做对称式。

1.20 (1) 求用直角坐标系中的单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 表示点 $P(2,4,3)$ 和 $Q(1,-5,2)$ 的位置向量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$；(2) 用图解法和分析法求这两个位置向量的合成向量。

解：(1)

$$\boldsymbol{r}_1=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{r}_2=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EQ}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$$

(2) 图解法：$\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的合成向量由平行四边形 $OPRQ$ 的对角线 OR 求得（图 1-27）。

分析法：$\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的合成向量用下式求得：

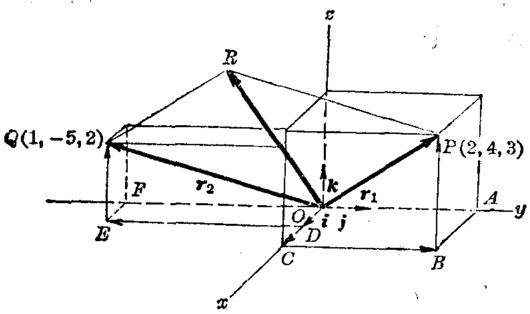

图 1-27

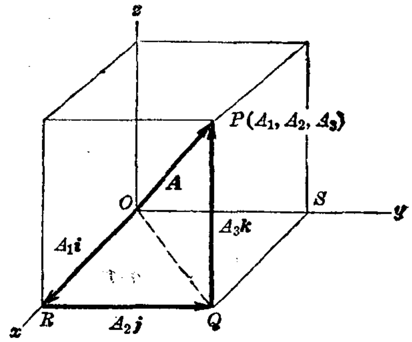

图 1-28

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=(2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}.$$

1.21 证明向量 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}$ 的模 A 是 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}$. 见图 1-28.

解: 由毕达哥拉斯定理, $(OP)^2=(OQ)^2+(QP)^2$,
其中 OP 表示向量 $\overrightarrow{OP}$ 的模, 等等. 同样地,

$$(OQ)^2=(OR)^2+(RQ)^2,$$

于是 $$(OP)^2=(OR)^2+(RQ)^2+(QP)^2 \quad 或 \quad A^2=A_1^2+A_2^2+A_3^2,$$

即 $$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}.$$

1.22 已知: $\boldsymbol{r}_1=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_2=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_3=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$. 求下列向量的模: (1) $\boldsymbol{r}_3$; (2) $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3$; (3) $2\boldsymbol{r}_1-3\boldsymbol{r}_2-5\boldsymbol{r}_3$.

解: (1) $$|\boldsymbol{r}_3|=|-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(2)^2}=3;$$

(2) $$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3&=(3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})+(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\\&=4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

于是 $$|\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3|=|4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}|=\sqrt{(4)^2+(-4)^2+(0)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2};$$

(3) $$\begin{aligned}2\boldsymbol{r}_1-3\boldsymbol{r}_2-5\boldsymbol{r}_3&=2(3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})-3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})-5(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\\&=6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}-6\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}+5\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}-10\boldsymbol{k}=5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

于是 $$|2\boldsymbol{r}_1-3\boldsymbol{r}_2-5\boldsymbol{r}_3|=|5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}|=\sqrt{(5)^2+(-2)^2+(1)^2}=\sqrt{30}.$$

1.23 设 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_3=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_4=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, 求 $\boldsymbol{r}_4=a\boldsymbol{r}_1+b\boldsymbol{r}_2+c\boldsymbol{r}_3$ 中的纯量 a、b、c.

解: 我们要求

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}&=a(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+b(\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})+c(-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})\\&=(2a+b-2c)\boldsymbol{i}+(-a+3b+c)\boldsymbol{j}+(a-2b-3c)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 不共面, 由题 1.15 得

$$2a+b-2c=3,\ -a+3b+c=2,\ a-2b-3c=5.$$

解得 $a=-2$, $b=1$, $c=-3$ 及 $\boldsymbol{r}_4=-2\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2-3\boldsymbol{r}_3$. 我们说向量 $\boldsymbol{r}_4$ 是与 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ 线性相关的; 换句话说, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_4$ 构成了一个向量的线性相关组. 另一方面, 这些向量中的任何三个(或少于三个)向量是线性无关的.

一般地, 如果能够找到一组不全为零的纯量 a, b, c, $\cdots$, 使得 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}+\cdots=\boldsymbol{0}$, 便称向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\cdots$ 是线性相关的, 否则, 是线性无关的.

1.24 求一单位向量, 平行于向量 $\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 的合成向量.

解: 合成向量

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=(2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})=3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}.$$