概率论与数理统计

主编 王欣　　副主编 钱云

地质出版社

概率论与数理统计

主编　王欣　副主编　钱云

地质出版社
·北　京·

EA02/20

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/王欣主编．-北京：地质出版社 1998.2
ISBN 7-116-02504-9

Ⅰ．概… Ⅱ．王… Ⅲ．①概率论②数理统计 Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 27677 号

地质出版社出版发行

（100083 北京海淀区学院路 29 号）

责任编辑：赵 薇

责任校对：范 义

*

北京市朝阳区小红门印刷厂印刷 新华书店总店科技发行所经销

开本：850×1168 1/32 印张：7.5 字数：202000

1998 年 2 月北京第一版・1998 年 2 月北京第一次印刷

印数：1—2500 册 定价：12.00 元

ISBN 7-116-02504-9
O・11

前　言

本书参考了国家教委“关于经济管理干部学院制订二年制专科教学计划的几点意见”，参考了70余所管理干部学院数学教师参加讨论的“数学教学大纲”，是作者在总结成人高等教育数学课多年教学经验的基础上编写的。在坚持标准要求的前提下，立足于成人的知识基础和特点，充分考虑到专科层次和职业技术教育的需要，由浅入深，由易到难，深入浅出地讲述了概率数理统计的基本内容和方法，结合实例，简明易懂。本书重点放在基本概念、分析计算和实际应用上，概念多从实例引入，在不影响整体系统性、逻辑性的前提下，对一部分较繁的理论证明进行了适量的删减，而着重用较大篇幅较详细地介绍结论，介绍理论和方法的实际操作运用。力求使读者以较少的数学基础，获得较广的概率数理统计知识，并使读者的逻辑思维能力、分析问题解决问题的能力得到培养和提高。

本书文字力求简明通俗，讲解力求条理化、直观化，每章后配有一定数量的习题，非常适于自学。本书可作为各类成人高等学校、函授、业大教学用书或参考书，也可作为有关的科技人员、管理人员的自学用书。

在本书编写过程中，李志刚同志给予了多方面的帮助，特此感谢。

目　录

绪　论

初学概率数理统计的读者，应对该学科的研究对象、研究内容、研究方法及其应用有一个大致的了解。

概率论与数理统计是数学的重要分支。概率数理统计包含两部分内容：第一部分是概率论，它研究随机现象的数量规律与基本原理；第二部分是数理统计，它主要是将概率论的理论知识应用到实际随机问题中，研究如何设计数学模型，如何收集、整理与分析数据资料，对实际问题作出推断与预测。

在客观世界中，存在着两类不同的现象，一类是确定性现象，例如在标准大气压下，水加热到100℃，必然沸腾；另一类是非确定性现象，例如某工厂某天产品中出现次品的件数，又如某位旅客在汽车站的等车时间，都是不能预先确定的，对于这类事先不能确定出现哪种结果的现象，我们称之为随机现象。随机现象在日常生活、生产实践、科学实验和管理过程中大量存在，比比皆是。随机现象具有这样的特点，在一次试验（或观察）中，它呈现出偶然性，但在大量重复试验时，则呈现出某种形式的内在规律性。概率论就是研究随机现象的数量规律的学科，概率论在当今世界已得到迅速发展和广泛的应用。

大略地说，概率论应属于数学学科中理论研究的范畴，而以概率论作为理论基础的数理统计则主要是方法论的研究，属于应用学科的范畴。它所应用的方法是统计方法，研究如何科学地抽取样本，收集数据资料，对统计资料进行综合分析，根据局部推断整体，判断事件发生的可能性，作出科学的量化的预测，做出尽量可靠的检验和设计。当前，统计方法广泛地应用在自然科学、

工程技术、管理科学等领域，特别是在现代化科学管理中的应用更是日趋广泛深入，因此，概率数理统计是科技人员和管理人员必不可少的基本知识和重要工具。

第一章　随机事件及其概率

§1.1　预备知识——排列与组合

排列与组合的知识是研究古典概型必须用到的重要工具，我们首先对此进行复习。

一、加法原理和乘法原理

1. 加法原理

例 1　从 A 地到 B 地可乘坐汽车、火车和飞机，一天中汽车有 5 班，火车有 3 班，飞机有 2 班，一天中从 A 地到 B 地共有多少种不同的走法？

因为一天中乘汽车有 5 种走法，乘火车有 3 种走法，乘飞机有 2 种走法，每种走法都可以独立地完成“从 A 地到 B 地”这件事，所以一天中从 A 地到 B 地共有 $5+3+2=10$ 种不同的走法。

加法原理　如果完成一件事有 m 类办法，在第一类办法中有 n_1 种不同的方法，在第二类办法中有 n_2 种不同的方法，……，在第 m 类办法中有 n_m 种不同的方法，则完成这件事共有 $n_1+n_2+\cdots+n_m$ 种不同的方法。

注意，使用加法原理的前提是，每一类办法中的每一种方法都能独立地从头到尾地完成这件事。这种情况适用加法原理。

2. 乘法原理

例 2　从 A 村到 C 村必须经过 B 村，从 A 村到 B 村有 2 条路，从 B 村到 C 村有 3 条路，从 A 村到 C 村共有多少种不同的走法？

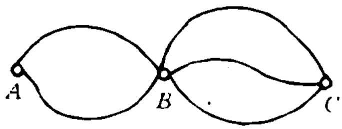

图 1—1

如图 1—1，我们把“从 A 村到 C 村”这件事分成两个步骤，第一步从 A 村到 B 村，第二步从 B 村到 C 村。两个步骤都完成后才完成了“从 A 村到 C 村”这件事。从 A 村到 B 村有 2 种不同的走法，按这两种走法中的每一种走到 B 村后，都还有 3 种走法到 C 村。因此，从 A 村到 C 村共有 $3\times2=6$ 种不同的走法。

乘法原理 如果完成一件事需要分成 m 个步骤，第一步有 n_1 种不同的方法，第二步有 n_2 种不同的方法，……，第 m 步有 n_m 种不同的方法，则完成这件事共有 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_m$ 种不同的方法。

注意，使用乘法原理的前提是，每一步骤中的每一种方法都不能单独地完成这件事，必须一个步骤、一个步骤地把 m 个步骤都做完才能完成这件事。这种情况才适用乘法原理。

例 3 有 3 名大学生要安排实习，有 4 个地质队可提供实习条件，要把 3 名学生随机地分到 4 个队去实习，一共有多少种不同的分法？

我们可以这样考虑，把这件事看成分三个步骤完成，第一步先安排第一名大学生，有 4 个地质队可供选择，有 4 种不同的选法；第二步安排第二名大学生，也有 4 个队可供选择，有 4 种不同的选法；第三步安排第三名大学生，仍有 4 种不同的方法。这三个步骤都完成后，就完成了“把 3 名学生分到 4 个队去实习”这件事。因此，根据乘法原理，共有 $4\times4\times4=64$ 种不同的方法。

二、排列

1. 非重复排列

例 4 有 3 艘远洋货轮，要派一艘去非洲，一艘去美洲，共有多少种不同的派法？

设 a、b、c 表示 3 艘货轮，首先考虑派一艘去非洲，有 3 种选

派法，即 a 或 b 或 c，派定第一艘之后，再考虑派一艘去美洲，第二步选派只有 2 种方法，根据乘法原理，一共有 $3\times2=6$ 种不同的派法。

具体的派法为：ab，ac，ba，bc，ca，cb（如图 1—2）。

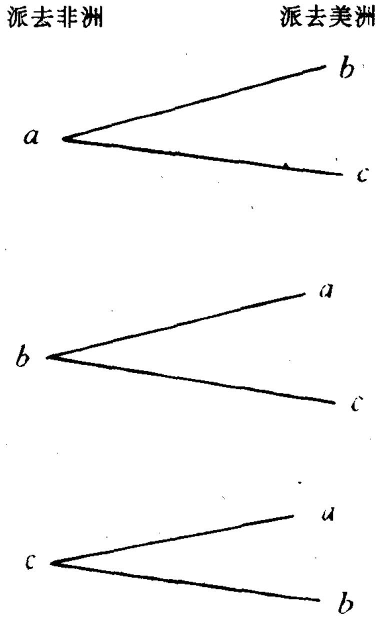

图 1—2

如果我们把 3 艘货轮称为 3 个元素，派两艘分别去非洲、美洲看成是从 3 个元素中任意选取 2 个元素按一定顺序排成一排，那么所有的排列种数共为 6 种。

定义 1.1 从 n 个不同的元素中每次取出 m 个（$1\leqslant m\leqslant n$），按一定的顺序排成一排，叫做从 n 个元素中取 m 个元素的一个非重复排列，简称**排列**。所有这样的排列个数叫做从 n 个元素中取 m 个元素的**排列数**，记为 A_n^m。

在例 4 中，从 a、b、c 三个元素中取 2 个元素的排列有 ab，ac，ba，bc，ca，cb，我们用乘法原理算出了 $A_3^2=6$。

一般地，利用乘法原理可以得出排列数 A_n^m 的计算公式

$$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) \tag{1.1}$$

即 A_n^m 等于 m 个连续自然数的乘积，而最大的一个自然数为 n。

特别地，当 $m=n$ 时，即把 n 个元素全部选出按一定顺序排成一排，叫做一个**全排列**，全排列的个数记做 P_n（$P_n=A_n^n$）。由公式(1.1)可知，P_n 等于从 n 开始到 1 为止 n 个连续自然数的乘积，这样的连乘积称为 n 的**阶乘**，记为 $n!$，即

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n! \tag{1.2}$$

为了运算方便，规定 $0!=1$。

由阶乘的记号可以得到排列数 A_n^m 的计算公式的另一形式

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{1.3}$$

例 5 由 1，2，3，4 这 4 个数字可组成多少个没有重复数字的三位数？

解 从 4 个元素中选 3 个元素的非重复排列数为 A_4^3，

$$A_4^3 = 4\times 3\times 2 = 24$$

即由 1，2，3，4 这 4 个数字可组成 24 个没有重复数字的三位数。

例 6 由 0，1，2，3，4 这 5 个数字能组成多少个没有重复数字的三位数？

解一 5 个元素中取 3 个元素的排列数为 A_5^3，其中以 0 为首位的排列不构成三位数，这样的排列有 A_4^2 种

$$A_5^3 - A_4^2 = 5\times 4\times 3 - 4\times 3 = 48$$

因此可构成 48 个没有重复数字的三位数。

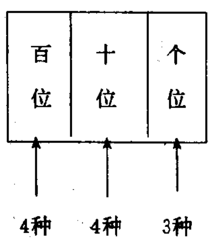

图 1—3

解二 排三位数可分为三个步骤进行，第一步排百位数字，它不能取 0，只能从 1，2，3，4 这 4 个数字中选取，有 4 种取法；第二步排十位数字，因百位数字已用去一个数字，且十位数字可以取 0，因此十位数字有 4 种取法；第三步排个位数字，因百位、十位已用去两个数字，个位数字有 3 种取法。

由乘法原理，共可排成没有重复数字的三位数 $4\times4\times3=48$ 种。

例 7 甲、乙、丙、丁四人分住 4 个房间，每间住一人，共有多少种不同的分法？

解 4 人分住 4 个房间，每间住 1 人，相当于从 4 个元素中选 4 个元素按顺序排成一排，这样的全排列数应为

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

因此，共有 24 种不同的分法。

2. 可重复排列

例 8 某城市的自行车牌照号码为 6 位数，如果没有其它限制，最多可容纳多少辆自行车进行登记？

自行车牌照号码各位数字可以重复，且允许 0 做首位，各位数字都可从 0，1，2，…，9 这 10 个数字中选取。第一位数字有 10 种不同的选法，第二位也有 10 种选法，…，第六位也有 10 种选法，按照乘法原理，牌照号的不同排法总数为

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$$

因此可容纳一百万辆自行车进行登记。

我们可以把这个问题看成：有 10 个元素，首次选取一个，然后放回，再从中选取一个，再放回，…，共选取 6 个，按一定顺序排成一排，一共有 10^6 种不同的排法。

定义 1.2 从 n 个元素中任取一个，然后放回，再任取一个，再放回，如此下去进行 m 次，将选出的 m 个元素（可重复）按顺序排成一排，叫做一个可重复排列。

由乘法定理可以推出，从 n 个元素中选 m 个元素的可重复排列总数为 n^m。

注意，可重复排列中 m 可以大于 n。

例 9 把 3 封信随机地投入 4 个邮筒，有多少种不同的投法？

解一 从 4 个邮筒中选取 3 个(可重复)分别用来投放第一、二、三封信，这是从 4 个元素中选 3 个元素的可重复排列，总数为

$$4^3 = 64$$

即共有 64 种不同的投法。

解二 从乘法原理来考虑，将投信分成三个步骤来完成，每一步骤投放一封信，分别有 4 个邮筒可选择，每一步骤都有 4 种方法，因此，完成这件事的不同方法总数为

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

即共有 64 种不同的投法。

三、组合

例 10 从 a、b、c 三艘货轮中派两艘去非洲，共有多少种不同的派法？

"派 a、b 去非洲"与"派 b、a 去非洲"是一样的，这件事不考虑选出的两艘货轮的顺序，因此，可以派 ab 去非洲，或派 ac，或派 bc，共有 3 种派法。

这个问题可以看成是从 3 个元素中任取 2 个，不考虑顺序，组成一组，共有 3 种不同的方法。这就是组合问题。

定义 1.3 从 n 个不同元素中任选 m 个（$1 \leqslant m \leqslant n$），不考虑顺序，组成一组，称为从 n 个元素中选 m 个元素的一个**组合**，这样的组合的个数叫做从 n 个元素中取 m 个元素的**组合数**，记为 C_n^m。

从例 10 中我们得出 $C_3^2=3$。

注意，对从 n 个元素中选出的 m 个元素考虑顺序是排列问题，不考虑顺序则是组合问题。这一点可以通过例 4 与例 10 的对比来帮助理解。

下面来看组合数 C_n^m 的计算公式。

从例 4 与例 10 中不难看出，在组合问题中，因为不存在顺序问题，所以 ab 和 ba 是不同的排列，但只组成一个组合；反之，从组合角度考虑，把 ab 这样一个组合中的两个元素按一定顺序来排列，排列种数应当是 2 个元素的全排列数，有 $2!=2\times1=2$ 种不同的排法。由此可知 C_3^2 与 A_3^2 的关系为

$$A_3^2 = 2! \cdot C_3^2$$

或者写为

$$C_3^2 = \frac{A_3^2}{2!}$$

一般说来，由上述的推理方法可以得出组合数的计算公式

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} \tag{1.4}$$

此公式还有另外一种形式为

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1.5}$$

为了运算方便，规定 $C_n^0=1$。

关于组合数还有一个常用的公式

$$C_n^m = C_n^{n-m} \tag{1.6}$$

读者可以很容易地利用（1.5）式加以证明。

例 11 从 100 件产品中抽取 3 件进行检验，有多少种不同的取法？如果指定这 100 件中的某一件必须要取到，那么抽取方法有多少种？

解 从 100 件产品中抽取 3 件，不讲顺序，是组合问题，

$$C_{100}^3 = \frac{A_{100}^3}{3!} = \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1} = 161700$$

因此共有 161700 种不同的取法。

如果指定某一件必须要取到，那么只要从余下的 99 件中抽取 2 件即可，

$$C_{99}^2 = \frac{A_{99}^2}{2!} = \frac{99 \times 98}{2 \times 1} = 4851$$

即有 4851 种不同的取法。

§1.2 随 机 事 件

一、随机现象

在客观世界和人类的实践活动中，有两类不同的现象。一类是确定性现象，例如在标准大气压下，水加热到 100℃ 就沸腾，冷

却到 0℃ 就结冰；又如知道了导体的电阻和两端的电压，通过导体的电流就确定了。但是更大量存在的是不确定的现象，例如某处河流水位可能是 1 米至 5 米中的任何一个数目；某位孕妇可能生男孩也可能生女孩；射击 5 次命中的次数可能是 0 次、1 次、…、5 次；电话交换台一分钟内接到的呼唤次数可能是 0 次、1 次、2 次、…。诸如此类不确定的现象，在试验或观察之前不能肯定会出现哪种结果，称之为**随机现象**。

一般地说，有些试验或观察，在指定的条件下，事先不能完全确定试验会出现什么结果，而只知道试验结果在某个范围内，这种试验或观察带有随机因素，称之为**随机试验**。

二、随机事件

粗略地说，在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**，简称**事件**。通常用大写字母 A、B 等来表示事件。

例 1 某人射击 3 次，其中有 2 次命中目标。

显然，这个结果可能发生，也可能不发生，是一个随机事件，我们可记为

A =“某人射击 3 次，其中命中 2 次”

例 2 投掷两枚均匀的硬币，以下两个事件均为随机事件

A=“两枚硬币都是正面向上”

B=“两枚硬币中至少有一枚正面向上”

例 3 10 件产品中有 8 件正品，2 件次品，从中任取 3 件，我们设事件

A =“任取 3 件中至少有 1 件正品”

B =“任取 3 件中恰有 1 件次品”

C =“任取 3 件中 3 件都是次品”

显然，事件 B 可能发生，也可能不发生，是随机事件。事件 A 无论做多少次试验都是必定发生的，事件 C 无论做多少次试验都是不可能发生的。

我们称每次试验中必定要发生的事件为**必然事件**，记为 Ω；称