

有限元素法

原著者 Huebner • Thornton
譯著者 王 至 勤

曉園出版社
世界圖書出版公司

571779

有限元素法

原著者 Huebner•Thornton

譯著者 王 至 勤



曉園出版社

世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

1993

D. 62 / 0 /

有限元（素）法

H. 桑顿 著

王至勤 译

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝内大街137号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1993年11月第一版 开本：850×1168 1/32

1993年11月第一次印刷 印张：20

印数：0001—800 字数：57万字

ISBN: 7-5062-1642-6/O·79

定价：15.60元 (W_{9304/12})

世界图书出版公司通过中华版权代理公司向晓园出版社购得重印权

限国内发行

序 言

本書第一版出版至今，有限元素分析於結構領域的應用已漸趨成熟，而且在流力及熱傳領域上亦被廣泛的接受。因此之故，多數的工程學校目前皆提供此一主題的課程，通常在研究所但有時亦在大學部。本書主要可作為初等的教科書，以清楚容易了解的方式說明有限元素法。本書主要適合於以機械，航空，土木及工程力學為主修的人士。其重點在了解方法的基本理論以便使用方法求解實際問題。這一版中其數學部份保持與第一版相同的水平，如此大學部所學之數學技巧已充分夠用。我大量使用向量及矩陣但仍省略張量部份。我假設讀者具有福傳（FORTRAN）程式及計算的基本知識。

在第二版中，我們更新了主題並加入家庭作業部份使得本書適合課堂講授或自修。在第一部份，本書的首章討論方法的基本概念以及其發展歷史。接著的三章（2—4章）分別從物理觀點（第二章），變分觀點（第三章），及更一般性數學觀點（第四章）導出有限元素數學公式。這三章中主要的修正為增加一些參考資料和問題，而且敘述方式更為簡潔。加權餘數法在第四章中加重了份量，因為問題的變分原理不存在時，它特別的重要。第五章對元素及內插函數的說明討論相當完整。擴充等參數元素的說明表示這類元素目前非常流行。

第二部份屬於應用部份，而我們對此一部份作了許多修正以反映最近的一些發展。彈性力學（第六章）的討論已擴充至結構動力學部份。自由振動及其瞬態反應的有限元素解發展更為完備。複合材料的自由振動的有限元素分析亦予以討論。求解二階結構動力方程式數值解包括中央差分法及 Newmark 法。第七章被重新安排以分別討論平衡，特徵值，及傳播問題。並新加入一節討論一階與時間有關方程式的求解問題。團塊及調和“質量”矩陣法以及其解的振盪穩定性亦於本章中討論。

討論潤滑問題的第八章只作了少許的修正。處理 Reynolds 邊界條件方

法的討論為修正之重點。討論流體力學問題的第九章修訂了許多內容以反應最近的進展。我們擴大討論非黏性可壓縮流動及黏性不可壓縮流動有關之節。導出並求解這些問題方程式的最新方法已予以討論並配合一些例子。上風加權函數及處罰函數處理法為一些最新的方法。新加入一章（第十章）熱傳問題的討論為最近研究工作的重點。所討論的包括傳導，輻射與傳導，對流—擴散，及自然與強迫對流等問題。實際例子並配合著理論的發展。在計算機程式章（第十一章）我們附上一新的程式。程式是以模組的方式撰寫。此章亦包括代數方程式求解方法的討論。

附錄（A至D）只作了些許的修正以便使得本書獨立且完備。新增的附錄（E）包括一些熱傳的基本方程式，可作為第十章的補充資料。

每一章尾的參考資料都作了更新及擴充以反映目前有限元素法的趨勢。第一章特別列出其他有限元素法參考書，最近的會議論文集，及其他有關的資料。如同本書第一版，所列之資料可能不夠完備。因為資料快速地成長，我們只能引用一些較基本的資料。

本修訂版目前正作為 Old Dominion大學二個學期用的教科書。第一學期的課程為有限元素法基本的介紹。在這個學期中我們教授第一章至第五章以及第七章至第十一章中的某些題材。附錄A及B作為背景資料。而第二學期的課程則集中於高深題材之講授，適合於研究所同學。此學期中講授有限元素法於彈性力學，流體力學，及熱傳學（6，9，10章）的應用。附錄C及E作為參考資料。我們很希望能得到本書作為教科書或參考書的經驗，並且歡迎能改進本書的任何批評與建議。

我們藉此機會感謝我們的同事為本書第二版所提供的協助。我們特別要感謝 Cornell 大學 J. Booker 教授的協助。他提供修訂第八章潤滑問題的建議。我們亦感謝 Old Dominion 大學的 C. Mei 及 O. A. Kandil 教授。他們重讀了每一章並提供批評。第二位作者在 NASA - Langley 研究中心的二位研究伙伴 A. R. Wieting 及 C. P. Shore 亦重讀了每一章並作了有價值的建議。Beverly Dorton 為我們修正版提供打字服務，而 Deborah Miller 準備新的插圖。對他們的耐心及努力我們非常感激。另外，Old Dominion 大學機械及力學系的同學們對我們助益頗多。以本書的草稿作為教科書，他們為本書的“除錯”工作付出了貢獻。最後，作者對他

們妻子的支持非常的感激，並將此書獻給她們。

KENNETH H. HUEBNER

Waterloo, Iowa

EARL A. THORNTON

Norfolk, Virginia

November 1982

第一版序

有限元素法是一種最新而且流行的數值方法，此法正為各地的工程師及科學家廣泛地使用中。藉著高速數位計算機之助，有限元素法擴大了適合數值分析工程問題的範圍。

有限元素法大約起源於十五年前，那時候飛機工業界使用此法分析複雜的飛機結構。起初是從結構分析矩陣法延伸出來，但如今已被視為求解非常困難之應力分析問題的有效工具。許多研究人員同意有限元素法代表固體力學的真正突破。

有限元素法的特色在於它不限於固體力學之分析。雖然這個重要事實約在八年前被察覺，此法卻在最近才被應用到其他領域。事實上，它幾乎適用於任何連體或場問題。它今天在工程，物理，及數學領域中受到廣泛的注意是不值得驚奇的。

這本書是為從事物理科學分析的工作者而寫的。它是一本“起步”型的教科書，以容易了解及介紹性的方式說明有限元素法。先前的教科書多集中於結構力學問題的處理。而本書則以整個工程力學問題的眼光來看有限元素法，處理的方法係取自許多科技期刊並將它們結合起來。並且希望處理的方法能理論與實例並重。

在這本書中，我企圖達到三個目標：(1)儘可能簡單地敘述有限元素法的基本理論；(2)對這些基本理論給讀者一個連貫性的了解，因此讀者能使用此法於他的問題；(3)提供此法的一個整體概念以建立研究高深題材的基礎。

對每個論題我嘗試以基本的理論為開端，然後再進入複雜的層面。我假設讀者皆具備了基本的工程力學知識，有關的數學及計算機技巧。另外，有限元素法所用之矩陣代數及變分學技巧亦有詳細的敘述。張量符號（雖然有所幫助）為了簡潔而被省略不用。

本書分為兩部份。第一部份說明方法的基本概念及基本理論。一開始

我對方法的來源作一般性的討論以便讀者能對此一方法有一整體性的了解。然後說明方法的詳細發展（從結構力學延伸而來）。因矩陣及變分學在有限元素法佔有重要的地位，這兩個題材亦於附錄中有所討論。方法的物理基礎建立後，方法的數學基礎亦相繼提出說明。讀者將被告知如何運用此法於各種不同的工程力學問題。第四章說明最一般性有限元素概念。簡言之，第一部份可幫助讀者了解方法，如何從結構問題延伸至一般連體問題，及明瞭方法的一些限制條件。

本書的第二部份有五章討論有限元素法於工程力學的應用問題。第六章說明線性彈性理論的有限元素導出方法，而附錄C則對固體力學的基本方程式作一簡單的複習。彈性問題的導出方法係建立在位移法之上，除位移法外一些參考資料亦利用其他方法導出有限元素方程式。傳熱，電磁，及扭轉問題的一般場問題為第七章中的主題。因實際場問題中時間常為獨立的參數，此章亦對有限元素概念如何延伸至時間座標予以說明。有一章完全在討論場問題的特殊型式，流體薄膜潤滑。本書中包含此章表示我對潤滑問題有特殊的興趣。

書中倒數第二章研究有限元素法於流體動力學之應用。附錄D中有其有關之基本方程式及變分原理。適於有限元素分析的各種流體力學問題為討論之主題。這一章讀者會了解有限元素法最新的應用。利用有限元素法求解問題之最後步驟，即為撰寫程式以產生並求解一組聯立方程式。為導引讀者完成此一步驟，我在第十章提出一程式並詳加解釋。其他有關程式的一些問題亦有討論。

我嘗試使本書儘量的完備且獨立，這樣讀者只須閱讀本書即可使用有限元素法。雖說本書已說明了有限元素分析最重要的問題，但因篇幅的限制我必須省略或濃縮某些問題的說明。但我深信說明已非常完備，可滿足學生以及執業工程師與科學家的需要。

第一章結尾所列的參考資料中讀者可找到更高深題材的討論與說明。因有限元素法這個主題的論文增加非常迅速，所列的參考資料絕不是完整的。因此所選擇的參考資料只代表研究成果的一部份。

本書引證資料中的研究人員為本書最重要的貢獻者。這些人士提供了我所引用，編排的資料。對他們，我非常地感激。

我特別要感謝一些同事。D.F. Hays 提供給我一些時間及環境使得我有可能完成此書。我很感謝 A.O. De Hart 首先建議編寫此書並在撰寫過程中經常給予鼓勵。Cornell 大學的 J.F. Booker 教授幫助我閱讀初稿並提供有價值的建議。對 O. C. Zienkiewicz 教授所提供的情誼及研究合作，我願表示誠摯的謝意。

我亦感謝一些幫助我準備本書初稿的人士。其中，我特別謝謝 Sallie Ellison 及 Jim Carter 爲我尋找提供許多參考資料。他們爲 G.M. 研究圖書館的職員。我亦感謝 Sue Moreau 爲我作最佳的打字服務。

最後，我特別感謝我的妻子 Louise 在這一年中對我的容忍及體諒。

Warren, Michigan
July 1974

KENNETH H. HUEBNER

譯 序

有限元素法是一種最新而且流行的數值方法，此方法正為各地的工程師及科學家所廣泛地使用著，包括台灣在內。由於數位計算機發展一日千里，今日在迷你電腦，甚至微電腦上都可以使用有限元素法所寫的程式。有限元素法發展迄今，在結構學領域中的分析工作可說已漸趨成熟；而利用有限元素法求解流體力學及熱傳學問題近年來之發展更可說是一日千里。坊間關於有限元素法的原文書很多，但多偏重於結構力學領域的處理分析。本書作者有鑑有此，乃特別加強流體力學，潤滑理論，及熱傳學部分有限元素分析的說明及討論。

本書獨具數項特點；第一、適合於學生及執業工程師之用，不管是作教科書或是參考書，本書皆適宜，每一章尾皆有問題可作為練習；第二、同時適合大學及研究所之程度，本書除了對有限元素法重要理論，基本元素方程式，內插函數有詳盡的探討外，並在大學程度之範圍內提供一些較高深的題材，而對此法的嚴密數學分析只作基本的說明；第三、對固體力學及流體熱傳學給於相同的篇幅，因而本書不但適合土木，工程力學為主修的人士，亦適合於機械，航空為主修的人士，對流體熱傳有限元素分析有興趣的讀者更是一項重要的優點；第四、每章之尾皆列有豐富的參考資料，對某些題材欲進一步的了解，閱讀這些參考資料是必須的。

本書第一部份基本理論中以第三章，第四章及第五章最為重要。而選擇適當的元素形狀及其內插函數更為有限元素法求得高準確性解的基本條件，因此一定要詳讀第五章。主修固力者可集中目標

於第六章，第七章，而主修流力熱傳者可集中目標於第八、九、十等三章。

台灣近年來亦以租用或買斷的方式引進一些有限元素大型程式，使用之機構包括泰興、中鼎、中華等工程顧問公司及中山科學研究院；另一些則是與 CAD/CAM 系統一同購進的，如裕隆研究中心。因此對土木、機械、航空、造船等系的同學而言，將來使用有限元素法處理工作的機會愈來愈大。

譯者學識淺薄，書中如有遺漏或錯誤，尚祈各位先進專家不吝指正是幸。

目 錄

第 一 部 份

第一章 認識有限元素法 3

1. 什麼是有限元素法 3 / 2. 此法如何解決問題 5
/ 3. 本法的簡史 7 / 4. 應用的領域 11 / 5. 有限
元素法的未來 11 / 參考資料 12

第二章 直接處理方法：物理的解釋 21

1. 簡介 21 / 2. 定義元素及其性質 22 / 3. 將個體
組合 41 / 4. 總結 56 / 參考資料 57 / 問題 57

第三章 數學的處理方法：變分的解釋 61

1. 簡介 61 / 2. 連體問題 62 / 3. 求解連體問題的一
些方面 65 / 4. 有限元素法 70 / 5. 尋找變分原理
93 / 6. 總結 101 / 參考資料 101 / 問題 102

第四章 數學的處理法：廣義的解釋 107

1. 簡介 107 / 2. 利用加權餘數法導出有限元素方程式
(GALERKIN 法) 107 / 3. 利用能量平衡導出有限元

素方程式 119 / 4. 總結 120 / 參考資料 121 /
問題 122

第五章 元素及內插函數 125

1. 簡介 125 / 2. 基本之元素形狀 126 / 3. 術語
及基本考慮 131 / 4. 廣義座標及多項式的次數 133
/ 5. 自然座標 138 / 6. 一維的內插觀念 148 / 7.
內節點處理—濃縮 / 子結構法 153 / 8. 二維元素 157
/ 9. 三維的元素 173 / 10. C^0 問題的彎曲等參數元素
179 / 11. 總結 185 / 參考資料 186 / 問題 188

第 二 部 份

第六章 彈性問題 193

1. 簡介 193 / 2. 二維問題的一般導出法 195 / 3.
應用在平面應力及平面應變上 203 / 4. 應用在軸對稱應
力分析上 210 / 5. 應用在彎板問題上 218 / 6. 三
維問題 224 / 7. 結構動力學簡介 229 / 8. 總結
243 / 參考資料 243 / 問題 246

第七章 一般的場問題 253

1. 簡介 253 / 2. 平衡問題 253 / 3. 特徵值問題
266 / 4. 傳播問題 273 / 5. 永解分割的依時變化方
程式 283 / 6. 總結 296 / 參考資料 296 / 問題

第八章 潤滑問題 307

1. 簡介 307 / 2. 沿革的介紹 307 / 3. 不可壓縮流體潤滑方程式 310 / 4. 等溫狀態的液體潤滑 315 / 5. 不等溫狀態的液體潤滑 321 / 6. 氣體潤滑 326 / 7. 實例 327 / 8. 總結 338 / 參考資料 338 / 問題 340

第九章 流體力學問題 341

1. 簡介 341 / 2. 非黏性不可壓縮流動 342 / 3. 非黏性可壓縮流動 353 / 4. 忽略慣性效應的不可壓縮黏性流動 364 / 5. 慣性效應不能省略時之不可壓縮黏性流動 375 / 6. 可壓縮黏性流動及一般流動問題 392 / 7. 總結 392 / 參考資料 393 / 問題 397

第十章 熱傳遞問題 401

1. 簡介 401 / 2. 傳導 402 / 3. 具表面輻射之熱傳導 428 / 4. 對流——擴散方程式 437 / 5. 自然及強迫對流 444 / 6. 總結 451 / 參考資料 452 / 問題 455

第十一章 計算機程式實例及其它實際的問題 463

1. 簡介 463 / 2. 建立簡單熱傳導問題 463 / 3. 計算機程式及其說明 467 / 4. 附有輸入及輸出資料的實例 491 / 5. 元素網路的自動產生法 494 / 6. 數值積分公式 505 / 7. 代數方程式之解法 511 / 8. 大型計算機程式 518 / 9. 總結 520 / 參考資料 521 / 問題 523

附錄A 矩陣 527

1. 定義 527 / 2. 方矩陣的特殊型式 528 / 3. 矩陣運算 528 / 4. 特別的矩陣乘積 530 / 5. 矩陣之轉置 532 / 6. 二次型 532 / 7. 矩陣之反運算 533 / 8. 矩陣之分割 534 / 9. 矩陣微積分 536

附錄B 變分學 539

1. 簡介 539 / 2. 微分——函數的極小值 539 / 3. 變分學——泛函數的極小值 542

附錄C 線性彈性理論之基本方程式 551

1. 簡介 551 / 2. 應力分量 551 / 3. 應變分量 552 / 4. 廣義的虎克定律(本質方程式) 553 / 5. 靜平衡方程式 555 / 6. 一致性條件 556 / 7. 位移的微分方程式 558 / 8. 變分原理 559 / 9. 平面應

變及平面應力 564 / 10. AIRY 應力函數 (二維問題)
567 / 11. 熱效應 569 / 12. 薄板彎曲 570 / 參考
資料 574

附錄D 流體力學基本方程式 575

1. 簡介 575 / 2. 定義及概念 575 / 3. 運動定律
577 / 4. 流線函數及渦旋度 582 / 5. 位能流動
584 / 6. 黏性不可壓縮流動 587 / 7. 邊界層流動
590 / 8. 古典變分原理 591 / 參考資料 593

附錄E 熱傳遞基本方程式 595

1. 簡介 595 / 2. 熱傳導 595 / 3. 對流 600
/ 4. 輻射 604 / 參考資料 610

作者索引 611

主題索引 617

第一部分