

压缩机 设计中的 力学分析

熊则男 乔宗亮 编著



机械工业出版社

206314

本书系统地介绍了压缩机设计、研究工作中经常用到或可能用到的力学基础理论，并列举了大量实例，说明了如何应用这些理论去解决压缩机的实际问题。本书针对性强，内容丰富，理论与应用相结合，有助于提高读者的理论水平和解决实际问题的能力。

本书可供压缩机专业和相关专业的工程技术人员参考，也可作为高等学校相关专业的研究生、本科生的教学参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

压缩机设计中的力学分析/熊则男, 乔宗亮编著. -北京: 机械工业出版社, 1997. 7

ISBN 7-111-05443-1

I. 压… I. ①熊… ②乔… III. 压缩机-分析力学-机械设计 N. TH45

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (96) 第 21678 号

出版人: 马九荣 (北京市百万庄南街1号 邮政编码 100037)
责任编辑: 贺簏盒 版式设计: 王颖 责任校对: 李秋荣
封面设计: 郭景云 责任印制: 卢子祥
北京市密云县印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
1997年7月第1版 第1次印刷
787mm×1092mm^{1/32}·15.875印张·421千字
0 001—1 200册
定价: 26.00元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

前 言

压缩机的用途广泛，生产量大。因此，必须合理地设计压缩机的各个零部件，保证它们的强度、刚度、动力特性等项指标符合规定要求，以期实现应有的经济效益和社会效益。

欲达到上述目标，设计人员必须具备足够的力学知识。但是，从过去和目前的情况看，压缩机设计工作中力学分析的深度显得不够，对于一些复杂的实际问题往往采用了过于简化的力学模型，致使计算精度不高。为了弥补这方面的不足，作者特撰写本书，希望有助于提高压缩机设计中的力学分析水平。本书系统地介绍了压缩机设计、研究工作中经常用到或可能用到的力学基础理论（包括弹性理论、振动理论、有限元法等），并列举了大量实例，说明如何应用这些理论去解决压缩机的实际问题。

在本书撰写过程中，得到丛敬同教授的大力帮助，他详细地审阅了书稿，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中难免有缺点和错误，敬请读者指正。

目 录

前 言

第一章	弹性理论基础	1
第一节	基本概念	1
第二节	应力状态理论	7
第三节	应变状态理论	16
第四节	弹性本构关系	33
第五节	弹性理论的解法	35
第六节	平面问题的直角坐标解答	43
第七节	平面问题的极坐标解答	60
第八节	空间问题的若干解答	78
第九节	薄板弯曲问题	111
第十节	薄壳问题	134
第十一节	能量原理和变分法	181
第二章	振动理论基础	208
第一节	基本概念	208
第二节	单自由度系统的自由振动	213
第三节	单自由度系统的强迫振动	230
第四节	两自由度系统的振动	242
第五节	多自由度系统的振动	255
第六节	弹性体的振动	282
第七节	往复机械的振动	291
第八节	回转机械的振动	297
第九节	随机振动简述	301
第三章	有限元法基础	315
第一节	概述	315
第二节	杆系结构的有限元法	322
第三节	平面问题的有限元法	339
第四节	空间问题的有限元法	351
第五节	轴对称问题的有限元法	355

第六节	板壳问题的有限元法	361
第七节	等参数单元	385
第四章	回转压缩机的力学分析	401
第一节	涡旋压缩机的力学模型及其受力分析	401
第二节	涡旋盘的位移场和应力场	426
第三节	涡旋盘的温度场	431
第四节	回转压缩机壳体的应力分析	439
第五节	滚动活塞式压缩机的动力分析	445
第六节	压缩机阀片的动力特性和动力响应分析	453
第七节	螺杆压缩机转子的受力分析	466
第八节	罗茨鼓风机转子的受力分析	474
第九节	压缩机管道系统的动力分析	477
参考文献	501

第一章 弹性理论基础

第一节 基本概念

一、弹性理论的任务

弹性理论又称弹性力学，它是研究弹性体在外因（如载荷、温差等）作用下所产生的应力、应变和位移的一门学科。

弹性理论与材料力学相比，既有相同之处，也有不同之处。材料力学研究的主要对象是杆件，研究中除采用基本假设外，还引用了一些关于整体变形规律的假设（如梁的平面截面假设），或截面上应力分布规律的假设，以求简化计算，因而所得结论的精确度稍差。弹性理论的研究对象一般包括杆、板、壳和块体等，研究范围广泛得多；研究中力求少作假设，论证严密；描述受力状态和变形状态的基本方程都是偏微分方程，虽然求解偏微分方程的边值问题较为困难，计算较为复杂，然而能够得到精确解。二者采用的基本假设完全相同，研究方法共同特点是都从受力物体内截出一个典型微元体进行分析，分别建立起相应的平衡方程、几何方程和物理方程，然后按应力或按位移求解这些方程的边值问题。但是，二者所取的微元体稍有不同：材料力学的微元体是一个薄片体，其沿杆轴方向的尺寸为无限小，其它方向的尺寸则是杆的横截面尺寸，因而其体积为一阶无限小。弹性理论的微元体为平行六面体，各边尺寸均为无限小，因而其体积为三阶无限小。

二、弹性理论的基本假设

1. 连续性假设

不考虑实际物体内部的间隙，认为物体是由连续介质组成的，因而物体内的应力、应变、位移等均为坐标的连续函数。

2. 均匀性和各向同性的假设

假设物体内的材料处处相同，而且其性能没有方向性。这样，材料的弹性模量、泊松比等弹性系数不随位置坐标和方向而变化。

3. 完全弹性假设

物体受外力而变形，但在外力撤除后，物体能够完全恢复到原来的形状和尺寸，不会留下任何残余变形。

4. 小变形假设

假设物体因变形而产生的位移远小于物体的原有尺寸。因此，在建立物体的平衡方程时，可以不计物体尺寸的变化；在建立几何方程和物理方程时，允许略去应变、转角等的二次幂或二次乘积以上的项，从而导致基本方程成为线性方程。基本方程是线性方程的弹性理论，通常称为线性弹性理论。

三、应力和应变的概念

物体由于受外力作用或受温差影响，其内部任一部分与其相邻部分之间所产生的相互作用力称为内力。为了暴露内力，采用截面法。即若欲考察物体内部某一点 M 处的内力，便假想地用经过 M 点的截面 mn 将该物体分为 A 和 B 两部分（图 1-1），然后任取其一，例如取部分 A （图 1-1a）。部分 A 的截面 mn 上连续分布的内力，实质上就是部分 B 施于部分 A 的作用力。在 mn 截面上，围

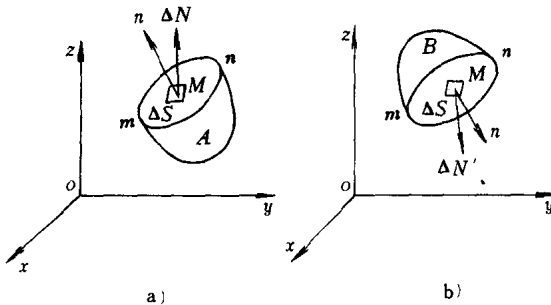


图 1-1 截面法
a) 部分 A b) 部分 B

绕 M 点取一块微小面积 ΔS ，其上所作用的内力之合力记为 ΔN ，则称 $\Delta N/\Delta S$ 为面积 ΔS 上的平均应力。若令 ΔS 趋近于零， $\Delta N/\Delta S$ 将趋向一定的极限，即

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta S} = \boldsymbol{p} \quad (1-1)$$

则称极限矢量 \boldsymbol{p} 为 mn 截面上 M 点的全应力。因为 ΔS 是标量，所以 \boldsymbol{p} 的方向就是 ΔN 的极限方向。应力这个概念包含着三个要素：大小、方向、作用面的方位。

若将全应力矢量 \boldsymbol{p} 分解成如下两个分量（图 1-2）：一个分量沿着 M 点的法线方向，记为 σ ，另一个分量躺在 mn 截面上，记为 τ ，则称 σ 为 mn 截面上 M 点的正应力， τ 为 mn 截面上 M 点的切应力（或称剪应力）。由材料力学知道，正应力 σ 和切应力 τ 与物体的变形及材料强度直接相关，所以这种分解所得到的两个分量具有明显的物理意义。

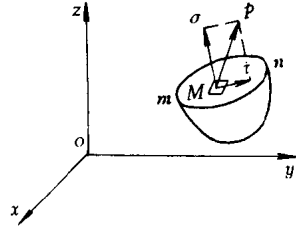


图 1-2 全应力矢量分解成法向分量和切向分量

在给定的直角坐标系中，与坐标轴斜交的截面称为斜截面，与坐标轴正交的截面称为正截面。如果 mn 截面是斜截面（图 1-3），将其全应力矢量 \boldsymbol{p}_n 沿三个坐标轴方向的分量记为 p_x 、 p_y 、 p_z ，则有

$$\boldsymbol{p}_n = p_x \boldsymbol{i} + p_y \boldsymbol{j} + p_z \boldsymbol{k} \quad (1-2)$$

式中， \boldsymbol{i} 、 \boldsymbol{j} 、 \boldsymbol{k} 分别代表沿三个坐标轴 x 、 y 、 z 方向的单位矢量。这样分解所得到的三个分量虽然没有明显的物理意义，但在后面将可看到，它们在推导理论公式的过程中将会提供很大方便。

如果 mn 截面是正截面（图 1-4），将其全应力矢量 \boldsymbol{p} 沿三个坐标轴方向的分量记为 σ_{xx} 、 τ_{xy} 、 τ_{xz} ，则有

$$\boldsymbol{p} = \sigma_{xx} \boldsymbol{i} + \tau_{xy} \boldsymbol{j} + \tau_{xz} \boldsymbol{k} \quad (1-3)$$

显然, σ_{xx} 为正应力, 沿截面的法线方向; τ_{xy} 和 τ_{xz} 为切应力, 都躺在截面上, 其中 τ_{xy} 沿 y 方向, τ_{xz} 沿 z 方向。将 τ_{xy} 和 τ_{xz} 按矢量相加, 即得前面所说的切应力 τ 。习惯上, 把正截面上全应力矢量沿坐标轴方向的分量简称为应力分量。

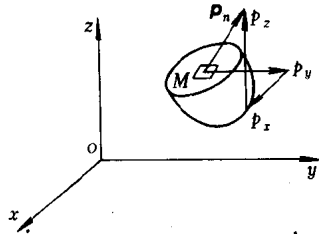


图 1-3 全应力矢量沿三个坐标轴方向分解

这里, 每个应力分量都有两个下标。其中第一个下标表示该应力分量的作用面垂直于哪一个坐标轴, 第二个下标表示该应力分量沿哪一个坐标轴方向。例如, τ_{xy} 的两个下标依次表示 τ_{xy} 的作用面垂直于 x 轴、 τ_{xy} 沿 y 轴方向。应力分量的两个下标相同时, 可只写一个下标, 如 σ_{xx} 可简写为 σ_x 。

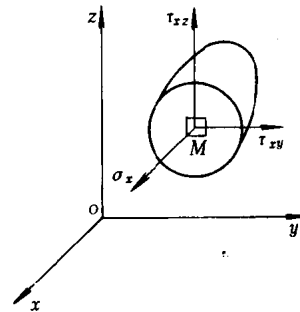


图 1-4 截面外法线与 x 轴重合时的应力分量

应力分量的正负号规则如下: 当截面的外法线沿着坐标轴正向时, 该截面上的应力分量沿坐标轴正向取正号, 沿坐标轴负向取负号; 相反, 当截面的外法线沿着坐标轴负向时, 该截面上的应力分量沿坐标轴负向取正号, 沿坐标轴正向取负号。根据这个规则, 正应力仍然是拉应力为正, 压应力为负; 但切应力的正负号有时可能不同于材料力学规定的正负号。

通过 M 点截出三个互相垂直的截面, 它们分别垂直于三个坐标轴 (图 1-5)。根据下标规则, 垂直于 x 轴的截面上的三个应力分量记为 σ_x 、 τ_{xy} 、 τ_{xz} , 垂直于 y 轴的截面上的三个应力分量记为 σ_y 、 τ_{yx} 、 τ_{yz} ; 垂直于 z 轴的截面上的三个应力分量记为 σ_z 、 τ_{zx} 、 τ_{zy} 。它们构成 M 点的九个应力分量。后面将要证明, 其中切应力分量

服从互等定律, 即 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ 。因而, M 点处独立的应力分量实际上只有六个, 即三个正应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z , 三个切应力分量 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 。通过一点的所有截面 (无限多个) 上的应力情况 (指应力大小及其指向), 统称为该点的应力状态。后面也要证明, 任一点的上述六个应力分量完全可以确定该点的应力状态。

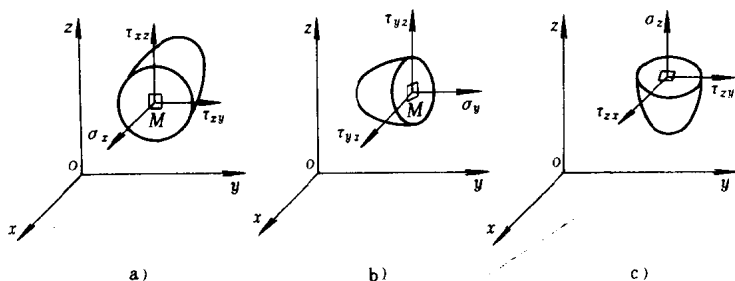


图 1-5 一点的九个应力分量

这里需要强调一下: 根据应力分量的定义, 每个坐标系有它自己的应力分量; 即使在同一点, 选用不同的坐标系, 其应力分量也不同。

一点的九个应力分量, 可以写成下列形式:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

其中, 第一行的三个量代表垂直于 x 轴的截面上的三个应力分量, 第二行的三个量代表垂直于 y 轴的截面上的三个应力分量, 第三行的三个量代表垂直于 z 轴的截面上的三个应力分量。同一行的三个应力分量作用在同一截面上, 分别沿着 x 、 y 、 z 方向; 同一列的三个应力分量分别作用在三个不同的截面上, 但是它们的指向相同。

式 (1-4) 又可写成

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

其中, $\sigma_{11} = \sigma_x$, $\sigma_{12} = \tau_{xy}$, \dots , $\tau_{32} = \tau_{zy}$, 等等。

当坐标系变换时, σ_{ij} 的变化符合张量的变化规律, 所以 σ_{ij} 称为应力张量。

物体在变形过程中, 其内部各质点必产生位移。位移的结果将引起三种变化: 第一种, 物体内各微元体的位置发生了改变; 第二种, 各微元体的方位发生了改变; 第三种, 各微元体的形状和尺寸发生了改变。上述第一种变化称为刚体平移, 第二种变化称为刚体转动; 二者合称为刚体位移。第三种变化称为纯变形。纯变形总可以归结为长度的改变和角度的改变。

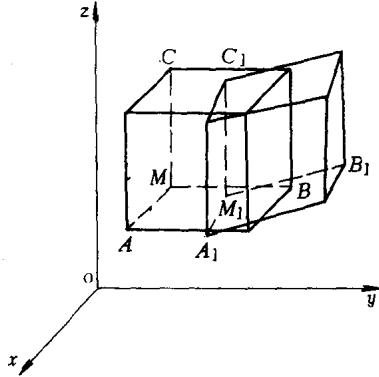


图 1-6 一点的九个应变分量

为了分析物体内部某点 M 处的纯变形情况, 在 M 点处沿 x 、 y 、 z 的正方向取三根微小线段 \overline{MA} 、 \overline{MB} 、 \overline{MC} , 如图 1-6 所示。纯变形以后, 这三根线段的长度以及它们相互间的夹角 (直角) 一般都将有所改变。各线段每单位长度的改变量称为 M 点的线应变, 用字母 ϵ 表示; 各线段相互间夹角 (直角) 的改变量称为 M 点的切应变 (剪应变) 或角应变, 用字母 γ 表示。常用 ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z 依次代表沿 x 、 y 、 z 坐标轴方向的线应变; γ_{xy} 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 依次代表 x 和 y 两轴、 y 和 z 两轴、 z 和 x 两轴之间的切应变。上述 ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z 、 γ_{xy} 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 统称为 M 点的六个应变分量。这里需要强调, 在建立应变分量的概念时, 规定三根微小线段 \overline{MA} 、 \overline{MB} 、 \overline{MC} 都必须平行于坐标轴, 换言之, 只有与坐标轴同方向的三根线段的线应

变和它们之间的切应变，才能被称为应变分量。任何其它方向的一些线段的线应变和任意两正交线段间的切应变，都不能称为应变分量。与应力分量的概念一样，应变分量的概念也与坐标系紧密相连，每个坐标系都有它自己的应变分量；即使在同一点，选用不同的坐标系，其应变分量也不同。

应变的正负号规则如下：线应变以线段伸长时为正，缩短时为负；切应变以夹角（直角）变小时为正，变大时为负。

通过一点的所有方向（无限多个）上的线应变情况（指线应变大小及其正负号）及任意两正交方向的切应变情况（指切应变大小及其正负号），统称为该点的应变状态。以后将要证明，任一点的六个应变分量，完全可以确定该点的应变状态。

第二节 应力状态理论

一、平衡微分方程

为了推导平衡微分方程，从受力物体任一点 M 处截取一个微元体（平行六面体）来研究。它的六个面分别垂直于相应的坐标轴，三条棱边的长度分别为 dx 、 dy 、 dz 。它受到的作用力有体积力和面力两种。

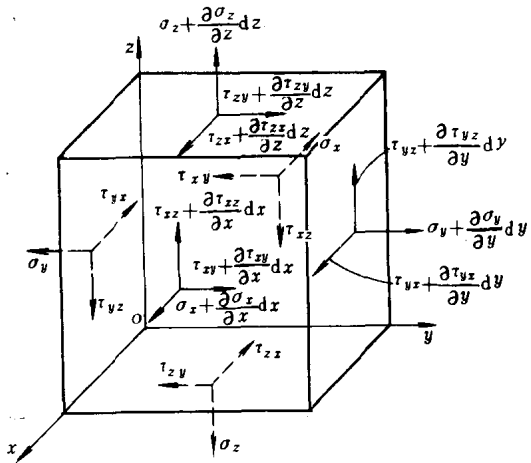


图 1-7 六面体微元上的应力情况

体积力包括重力、惯性力等。我们将单位体积力沿三个坐标轴方向分解所得到的三个分量记为 X 、 Y 、 Z 。

微元体六个面上的各应力分量就是它的面力。一般地说，各

应力分量都是位置坐标的函数, 并假定此函数是连续、可导的。在图 1-7 中, 若将微元体后面上的正应力表示为

$$\sigma_x = f(x, y, z)$$

则微元体前面 (坐标为 $x+dx$) 上的正应力将是

$$\sigma'_x = f(x+dx, y, z)$$

函数按泰勒级数展开, 有

$$f(x+dx, y, z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + \dots$$

略去高阶微量, 便有

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

其余各应力分量随坐标改变而变化的关系, 均可依次类推。

微元体处于平衡状态时, 所受到的作用力应满足下列六个平衡方程:

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma M_x = 0, \Sigma M_y = 0, \Sigma M_z = 0$$

根据 $\Sigma X = 0$, 将微元体上所有的作用力向 x 轴投影, 得

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \\ & - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy \\ & + X dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

经过化简和整理, 最后得到下列方程组中的第一式。同理, 根据 $\Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0$, 可得下列方程组的第二式、第三式。即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

这组方程通常称为平衡微分方程, 又称 Navier 方程。

根据 $\Sigma M_x=0$ ，将微元体上所有的作用力对 x 轴取力矩，得

$$\begin{aligned} & \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx - \tau_{xz} \right) dy dz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right. \\ & \left. - \tau_{xy} \right) dy dz \frac{dz}{2} - \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy - \sigma_y \right) dx dz \frac{dz}{2} \\ & + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz dy + \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right. \\ & \left. - \sigma_z \right) dy dx \frac{dy}{2} - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dy dx dz - Y dx dy dz \frac{dz}{2} \\ & + Z dx dy dz \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned}$$

经过整理并略去高阶微量，最后得出下面公式中的第一式。同理，根据 $\Sigma M_y=0$ ， $\Sigma M_z=0$ ，可得下面公式中的第二式、第三式。即

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

上式即切应力互等定律。其内涵是：上式等号两边的两个切应力分量，作用在两个互相垂直的截面上，它们的大小相等，它们的方向或者是共同指向或者是共同背离该两截面的交线。式 (1-7) 证明，任一点的六个切应力分量中，只有三个是独立的。

二、任一斜截面上的应力

假定受力物体内部 M 点的六个应力分量 σ_x ， σ_y ， σ_z ， τ_{xy} ， τ_{yz} ， τ_{yx} 为已知，现欲求经过 M 点的任一斜截面（其外法线方向余弦为 l 、 m 、 n ）上的应力。

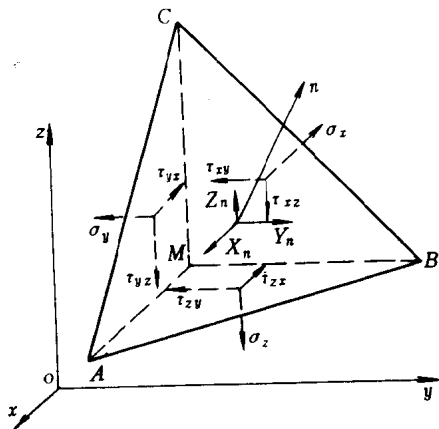


图 1-8 四面体微元上的应力情况

为此, 在 M 点附近取一个平面 ABC , 平行于该斜截面, 并与经过 M 点而平行于坐标面的三个平面构成一个四面体微元, 如图 1-8 所示。显然, 当平面 ABC 无限趋近 M 点时, 平面 ABC 上的应力就成为该斜截面上的应力。

设 $\triangle ABC$ 的面积为 ΔS , 则 $\triangle MBC$ 、 $\triangle MAC$ 、 $\triangle MAB$ 的面积依次为 $l\Delta S$ 、 $m\Delta S$ 、 $n\Delta S$ 。四面体微元 $MABC$ 的体积用 ΔV 表示。平面 ABC 上的全应力 p_n 在坐标轴方向的分量用 X_n 、 Y_n 、 Z_n 表示, 单位体积力在三个坐标轴方向的分量用 X 、 Y 、 Z 表示。根据四面体微元的平衡条件 $\Sigma F_x=0$, 有

$$X_n\Delta S - \sigma_x l\Delta S - \tau_{yx}m\Delta S - \tau_{zx}n\Delta S + X\Delta V = 0$$

除以 ΔS , 并移项, 得

$$X_n + X \frac{\Delta V}{\Delta S} = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}$$

当平面 ABC 无限趋近于 M 点时, 由于 ΔV 是比 ΔS 更高一阶的微量, 因此 $\frac{\Delta V}{\Delta S}$ 趋于零。于是得到下列第一式。根据 $\Sigma F_y=0$ 及 $\Sigma F_z=0$, 可得下列第二式、第三式。即

$$\left. \begin{aligned} X_n &= l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ Y_n &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \\ Z_n &= l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

写成矩阵形式则得

$$\begin{Bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad (1-9)$$

将 X_n 、 Y_n 、 Z_n 分别向斜截面的法线方向投影, 三个投影之和就是斜截面上的正应力 σ_n , 即

$$\sigma_n = lX_n + mY_n + nZ_n$$

将式 (1-8) 代入, 并利用切应力互等定律, 即得

$$\sigma_n = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2lm\tau_{xy} + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} \quad (1-10)$$

设斜截面上的切应力为 τ_n , 由于

$$p_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2$$

$$\text{因此} \quad \tau_n^2 = p_n^2 - \sigma_n^2 = X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2 - \sigma_n^2 \quad (1-11)$$

由式 (1-10) 和式 (1-11) 可见, 在受力物体内任一点处, 如果已知其六个应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} , 就可求得任一斜截面上的正应力 σ_n 和切应力 τ_n 。就是说, 一点的六个应力分量, 完全确定该点的应力状态。

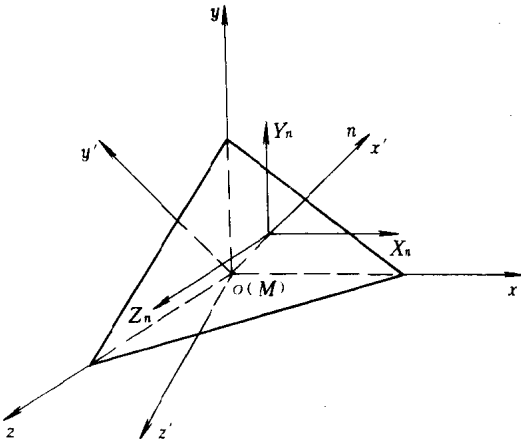
如果四面体微元取在物体的边界处, 平面 ABC 是边界面, 则 X_n 、 Y_n 、 Z_n 便应是面力分量 \bar{X} 、 \bar{Y} 、 \bar{Z} , 即

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_x)_s + m(\tau_{yx})_s + n(\tau_{zx})_s &= \bar{X} \\ l(\tau_{xy})_s + m(\sigma_y)_s + n(\tau_{zy})_s &= \bar{Y} \\ l(\tau_{xz})_s + m(\tau_{yz})_s + n(\sigma_z)_s &= \bar{Z} \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

下标 s 代表物体的边界。上式就是物体的静力边界条件。各应力分量函数必须满足这组条件。

三、应力分量的变换公式

假设新坐标系 $ox'y'z'$ 是由原坐标系 $oxyz$ 经过某一旋转而得到的。两个坐标系的原点均位于所考察的 M 点, 见图 1-9。新坐标系各轴对于原坐标系各轴的方向余弦见下表。



原轴 \ 新轴	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

图 1-9 两个坐标系各轴之间的夹角

M 点的应力状态既可由原坐标系中的六个应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 确定，又可由新坐标系中的六个应力分量 $\sigma_{x'}$ 、 $\sigma_{y'}$ 、 $\sigma_{z'}$ 、 $\tau_{x'y'}$ 、 $\tau_{y'z'}$ 、 $\tau_{z'x'}$ 确定。下面研究这两组应力分量之间的变换规律。

使新轴 x' 与斜截面的外法线 n 重合。 x' 轴对于原坐标系各轴的方向余弦为 l_1 、 m_1 、 n_1 。根据式 (1-8) 有

$$X_n = l_1\sigma_x + m_1\tau_{xy} + n_1\tau_{zx}$$

$$Y_n = l_1\tau_{xy} + m_1\sigma_y + n_1\tau_{yz}$$

$$Z_n = l_1\tau_{zx} + m_1\tau_{yz} + n_1\sigma_z$$

将 X_n 、 Y_n 、 Z_n 投影于 x' 轴上，得正应力 $\sigma_{x'}$ ；投影于 y' 轴上，得切应力 $\tau_{x'y'}$ ；投影于 z' 轴上，得切应力 $\tau_{x'z'}$ 。它们各等于

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= X_n l_1 + Y_n m_1 + Z_n n_1 \\ &= l_1^2 \sigma_x + m_1^2 \sigma_y + n_1^2 \sigma_z + 2l_1 m_1 \tau_{xy} \\ &\quad + 2m_1 n_1 \tau_{yz} + 2n_1 l_1 \tau_{zx} \\ \tau_{x'y'} &= X_n l_2 + Y_n m_2 + Z_n n_2 \\ &= l_1 l_2 \sigma_x + m_1 m_2 \sigma_y + n_1 n_2 \sigma_z + (l_1 m_2 \\ &\quad + l_2 m_1) \tau_{xy} + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \tau_{yz} \\ &\quad + (n_2 l_1 + n_1 l_2) \tau_{zx} \\ \tau_{x'z'} &= X_n l_3 + Y_n m_3 + Z_n n_3 \\ &= l_1 l_3 \sigma_x + m_1 m_3 \sigma_y + n_1 n_3 \sigma_z + (l_1 m_3 \\ &\quad + l_3 m_1) \tau_{xy} + (m_1 n_3 + m_3 n_1) \tau_{yz} \\ &\quad + (n_3 l_1 + n_1 l_3) \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

接着，依次使新轴 y' ，新轴 z' 与斜截面的外法线 n 重合，采用相同方法，可得其余六个应力分量 $\sigma_{y'}$ 、 $\sigma_{z'}$ 、 $\tau_{y'z'}$ 、 $\tau_{z'x'}$ 、 $\tau_{y'x'}$ 、 $\tau_{z'y'}$ 。并且发现，新坐标系中的切应力分量也服从切应力互等定律，即有

$$\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'}$$

$$\tau_{y'z'} = \tau_{z'y'}$$

$$\tau_{z'x'} = \tau_{x'z'}$$