高等代数应试训练

刘玉森 苏仲阳 主编
魏鸿增 主审

地质出版社

高等代数应试训练

主　编　刘玉森　苏仲阳
主　审　魏鸿增
编　者　王春森　王德生　毛建耀
包峰山　白述伟　白淑敏
华德康　朱元森　朱玉山
欧阳功博　张怀民
张勤海　侯秀

地质出版社
·北　京·

（京）新登字 085 号

图书在版编目（CIP）数据

高等代数应试训练/刘玉森，苏仲阳主编. -北京：地质出版社，1995.9

ISBN 7-116-01867-0

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①刘…　②苏…　Ⅲ. 高等代数-习题　Ⅳ. 015-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（[illegible]）第 2262 号

地质出版社出版发行

（100083　北京海淀区学院路 29 号）

责任编辑：赵　薇　张谊宾

*

河北雄县胶印厂印刷　新华书店总店科技发行所经销

开本：787×1092 1/32　印张：18　字数：403000

1995 年 9 月北京第一版・1995 年 9 月北京第一次印刷

印数：1—5000 册　定价：18.00 元

ISBN 7-116-01867-0

O・04

前　言

随着我国教学改革的发展，各类考试更加注重科学化、标准化、制度化以及测试的客观、准确。因此，高等学校和各类成人高校的教学考试，逐步实行使用题库编制符合各种考核目的要求的试卷。各类理工、师范院校的高等代数（包括线性代数）课程的考试也正朝此方向发展。为了帮助学生适应考试手段上的这种变化，使学生在各类考试中发挥出应有水平，稳定地提高学习成绩，我们编写了这本教学辅助教材。

本书是以国家教委颁布的高等代数教学大纲为依据，按照国内优秀教材的体系，并以国外同类教材为参考，从华北、东北十所高等师范院校共同建立的高等代数题库中，精选出在内容、方法、题型和应用方面均具代表性的试题，并对各题给出较详细的解答。本书中的试题覆盖了高等代数的全部内容，并紧紧围绕各章节的知识点，由浅入深徐徐展开，揭示各知识点之间的联系，展示解题的规律与技巧。使用此教学辅助教材，定能有效地帮助学生加深对高等代数知识的理解，熟练地掌握高等代数的解题方法与技能，提高分析问题和解决问题的能力。

本书不仅是各类普通高等学校和各类成人高校理工科学生学习高等代数（线性代数）必备之教材，也是准备报考硕士研究生的考生进行考前复习和教师进行教学研究的有价值的参考书。

本书由刘玉森、苏仲阳主编，魏鸿增主审。参加此书编写

的有：苏仲阳、毛建耀（天津师范大学），刘玉森、华德康、欧阳功博（首都师范大学），魏鸿增、王春森（河北师范学院），朱元森、白淑敏（河北师范大学），张怀民、张勤海（山西师范大学）、包峰山（内蒙古师范大学），侯秀琴（内蒙古民族师范学院），王德生（辽宁师范大学），张必忠、朱玉山（四平师范学院），白述伟、吕庆祝（哈尔滨师范大学）。白述伟、张怀民、张必忠审阅了本书的初稿并提出修改意见。苏仲阳、刘玉森、魏鸿增完成了全书的修改、整理与定稿工作。十所院校的部分高等代数任课教师为本书的编写提供了一些宝贵的资料，对此我们表示真切地感谢。

在本书的编写过程中，我们为保证质量虽然做了一定的努力，但限于水平，仍难免出现疏漏与错误，恳请读者批评指正。

编 者

1995.5

目　录

第一章　基本概念

§1　集合

1. 判断题

(1)　设 $A=\{x|x>2$ 且 $x\in\mathbf{N}\}$;则

(i)　$\{5\}\in A$;　(　)

(ii)　$\varnothing\in A$;　(　)

(iii)　$\{3\}\subset A$;　(　)

(iv)　$1\overline{\in}A$.　(　)

(2)　设 A 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集,则

(i)　$A\cup(\mathbf{R}\backslash A)=\{\mathbf{R}\}$;　(　)

(ii)　$\varnothing\subseteq A$.　(　)

(3)　设 A 是 B 的子集,则

(i)　$A=\varnothing,B=\varnothing$;　(　)

(ii)　A 是 $ax^2+bx+c=0$ 的解集,$B=\mathbf{R}$.　(　)

(iii)　A 是以下方程组的解集

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_n.\end{cases}$$

B 是 $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$ 的解集.　(　)

答案(1)　(i)×;(ii)×;(iii)√;(iv)√.(2)　(i)×;(ii)√.(3)　(i)√;(ii)×;(iii)√.

2. 选择题

设　$M=\{x\in\mathbf{R}|-1\leqslant x\leqslant1\}$,

$$N=\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\},P=\{x\in\mathbf{R}\mid -1<x<2\}.$$

则 $M\cup(N\cap P)$是(　　).

这里 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x>-1\}$,

$B=\{x\in\mathbf{R}\mid 0<x<2\}$,

$C=\{x\in\mathbf{R}\mid -1\leqslant x<2\}$,

$D=\{x\in\mathbf{R}\mid -1<x\leqslant 1\}$.

答案　C.

3. 填空题

(1)　设 $I=\{x\mid x\in\mathbf{N}$ 且 $x\leqslant 10\}$,子集 $B=\{2,4,6,8,9\}$, $A=\{1,3,5,8,9\}$, $C=\{5,6,8,10\}$.

则(i) $A\cup B=$ __________; (ii) $A\cap B=$ __________;

(iii) $A\backslash B=$ __________; (iv) $\overline{A}=$ __________;

(v) $\overline{B\cup C}=$ __________; (vi) $\overline{B}\cap\overline{C}=$ __________;

(vii) $(B\backslash C)\cap C=$ __________; (viii) $(A\backslash C)\cup C=$ __________.

(2)　设集合 $A=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $16-x^2\geqslant 0\}$, $B=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x^2-x-6>0\}$,

则 $A\cap B=$ __________.

(3)　方程 $|x-2|+(5-y)^2=0$ 在实数范围内的解集是 __________.

(4)　设 $A=\{a,b,c,d\}$,则 A 的所有子集构成的集合是 __________.

(5)　设 A 中有 n 个元素.则在 A 的子集构成的集合中,含元素个数是__________.

(6)　设 $A_1=\{(x,x)\mid x\in\mathbf{R}\}$; $A_2=\{(x,ax+b)\mid x\in\mathbf{R}, a, b$ 是确定的实数,且 $a\neq 0\}$; $A_3=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}$,且 $x^2+y^2=1\}$; $A_4=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}$,且 $x^2+y^2<1\}$; $A_5=\{(x,y)\mid x,y\in$

$\mathbf{R}, |x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1\}$,

则(i) $A_1\setminus A_2=$______; (ii) $A_5\setminus A_4=$______; (iii) $A_5\setminus(A_4\cup A_3)$ $=$______; (iv) $A_4\setminus A_5=$______.

答案：

(1) (i) $A\cup B=\{1,3,5,8,9,2,4,6\}$; (ii) $A\cap B=\{8,9\}$; (iii) $A\setminus B=\{1,3,5\}$; (iv) $\overline{A}=\{2,4,6,7,10\}$; (v) $\overline{B\cup C}=\{1,3,7\}$; (vi) $\overline{B}\cap\overline{C}=\{1,3,7\}$; (vii) $(B\setminus C)\cap C=\varnothing$; (viii) $(A\setminus C)\cup C=\{1,3,9,5,6,8,10\}$.

(2) $A\cap B=\{x\mid x\in R$ 且 $3<x\leqslant 4$ 或 $-4\leqslant x<-2\}$.

(3) $\{(2,5)\}$.

(4) $\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\}\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$.

(5) 2^n.

(6) (i) $A_1\setminus A_2=\begin{cases}\varnothing, \text{当 } a=1, b=0 \text{ 时};\\ A_1, \text{当 } a=1, b\neq 0 \text{ 时};\\ \{(x,x)\mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x\neq\dfrac{b}{1-a}\}, \text{当 } a\neq 1 \text{ 时}.\end{cases}$

(ii) $A_5\setminus A_4=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}, x^2+y^2\geqslant 1$, 且 $|x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1\}$.

(iii) $A_5\setminus(A_4\cup A_3)=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}, x^2+y^2>1, |x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1\}$.

(iv) $A_4\setminus A_5=\varnothing$.

4. 指出下列集合由哪些元素组成：

$A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}, |x|<10\}$； $B=\{x\mid x=2k, k\in\mathbf{Z}\}$；

$C=\{x\in\mathbf{R}\mid 0<x<1\}$； $D=\{z\mid z^n=1, z\in\mathbf{C}\}$.

解 $A=\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm9\}$. B 为全体偶数构成的集

合. C 是区间 $(0,1)$ 内全体实数的集合. D 是 n 个 n 次单位根的集合.

5. 把下列集合用元素特征性质表示出来：

(1) 全体奇数的集合；

(2) 全体幅角为 $\frac{\pi}{3}$ 的复数的集合；

(3) $M=\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$；

解 (1) $\{x \mid x=2k+1, k\in \mathbf{Z}\}$；

(2) $\{z \mid \arg z=\frac{\pi}{3}, z\in \mathbf{C}\}$；

(3) $M=\{z \mid z\in \mathbf{C}, z^2=-1\}$.

6. 设 $M\subset N$，证明：

$$M\cap N=M, M\cup N=N.$$

证 设 $M\subset N$ 成立，那么 M 的每个元素也是 M，N 的公共元素，因此 $M\subset M\cap N$. 又因为 $M\cap N\subset M$，故 $M\cap N=M$.

设 $M\subset N$ 成立时，则对任何 $x\in M\cup N$，或是 $x\in M$ 或是 $x\in N$ 都能推出 $x\in N$. 这即 $M\cup N\subset N$；但 $N\subset M\cup N$，故又有 $M\cup N=N$.

7. 证明：

$$A\cup (B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$
$$A\cap (B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

证 为证明并的结合律，只须注意 $A\cup (B\cup C)$ 是由属于 A 或属于 B 或属于 C 的元素所构成的集合，而 $(A\cup B)\cup C$ 也是这同一集合. 对交的结合律则注意到 $A\cap (B\cap C)$ 是由 A，B 及 C 的公共元素所构成的集合，可知它和 $(A\cap B)\cap C$ 是同一集合，因而证得结论.

8. 证明下述三个关系彼此等价：

(1) $A\subset B$,(2)$A\cup B=B$,(3)$A\cap B=A$.

证 设(1)成立,则由 6 题可知(2)成立. 其次,假设(2)成立. 那么由 $A\cup B=B$ 及 $A\subset A\cup B$ 立知(1)即 $A\subset B$ 成立,故(1)与(2)等价.

设(1)成立,仍由 6 题立知(3)成立. 假设(3)成立,那么再由 $A\cap B\subset B$ 就推出(1)成立. 故(1)与(3)也等价.

9. 对任意的集合 A,B,C 证明:

(1) 若 $A\subset B$ 且 $A\subset C$,则 $A\subset B\cap C$;

(2) 若 $A\subset C$ 且 $B\subset C$,则 $A\cup B\subset C$.

证 (1)因为 $A\subset B$ 且 $A\subset C$,则由 8 题可知 $A\cap B=A$,$A\cap C=A$,因而由 7 题交适合结合律有 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap C=A$,再由 8 题立即证出 $A\subset B\cap C$. 类似地可证出(2).

10. 证明:

(1)$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(2)$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

证 为证明并关于交是可分配的即上式(1),我们注意,若 $x\in A\cup(B\cap C)$,则 x 或属于 A,或属于 $B\cap C$. 在前一情形,则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,因而 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$;在后一情形,则 $x\in B$ 且 $x\in C$,因此 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$,因此仍有 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$,这就证明了

$$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

反之,若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$,则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$;若 $x\bar{\in} A$,则必须 $x\in B$ 且 $x\in C$,因此 $x\in B\cap C$. 这样不论 $x\in A$ 或 $x\bar{\in} A$,总有 $x\in A\cup(B\cap C)$,这证明了

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C).$$

由集合相等的意义知等式(1)成立. 同理可证(2).

11. 证明：

$$A\cup(B\cap C\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(A\cup D).$$

证　由 7 题，集合的交适合结合律及 8 题(1)，并对交有分配律，我们得到

$$\begin{aligned}A\cup(B\cap C\cap D)&=A\cup[(B\cap C)\cap D]\\&=[A\cup(B\cap C)]\cap(A\cup D)\\&=(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(A\cup D).\end{aligned}$$

§2　数环和数域

12. 判断题

(1)以下集合是不是数环？

(i) 全体偶数；

(ii) 全体奇数；

(iii) 全体自然数；

(iv) $\{0\}$；

(v) $\{b\sqrt{5}\mid b\in\mathbf{Z}\}$.

(2)以下集合是不是数环或数域？

(i) $\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\mid a,b,c,d\in\mathbf{Q}\}$；

(ii) $\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$；

(iii) $\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{Q}$ 且 $a+b=0\}$；

(iv) $\{am\mid a\in z,m$ 是个固定整数$\}$.

(3)设 $P=\{a+b\mathrm{i}\}$，当 a,b 属于下列数集时，P 能否构成数环或数域？

(i) $a,b\in\mathbf{Z}$；

(ii) $a,b\in\mathbf{Q}$；

(iii) $a\in\mathbf{Q},b\in\mathbf{R}$.

(4)　以下数集是不是数环？是不是数域？

(i) $\mathbf{Z}$;

(ii) $\mathbf{Q}$,$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$;

(iii) $\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Z}\}$;

(iv) $\{\frac{m}{2^n}\mid m,n\in\mathbf{Z}\}$.

答案 (1) (i)√;(ii)因为两个奇数的和是一个偶数,×;(iii)因为每一个数环含零,×;(iv)√;(v)因为 $2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}=30$ 不形如 $b\sqrt{5}$,×.

(2) (i)是数环也是数域,√,√;(ii)×,×;(iii)×,×;(iv)√,×.

(3) (i)√,×;(ii)√,√;(iii)×,×.

(4) (i)√,×;(ii)√,√;(iii)√,×;(iv)√,×(因为当 m 不能写成 2^k 或 -2^k 时,$\frac{m}{2^n}$的倒数不在此集中).

13. 问答题

(1)包含有理数的数集都是数域吗?

(2)当 P_1,P_2 是数域时,$P_1\cap P_2$ 与 $P_1\cup P_2$ 是否是数域?当 P_1,P_2 是数环时,$P_1\cap P_2$ 与 $P_1\cup P_2$ 呢?

答 (1) 不一定.如 $P=\mathbf{Q}\cup\{\sqrt{2}\}$就不是.

(2) 当 P_1,P_2 是数域时,$P_1\cap P_2$ 是数域,但 $P_1\cup P_2$ 一般不是,仅当 $P_1\subset P_2$ 或 $P_2\subset P_1$ 时才是.对数环的情况也有同样结论.

14. 有没有只含两个数的数环?假如有,举出实例;假如没有,严格加以证明.

证 设 P 是一个数环,若它含有某数 a,那么 P 必含差 $a-a=0$.这就是说每个数环必含有数 0.我们断言:没有只含两个数的数环.事实上,如果数环 $P\neq\{0\}$,那么必存在 $b\in P$ 而 $b\neq 0$.由于加法可实施,P 必含一切数 $2b,3b,\cdots$.这样对任

何自然数 $n_1 \neq n_2$，总有 $n_1 b \neq n_2 b$. 因此只要数环 $P \neq \{0\}$，那么 P 必含无穷多个数.

15. 选择题

设 A＝正实数集，$B=\{2n \mid n \in \mathbf{Z}\}$，$C=\{km \mid k \in \mathbf{Z}, m$ 是固定的整数$\}$；$D=\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a,b \in \mathbf{Q}\}$；$E=\{a+b\mathrm{i} \mid a,b \in \mathbf{Q}\}$. 则

(i) 数环为(　　　)；(ii) 数域为(　　　).

答案　(i)　B,C,E；(ii)　E.

16. 证明：$P=\{a+b\mathrm{i} \mid a,b \in \mathbf{Z}, \mathrm{i}^2=-1\}$ 是数环.

证　因为 $0=0+0\mathrm{i} \in P$，所以 $P \neq \varnothing$. 又若 $a+b\mathrm{i}, c+d\mathrm{i} \in P$，那么

$$(a+b\mathrm{i}) \pm (c+d\mathrm{i}) = (a \pm c) + (b \pm d)\mathrm{i} \in P,$$

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i}) = (ac-bd) + (ad+bc)\mathrm{i} \in P.$$

所以 P 是一个数环.

17. 证明：数域 F_1 与 F_2 的交 $F_1 \cap F_2$ 是数域.

证　由于有理数域 $\mathbf{Q} \subseteq F_i\ (i=1,2)$，故 $F_1 \cap F_2$ 中至少包含两个数. 任取 $a,b \in F_1 \cap F_2$，则 $a+b, a-b, ab$ 和当 $b \neq 0$ 时 $\frac{a}{b}$ 仍在 F_i 中 $(i=1,2)$，故它们也都在 $F_1 \cap F_2$ 中，因此 $F_1 \cap F_2$ 是一个数域.

18. 证明：有理数域 $\mathbf{Q}$ 是最小数域.

证　设 P 是任意一个数域，那么由定义 P 一定包含一个不为 0 的数 b，由 P 对除法封闭可知 $\frac{b}{b}=1 \in P$，再由 P 关于加法和减法封闭就推出任意整数 $n \in P$，进一步由 P 关于除法(除数不为零)封闭更推出任意有理数 $\frac{n}{m}\ (m \neq 0)$ 都在 P 中，故 $\mathbf{Q} \subseteq P$. 所以 $\mathbf{Q}$ 是最小数域.

19. 填空题

(1) 包含$\frac{1}{3}$的最小数域是______；

(2) 包含 $5i$ 的最小数域是______

答案 (1) 有理数域；(2) $\{a+bi|a,b\in\mathbf{Q}\}$.

20. 令 $F=\{a+bi|a,b\in\mathbf{Q}\}$，证明 F 是一个数域.

证 因为 $1=1+0i\in F$，所以 F 含有非零的数. 易证它对于加减法是封闭的，现在证明它对乘除法也是封闭的. 我们知道.

$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i\in F$，这是因为当 a,b,c,d 是有理数时，$ac-bd$，$ad+bc$ 仍是有理数，故 F 对乘法封闭. 今设 $c+di\neq0$，那么 $c-di\neq0$. 否则推出 $c=di$. 在 $d=0$ 时得出 $c=0$，这与 $c+di\neq0$ 的假设矛盾；在 $d\neq0$ 时得出 $i=\frac{c}{d}\in\mathbf{Q}$，这与 i 是纯虚数矛盾. 因此

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\in F,$$

这是由于$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$，$\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$仍是有理数，故 F 对除法封闭，所以 F 是一个数域.

21. 设 F_1 是一切形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数所成的数域，F_2 是一切形如 $a+bi$ 的数所成的数域，这里 a,b 是有理数，那么 $F_1\cap F_2$ 等于什么？

解 我们断言 $F_1\cap F_2=\mathbf{Q}$. 事实上我们可以证明 $\sqrt{2}\notin F_1\cap F_2$，因为否则将有 $\sqrt{2}=c+di\in F_2$. 在 $d\neq0$ 时推出 $i=\frac{-c}{d}+\frac{1}{d}\sqrt{2}$，这与 i 是纯虚数矛盾；在 $d=0$ 得 $\sqrt{2}=c$，这又与 $\sqrt{2}$ 是无理数矛盾. 现在我们容易得到对任何 $a,b\in\mathbf{Q}$，当 $b\neq0$ 时 $a+b\sqrt{2}\notin F_1\cap F_2$，因此域 $F_1\cap F_2\subseteq\mathbf{Q}$. 但是 $\mathbf{Q}$ 是最小数域，故 $F_1\cap F_2=\mathbf{Q}$.