

强非线性振动系统的 定性理论与定量方法

李 骊 著

学 出 版 社

185879

强非线性振动系统的 定性理论与定量方法

李 骊 著



科学出版社

1997

内 容 简 介

本书总结了强非线性振动系统定性及定量方面近年来的主要研究成果.定性方面介绍了应用轨线流量、能量及李雅普诺夫函数等概念而导出的确定周期解存在与稳定的一些新理论;定量方面给出了自治系统、非自治系统及参变系统周期解的各种近似求解方法.最后对混沌现象作了阐述.

本书尽可能从力学概念出发来阐明理论涵义和给出定理证明,使具有工科数学基础的读者可掌握本书内容而无太大困难.

本书可作为力学、数学、机械、自控、航空航天、生物、矿冶等专业大学生与研究生的教材,也可供科研机构和厂矿有关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

强非线性振动系统的定性理论与定量方法/李骊著, - 北京:科学出版社, 1996.12

ISBN 7-03-005419-9

I. 强… II. 李… III. ①非线性振动-定性理论 ②非线性振动-定量分析 IV. 0322

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 17654 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1997年1月第一版 开本:850×1168 1/32

1997年1月第一次印刷 印张:10 5/8

印数:1-1 200 字数:275 000

ISBN 7-03-005419-9/O·865

定价:20.00元

前 言

非线性科学是当今重大的研究课题。其中,强非线性系统,由于其理论与应用的重要性,已成为关注的焦点之一。就强非线性振动系统而言,近年来中外学者曾开展了大量工作,得到了丰硕成果。对此进行及时总结,以便为高等院校提供一本适宜的教学用书,为科研和工程技术人员提供一本可用的参考资料,看来很有必要。

定性理论与定量方法是非线性振动系统,特别是强非线性振动系统不可分割的两个方面。定性理论是从理论上来探讨在何种条件下系统会存在周期解,以及周期解的数目和稳定性。定量方法是应用力学或数学概念来构造周期解的表达式,并给出它的求解步骤。仅了解定性理论而不了解定量方法,就不能有效地分析和计算工程中的一些非线性振动问题;反之,仅掌握定量方法而不熟悉定性理论,就无法给出所研究问题的理论依据。因此,在本书中,定性理论与定量方法二者并重,以便对强非线性振动系统有一个全面的了解。

在定性理论部分,介绍了奇点、极限环、点变换等主要理论,以及根据力学中的流量与能量概念和运动稳定性中的某些理论而得出的判断周期解存在性与稳定性的一些成果。在定量方法部分,介绍了近年来所提出的求解各类强非线性系统周期解的一些有效方法,如强非线性拟保守自治系统的推广 KBM 法;以能量函数为基础的摄动法;强非线性拟保守非自治系统的频闪法;一般强非线性自治系统的三变量迭代法、三变量直接法;一般强非线性非自治系统的能量法;参变系统的坐标变换法,等等。最后一章为非线性系统的混沌现象,简要地阐明了混沌的基本特征,通向混沌的途径,判断可能出现混沌的解析方法,并通过对具体实例的理论分析与

数值模拟,对以上各点给出形象说明.

本书舍弃了非线性振动传统的偏重数学的处理方法,尽可能从力学概念出发,阐明理论的涵义和给出定理的证明.这样可使强非线性振动系统的理论由抽象变为直观,从而使读者易于理解和掌握.此外,对于所介绍的各种定量方法,除说明其求解步骤和精度外,还同时给出其理论依据或数学证明,以便读者对这些方法的实质有更深入的了解.

本书承蒙中国科学院科学出版基金资助出版,深表感谢.北京航空航天大学黄克累教授、清华大学王照林教授、北京理工大学褚亦清教授,对本书的出版给予了积极的支持;北京工业大学副校长沈亦鸣教授对本书的出版给予了热情关怀并在经费上惠予帮助,在此,谨向他们表示衷心的感谢.

本书乃强非线性振动系统抛砖引玉之作,难免有不妥之处,敬希读者不吝指正.

李 骊

1996年4月15日

目 录

第一篇 定性理论

第一章 奇点	1
§ 1-1 前言	1
§ 1-2 奇点及其数学与力学意义	1
§ 1-3 一次奇点的类型及其邻域内轨线所对应的振动性态	2
§ 1-4 非线性项对一次奇点的影响	8
§ 1-5 积分因子的力学和几何意义及其与通积分的关系	12
§ 1-6 轨线流量公式及基本性质	15
§ 1-7 奇点类型的积分因子判定方法	19
§ 1-8 中心与焦点判定的轨线流量法	21
第二章 极限环(I)——轨线流量法与环域法	25
§ 2-1 极限环的定义、类型及意义	25
§ 2-2 判断极限环存在的轨线流量法	28
§ 2-3 强非线性拟保守系统的极限环	32
§ 2-4 判断极限环存在的环域法	37
§ 2-5 生物化学反应中的振动现象——两类细胞反应系统的 极限环	38
§ 2-6 判断极限环不存在的定理	41
§ 2-7 积分因子、矢量场散度以及极限环稳定性之间的关系	43
§ 2-8 旋转矢量场基本理论	45
§ 2-9 轧钢机的自激振动——具有间隙动力系统的极限环	48
第三章 极限环(II)——能量法	56
§ 3-1 前言	56
§ 3-2 方程的变换	56
§ 3-3 判断极限环存在的能量法	63
§ 3-4 应用举例	69
§ 3-5 能量法向平面自治系统的推广	76

第四章 平面非自治系统的周期解	85
§ 4-1 前言	85
§ 4-2 点变换的基本性质	86
§ 4-3 不动点与周期解	87
§ 4-4 不动点定理	89
§ 4-5 周期激励大位移耗散系统周期解的存在定理	90
§ 4-6 具有周期激励 Liénard 方程的周期解	92
§ 4-7 周期解稳定性的基本类型	101
§ 4-8 稳定与不稳定不变流形、奇怪吸引子及捕捉区	108
§ 4-9 二阶非自治系统周期解的能量法	112
§ 4-10 平面非自治系统周期解的能量法	127
§ 4-11 含 x^5 项受周期激励强非线性系统的周期响应	129
第五章 高维周期耗散系统	137
§ 5-1 前言	137
§ 5-2 若干定义与定理	137
§ 5-3 周期解存在定理	139
§ 5-4 高压输电网中的平稳振荡	146

第二篇 定量方法

第六章 强非线性拟保守自治系统	155
§ 6-1 前言	155
§ 6-2 推广的 KBM 法	157
§ 6-3 以能量函数为基础的摄动法	166
§ 6-4 向广义拟保守系统的推广	174
第七章 强非线性拟保守非自治系统	182
§ 7-1 前言	182
§ 7-2 频闪法的基本思想	182
§ 7-3 频闪方程的建立	183
§ 7-4 频闪法基本定理	188
§ 7-5 应用举例	194
第八章 一般强非线性自治系统	203
§ 8-1 前言	203

§ 8-2	三变量迭代法	203
§ 8-3	具有间隙系统的自激振动	210
§ 8-4	三变量直接法	214
§ 8-5	Liénard 方程的周期解	218
§ 8-6	能量法(Ⅰ)——二阶强非线性自治系统周期解	223
§ 8-7	能量法(Ⅱ)——一般平面自治系统周期解	224
§ 8-8	能量法(Ⅲ)——Hopf 分叉	228
第九章	一般强非线性非自治系统	232
§ 9-1	前言	232
§ 9-2	能量法	232
§ 9-3	应用举例	236
第十章	参变系统	246
§ 10-1	前言	246
§ 10-2	二阶线性参变系统的周期解	246
§ 10-3	对初始扰动的稳定性	255
§ 10-4	对参数的稳定性	256
§ 10-5	关于第二组解的若干注记	260
§ 10-6	计算实例	261
§ 10-7	二阶平面参变系统	273
§ 10-8	受外激励二阶线性参变系统的周期解及其稳定性	274
第十一章	非线性系统的混沌现象	286
§ 11-1	混沌的基本特征	286
§ 11-2	混沌的性态及通向混沌的途径	289
§ 11-3	Smale 马蹄	298
§ 11-4	Mel'nikov 方法	303
§ 11-5	Mel'nikov 方法和频闪法的关系	306
§ 11-6	Mel'nikov 方法和能量法的关系	309
§ 11-7	混沌现象的几种判别准则	312
§ 11-8	一个含二次项非线性振子的混沌现象	316

第一篇 定性理论

第一章 奇 点

§ 1 - 1 前 言

如一个力学系统包含非线性元件,则描述该系统的运动微分方程就是非线性微分方程.非线性微分方程通常难以求出它的精确解,因此对它的研究一般分两个方面进行.一是定性理论,即根据该方程非线性函数的某些性质来推断它的解将具有何种性态.对非线性振动系统来讲,主要是判断该系统是否存在周期解,如果存在,则数目与稳定性又如何.另一是定量方法,即寻求该方程具有一定精度的近似解.对于非线性振动系统,主要是求得周期解的近似表达式,并根据这一表达式,探讨该周期解与振动系统中各有关参数间的关系.下面分别对这两个方面进行阐述.

先介绍定性理论.在定性理论中,奇点、分界线与极限环是它的三个主要部分.因为如这三者能够确定,则非线性微分方程解的基本性态就能由此而得知.

§ 1 - 2 奇点及其数学与力学意义

研究二阶方程组

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y). \quad (1-2-1)$$

如果存在一点 $P(x^*, y^*)$, 使得

$$X(x^*, y^*) = 0, \quad Y(x^*, y^*) = 0, \quad (1-2-2)$$

则称此点为方程(1-2-1)的奇点;反之,如 $X(x^*, y^*)$,

$Y(x^*, y^*)$ 中至少有一个不等于零, 则称此点为方程(1-2-1)的常点。

现说明常点与奇点的数学意义。为此, 将式(1-2-1) 改写为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)} \quad \text{或} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{X(x, y)}{Y(x, y)}, \quad (1-2-3)$$

可见, 在常点处 $\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{dx}{dy}$ 有确定值, 因而过常点方程(1-2-1) 有唯一解。在奇点处, 方程(1-2-3) 右端分子、分母同时为零, 成为不定式。这表明在奇点处 $\frac{dy}{dx}$ 可以有多个值, 因而过奇点方程(1-2-1) 可以有多条积分曲线, 亦即在奇点处方程(1-2-1) 解的唯一性不成立。

下面说明奇点的力学意义。将奇点 P 的坐标 x^*, y^* 代入方程(1-2-1), 则它的等号两端均变为零, 这表明 x^*, y^* 是它的一个与时间无关的解。因此, 如果 x, y 表示位置, 则奇点 P 就是平衡位置; 如果 x, y 表示速度或角速度, 则奇点 P 描绘的状态就是匀速或匀角速运动。特别是对于某一振动系统, 如果设其解的形式为 $x = a(t)\cos(\omega t + \varphi(t))$, 其中 $a(t)$ 表示振幅, $\varphi(t)$ 表示位相, 并且满足方程

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= A(a, \varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \Phi(a, \varphi), \end{aligned} \quad (1-2-4)$$

那么它的奇点 $P(a^*, \varphi^*)$ 所描绘的就是具有不变振幅与初位相的谐振动。

§ 1-3 一次奇点的类型及其邻域内轨线所对应的振动性态

任何奇点 $P(x^*, y^*)$ 都可借助坐标平移而变为原点, 因而, 不失一般性可以认为方程(1-2-1) 的奇点就在原点。在原点邻域内将 X, Y 展为幂级数, 得

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by + X_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + Y_2(x, y),\end{aligned}\quad (1-3-1)$$

其中 X_2, Y_2 表示所有高次项. 如果

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0, \quad (1-3-2)$$

则称原点为一次奇点, 反之为高次奇点.

首先略去高次项而研究以下线性系统:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy, \quad (1-3-3)$$

它的特征方程为

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (1-3-4)$$

其中

$$p = -(a + d), \quad q = ad - bc, \quad (1-3-5)$$

而其特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}). \quad (1-3-6)$$

由于现在只研究一次奇点, 由式(1-3-2)知, 此时 $q \neq 0$, 从而特征根中不会有零根.

下面根据特征根的各种可能情况来确定方程(1-3-3)的轨线在奇点邻域内的性状, 并对奇点加以分类.

(1) $q < 0$. 此时 λ_1, λ_2 为异号实根. 通过非异线性变换

$$\xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y, \quad (1-3-7)$$

可将方程(1-3-3)化为

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta, \quad (1-3-8)$$

其解为 $\xi = \xi_0 e^{\lambda_1 t}$, $\eta = \eta_0 e^{\lambda_2 t}$. 如设 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, 则其轨线在原点邻域内的分布情况如图 1-1. 这样的奇点称为鞍点. 由图可见, 此时有一对轨线趋向原点, 它对应着解 $\xi = 0, \eta = \eta_0 e^{\lambda_2 t}$; 另一对轨线自原点离开, 它对应着解 $\xi = \xi_0 e^{\lambda_1 t}, \eta = 0$. 这两对轨线将原

点邻域分为四个区域,使得每一区域内的轨线只能始终停留在该区域内而不能穿越上述两对轨线进入另一区域.正因如此,我们称上述两对轨线为鞍点的分界线,它对于方程(1-2-1)轨线的定性分析有重要意义.

(2) $q > 0, p > 0, p^2 - 4q > 0$. 此时 λ_1, λ_2 为负实根. 同样用非异线性变换式(1-3-7), 可将方程(1-3-3) 化为式(1-3-8), 因而得 $\xi = \xi_0 e^{\lambda_1 t}, \eta = \eta_0 e^{\lambda_2 t}$, 进而得 $\eta = \eta_0 \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$. 若 $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, 则 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$, 此时除轨线 $\xi = 0, \eta = \eta_0 e^{\lambda_2 t}$ 沿 η 轴趋向原点外, 所有其他轨线均沿 ξ 轴趋向原点(见图 1-2). 反之, 如 $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, 则 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$, 此时除轨线 $\xi = \xi_0 e^{\lambda_1 t}, \eta = 0$ 沿 ξ 轴趋向原点外, 所有其他轨线均沿 η 轴趋向原点. 不论属于何种情况, 此时奇点均称为稳定结点.

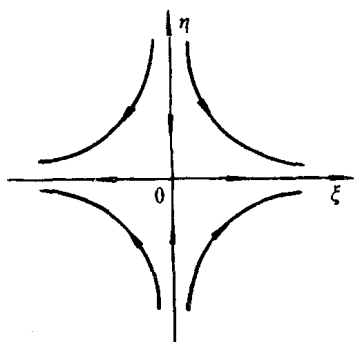


图 1-1

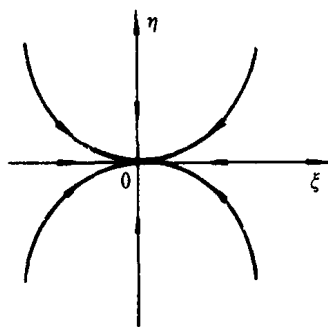


图 1-2

如 $q > 0, p < 0, p^2 - 4q > 0$, 则 λ_1, λ_2 为正实根, 对应的轨线分布情况与上述相同, 只不过指向相反. 此时的奇点称为不稳定结点.

(3) $q > 0, p > 0, p^2 - 4q < 0$. 此时, λ_1, λ_2 为共轭复根且实部为负. 如令 $\lambda_{1,2} = -u \pm iv$, 其中 $u > 0, v > 0$, 则通过非异线性变换式(1-3-7), 可将方程(1-3-3) 化为

$$\frac{d\xi}{dt} = -u\xi - v\eta, \quad (1-3-9)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = v\xi - u\eta.$$

再作变换 $\xi = r\cos\theta$, $\eta = r\sin\theta$, 进而可将上式化为

$$\frac{dr}{dt} = -ur, \quad (1-3-10)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = v,$$

其解为 $r = r_0 e^{-ut}$, $\theta = \theta_0 + vt$, 相应的轨线形状如图 1-3 所示. 此时的奇点称为稳定焦点.

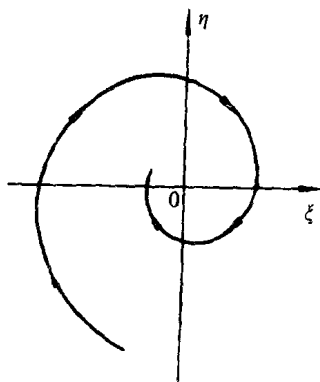


图 1-3

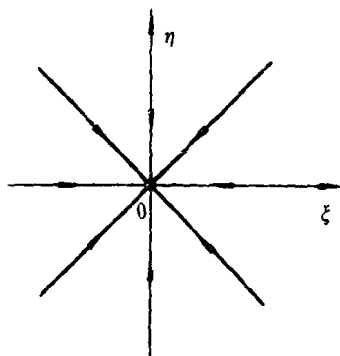


图 1-4

如 $q < 0$, $p < 0$, $p^2 - 4q < 0$, λ_1, λ_2 将为共轭复根, 但实部为正. 此时的奇点称为不稳定焦点.

(4) $q > 0$, $p > 0$, $p^2 - 4q = 0$. 此时 λ_1, λ_2 为一对负重根. 这又可分为两种情况.

(i) 初等因子为线性. 这时的方程(1-3-3)通过非异线性变换式(1-3-7)可化为

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi, \quad (1-3-11)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \lambda_1 \eta,$$

其解为 $\xi = \xi_0 e^{\lambda_1 t}$, $\eta = \eta_0 e^{\lambda_1 t}$, 或 $\eta = \frac{\eta_0}{\xi_0} \xi$, 轨线形状如图 1-4 所示. 此时的奇点称为稳定临界结点.

(ii) 初等因子为非线性. 这时方程(1-3-3)在非异线性变换式(1-3-7)作用下可化为

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_1 \xi, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \alpha \xi + \lambda_1 \eta, \end{aligned} \quad (1-3-12)$$

其中 α 为某一常数. 上式之解为

$$\xi = \xi_0 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta = e^{\lambda_1 t} (\eta_0 + \alpha \xi_0 t),$$

或 $\frac{\eta}{\xi} = \frac{\eta_0}{\xi_0} + \alpha t$. 由此得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\eta}{\xi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\eta_0}{\xi_0} + \alpha t \right) = \begin{cases} +\infty & \text{当 } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{当 } \alpha < 0, \end{cases}$$

因而所有轨线在原点均与 η 轴相切(见图 1-5). 此时的奇点称为稳定退化结点.

如 $q > 0$, $p < 0$, $p^2 - 4q = 0$, λ_1, λ_2 将为一对正重根. 同样, 根据初等因子为线性或非线性, 可分别得到不稳定临界结点和不稳定退化结点.

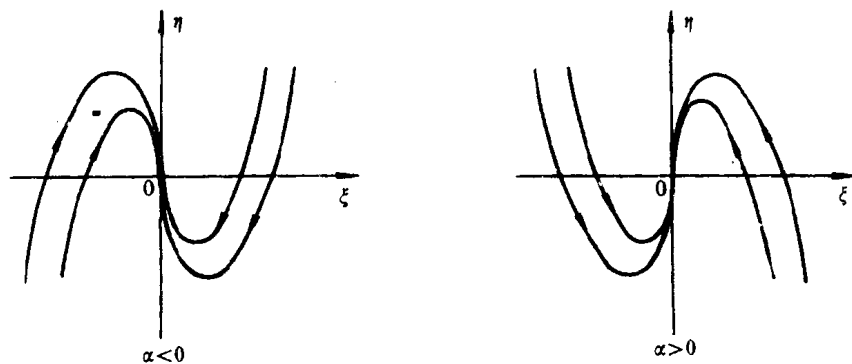


图 1-5

(5) $q > 0, p = 0$. 此时 λ_1, λ_2 为一对共轭虚根. 设 $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$, 则可用与情况(3)同样的方法将方程(1-3-3)化为

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= 0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \nu, \end{aligned} \quad (1-3-13)$$

其解为 $r = r_0, \theta = \theta_0 + \nu t$, 轨线形状如图 1-6. 此时的奇点称为中心.

以上各种情况, 可以概括为如图 1-7.

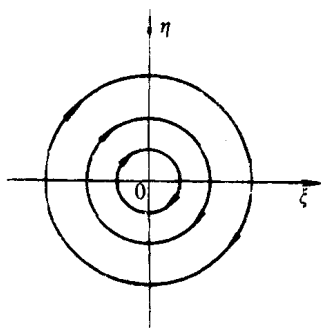


图 1-6

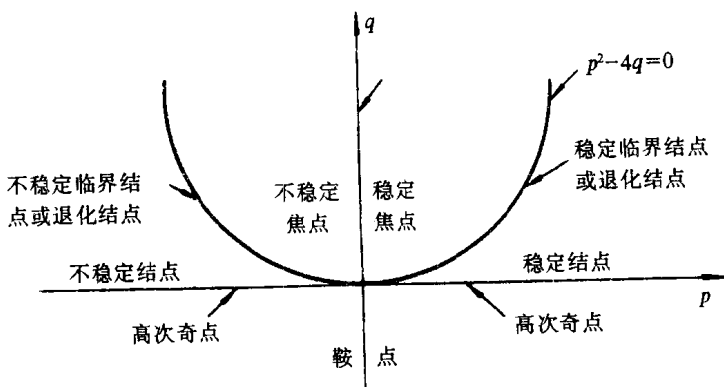


图 1-7

现以受线性阻尼的单摆为例来说明每一类型奇点邻域内的轨线所表示的振动状态. 该单摆的运动微分方程为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n \frac{d\varphi}{dt} + k^2 \sin\varphi = 0, \quad (1-3-14)$$

或

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -k^2 \sin\varphi - 2n\omega. \end{aligned} \quad (1-3-15)$$

由 $\omega = 0$ 与 $-k^2 \sin\varphi - 2n\omega = 0$, 可得两个奇点, 即

$P_1: \varphi = 0, \omega = 0; \quad \text{与} \quad P_2: \varphi = \pi, \omega = 0.$

这两个奇点分别对应于单摆的下、上平衡位置. 先研究下平衡位置 $P_1(0, 0)$. 为此, 将式(1-3-15) 在它的邻域展开, 其线性部分为

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -k^2\varphi - 2n\omega. \end{aligned} \quad (1-3-16)$$

据此, 并注意 $n \geq 0$, 于是得结论如下.

(1) $n = 0$ (无阻尼情况). 此时 P_1 为中心, 其邻域内轨线对应于一系列等周期的谐振动.

(2) $n < k$ (小阻尼情况). 此时 P_1 为稳定焦点, 其邻域内轨线对应于一系列衰减振动.

(3) $n = k$ (临界阻尼情况). 此时 P_1 为稳定临界结点或稳定退化结点, 其邻域内轨线不再具有振动性质.

(4) $n > k$ (大阻尼情况). 此时 P_1 为稳定结点, 其邻域内轨线亦不再具有振动性质.

其次研究上平衡位置 $P_2(\pi, 0)$. 为此, 先借助平移变换 $\tilde{\varphi} = \varphi - \pi, \tilde{\omega} = \omega$ 将 P_2 移至新坐标系 $(\tilde{\varphi}, \tilde{\omega})$ 的原点, 然后再将式(1-3-15) 在此点邻域内展开, 得其线性部分为

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} &= \tilde{\omega}, \\ \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= k^2\tilde{\varphi} - 2n\tilde{\omega}. \end{aligned} \quad (1-3-17)$$

上式的特征根为 $\lambda_1 = -n - \sqrt{n^2 + k^2} < 0, \lambda_2 = -n + \sqrt{n^2 + k^2} > 0$, 故奇点为鞍点, 其邻域内轨线对应于单摆的非振动状态.

§ 1-4 非线性项对一次奇点的影响

先从几何直观上说明这一问题. 方程(1-2-1) 的右端定义了某一矢量场, 而其轨线正是处处沿着该矢量场的矢量方向前进

的。在上节我们仅考虑这一矢量场的线性部分，并根据此线性部分特征根的不同情况确定了奇点的不同类型。现在的问题是，如果将非线性项也考虑进去，则它对奇点的类型又带来何种影响。从几何方面来说，非线性项的引入会使线性部分矢量场的大小与方向发生改变。但是，对位于奇点充分小邻域内的矢量场而言，由于非线性项与线性项相比较是高阶微量，因而它对线性部分矢量场大小与方向的影响也就很微。所以可以想见，对于结点、焦点与鞍点，非线性项将不会改变它们的类型。但对于中心则不然。在非线性项的影响下，它一般将变为稳定或不稳定焦点。当然，在极特殊情况下它也可能依然为中心。

下面仅对结点与鞍点情况给以证明。至于其他情况可用类似方法加以研究。

现假定方程(1-3-1)线性部分特征根 λ_1, λ_2 为二相异负实根。由上节得知，如仅考虑线性部分，此时原点为稳定结点。下面将证明在非线性影响下原点仍为稳定结点。为此，首先通过非异线性变换式(1-3-7)，可将方程(1-3-1)化为

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \lambda_1 \xi + F_2(\xi, \eta), \\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda_2 \eta + G_2(\xi, \eta),\end{aligned}\tag{1-4-1}$$

其中 F_2, G_2 表示所有高次项。引入极坐标 $\xi = r \cos \theta, \eta = r \sin \theta$ ，则得

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\eta}{\xi}.\tag{1-4-2}$$

据此，并由方程(1-4-1)，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} &= \xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} \\ &= r \cos \theta (\lambda_1 r \cos \theta + F_2(r \cos \theta, r \sin \theta)) \\ &\quad + r \sin \theta (\lambda_2 r \sin \theta + G_2(r \cos \theta, r \sin \theta)).\end{aligned}$$

注意 $F_2(r \cos \theta, r \sin \theta)$ 对 r 至少为 2 次，从而 $r \cos \theta F_2(r \cos \theta, r \sin \theta)$ 对 r 至少为 3 次。同理， $r \sin \theta G_2(r \cos \theta, r \sin \theta)$ 对 r 也至少