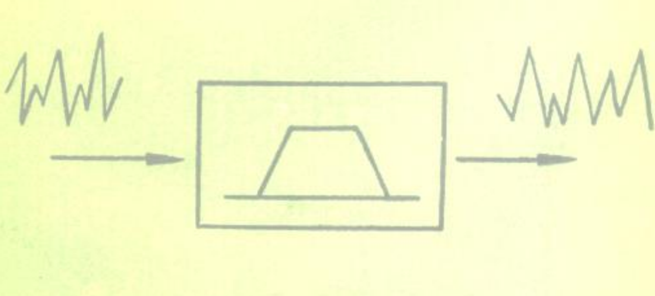
工程中的随机过程

赵 希 人 编著



黑龙江教育出版社

工程中的随机过程

赵 希 人 编著

黑 龙 江 教 育 出 版 社

1988年·哈尔滨

工程中的随机过程

赵希人　编著

责任编辑：张希玉

封面设计：张秉钧

龙江教育出版社出版（哈尔滨市道里森林街 42 号）
黑龙江新华附属印刷厂印刷・黑龙江省新华书店发行
开本850×1168毫米1/32・印张16・插页2・字数378千
1988 年 5 月第 1 版・1988 年　月第 1 次印刷
印数：1—1,603

ISBN 7-5316-0280-6/T・1　　定价：4.60元

出 版 说 明

近年来，随机过程的理论及方法已广泛应用于工业、农业、军事及科学技术各领域中，并越来越显示出十分重要的作用。例如，平稳过程的滤波和预测应用于通讯、雷达及导航；时间序列分析应用于系统建模、自适应控制及气象预报；卡尔曼滤波应用于空间技术及信息处理；谱分析应用于线性系统设计及计算。因此，对于从事工程技术、科学研究的工作者，工科院校的研究生及高年级大学生来说，随机过程无疑是一门很重要的基础课。

本书共分九章，主要介绍随机分析的基本概念及方法；平稳过程的性质及谱分析；线性系统在随机作用下的分析；时间序列分析及其建模；维纳滤波及卡尔曼滤波方法；马尔可夫过程。书中还介绍了一些工程应用实例。

本书的主要结论均以定理和推论的形式给出，这不仅是强调重点的一种有效形式，而且查询起来也极为方便。

本书作为讲义，曾在哈尔滨船舶工程学院研究生班多次讲用，并几经修改后写出初稿。

张钟俊教授、雷渊超教授详细地审阅了原稿，并提出许多改进意见，在此表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中难免还有错误和缺点，恳请读者批评指教。

1987年11月

目　录

第一章　随机过程的基本概念

第二章　平稳随机过程

第三章　线性系统在随机输入作用下的分析

第四章 时间序列分析

第五章 时间序列建模

第六章 维纳（wiener）最优滤波和预测

第七章 非平稳随机函数的最优滤波和预测

第八章 马尔可夫过程

第九章 离散线性系统的最优估计

第一章　随机过程的基本概念

§1—1　随机过程的定义及有限维分布函数族

在概率论中，我们学习过有关一个或几个随机变量的知识。由于实际的需要，我们将研究依赖于时间 t 的一族无穷多个相互有关的随机变量，记作 $\{X(t),\ t\in T\}$。其中 T 是时间 t 的集合，通常有以下几种：

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ T_1=\{t_n,\ n=0,1,2,\cdots\}\\(2)\ T_2=\{t_n,\ n=0,\ \pm1,\cdots\}\end{array}\right\}\quad(1.1.1)$$

$$\left.\begin{array}{l}(3)\ T_3=\{t,\ t\in[a,\ b]\},\ a,b\text{ 为任意实数}\\(4)\ T_4=\{t,\ t\in(-\infty,\ +\infty)\}\end{array}\right\}\quad(1.1.2)$$

其中(1.1.1)式所表示的时间集合称为 **离散时间集合**，(1.1.2)式所表示的时间集合称为**连续时间集合**。当 T 为(1)(2)两种情形时，称 $\{X(t),\ t\in T\}$ 为随机序列，当 T 为(3)(4)两种情形时，称 $\{X(t),t\in T\}$ 为随机过程。为了进一步了解上述概念，先看几个简单的例子。

例1.1.1　考察电网电压波动问题。由于发电机组在发电过程中的随机波动以及各用户在使用过程中的不同，使得电网电压出现随机波动。用 $X(t)$ 表示 t 时刻的电网电压值，当 t 固定时，$X(t)$ 就是一个随机变量，随着时间 t 的不断变化，就得到一族随机变量 $\{X(t),t\in T\}$。

例 1.1.2　考察电话站收到的用户呼叫次数。由于各用户向电话总机的呼叫是随机的，因此，电话站收到的用户呼叫次数也

是随机的。用 $X(t)$ 表示在时刻 t 以前电话站接到的电话呼叫次数，当时间 t 固定时，$X(t)$ 就是一个随机变量，随着时间 t 的变化就得到一族随机变量 $\{X(t), t\in T\}$。

从以上直观的例子引出随机过程的定义：

设 E 为一个随机实验，其全部实验结果 ω 构成了样本空间 Ω，即 $\{\omega\}=\Omega$，进一步由 Ω 中的某些被称之为事件的子集 A 构成了波雷尔体 $\mathscr{F}$，即 $\{A\}=\mathscr{F}$，并对每个事件 A 赋以概率 P，通常称三元总体 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间。又假设 T 是由（1.1.1）式或（1.1.2）式所表示的时间 t 的集合。对每一 $t\in T$，有定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量 $X(t,\omega),\omega\in\Omega$，于是称 $X(t,\omega)$ 为随机过程，用符号 $\{X(t,\omega), t\in T\}$ 表示，如不产生混乱，可简写为 $\{X(t), t\in T\}$。

对于随机过程 $\{X(t,\omega), t\in T\}$ 来说，包含以下五种含义：

1．当 t 和 ω 都是变量时，$\{X(t,\omega), t\in T\}$ 表示一族无穷多个依赖于时间 $t\in T$ 的随机变量。

2．当 t 和 ω 都是变量时，$\{X(t,\omega), t\in T\}$ 也可表示一个时间函数族。

3．当 ω 固定而 t 是变量时，$\{X(t,\omega), t\in T\}$ 表示一个时间函数，通常称为样本函数。

4．当 t 固定而 ω 是变量时，$\{X(t,\omega), t\in T\}$ 表示一个随机变量。

5．当 t 和 ω 都固定时，$\{X(t,\omega), t\in T\}$ 代表某一个数字。

根据第 1 种含义，我们给出关于随机过程的比较简单的定义：

定义 1.1.1 称一族无穷多个依赖于时间 $t\in T$ 且在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上定义的随机变量 $\{X(t), t\in T\}$ 为随机函数，其中 T 为时间 t 的集合，如果 T 为（1.1.1）式所表示的离散时间 t

的集合，则称$\{X(t),t\in T\}$为**随机序列**，如果T为（1.1.2）式所表示的连续时间的集合，则称$\{X(t),t\in T\}$为**随机过程**。

由上面的定义可以看出，随机序列实际上只是随机过程当时间参数t取离散值时的情形，所以也可以把随机序列看做是随机过程的特殊情形。

还可以从第二种含义来定义随机过程。现在对某随机过程做一次测试，假定在测试过程中没有误差，对于某$t=t_1\in T$时刻，其测量值就取某一确定值$x_1(t_1)$，随着时间t的推移，就可得到一个确定的定义于T上的函数$x_1(t)$，如图1.1.1所示，称$x_1(t)$为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的一个实现或称样本函数。

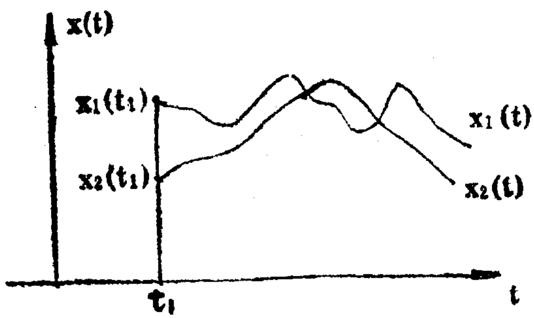


图1.1.1　随机过程的样本函数表示

如果在相同条件下，再重复一次测试，就得到随机过程$\{X(t),t\in T\}$的另一个实现$x_2(t)$，如果在相同条件下进行无穷多次测试，就会得到随机过程$\{X(t),t\in T\}$的一族实现或称时间函数族。由此可知，随机过程$\{X(t),t\in T\}$既可看成是一族无穷多个随机变量的集合，也可看成是所有实现的集合。于是得到随机过程的另一个定义：

定义 1.1.2　称所有可能的实现（样本函数）$x(t)$，$t\in T$的集合$\{x(t),t\in T\}$为随机函数，其中当t固定时，集合$\{x(t),t\in$

$T\}$表示定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量 $X(t)$，$t\in T$ 的所有可能取值，T 为时间 t 的集合，如果 T 为(1.1.1)式所表示的离散时间t的集合，则称$\{x(t),t\in T\}$为随机序列，如果 T 为(1.1.2)式所表示的连续时间 t 的集合，则称 $\{x(t),\ t\in T\}$为随机过程。

现在考察随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$，为了描述它的统计特性，当然要知道每个时刻 $t\in T$ 的随机变量 $X(t)$的分布函数，即

$$F(t;\ x)\triangleq P(X(t)<x),\ t\in T \tag{1.1.3}$$

称 $F(t;\ x)$为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的一维分布函数。

如果

$$f(t;x)\triangleq\frac{\partial F(t;x)}{\partial x},\ t\in T \tag{1.1.4}$$

存在，则称$f(t;x)$为随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$的**一维密度函数**。

至此，我们仅仅描述了随机过程$\{X(t),t\in T\}$在每个时刻$t\in T$ 上的统计特性。为了描述随机过程$\{X(t),t\in T\}$在任意两个时刻 $t_1,t_2\in T$ 上的相互关系，显然用上面的描述方法是不能解决问题的，为此应当引入二维分布函数。

称

$$F(t_1,t_2;x_1,x_2)\triangleq P\{X(t_1)<x_1,\ X(t_2)<x_2\},\ t_1,\ t_2\in T \tag{1.1.5}$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**二维分布函数**。如果

$$f(t_1,t_2;x_1,x_2)\triangleq\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}F(t_1,t_2;x_1,x_2) \tag{1.1.6}$$

存在，则称$f(t_1,t_2;x_1,x_2)$ 为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**二维密度函数**。

一般地，对任意有限个 $t_1,t_2\ \cdots,\ t_n\in T$，称

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq P\{X(t_1)<x_1,X(t_2)<x_2,\cdots,X(t_n)<x_n\} \tag{1.1.7}$$

为随机过程 $\{X(t),\ t\in T\}$的 n **维分布函数**。如果

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1x_2,\cdots,x_n)\triangleq\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1.1.8}$$

存在，则称 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的 n **维密度函数**。

把随机过程$\{X(t),t\in T\}$的一维分布，二维分布，…，以及 n 维分布的全体

$$\{F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n),\ t_i\in T,\ i=1,2,\cdots,n,\ n\geqslant 1\} \tag{1.1.9}$$

称为该随机过程的**有限维分布函数族**。

由述可知，对于随机过程$\{X(t),t\in T\}$来说，如果能知道它的有限维分布函数族，那么，对任意 n 个时刻$t_1,t_2,\cdots,t_n$，这 n 个随机变量 $X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$的统计特性就完全被确定了。也就是说，只有知道有限维分布函数族(1.1.9)式，随机过程$\{X(t),t\in T\}$才能完全被确定。

由概率论中多维分布的性质，可知有限维分布函数族（1.1.9)式有以下两个性质：

（1）对称性：对（$1,2,\cdots,n$)的任一排列($i_1,i_2,\cdots,i_n$)有

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)=F(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{in};x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in}) \tag{1.1.10}$$

（2）相容性：对任意 $m<n$，有

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_m,\infty,\cdots,\infty)=F(t_1,t_2,\cdots,t_m;x_1,x_2,\cdots,x_m) \tag{1.1.11}$$

下面举例说明有限维分布函数族的求法。

例 1.1.3　设 $X(t)=U+Vt$，$|t|<\infty$，其中 (U,V) 为二维随机变量，且密度函数 $f(u,v)$ 为已知。

利用以上已知条件可以求出有限维分布函数族。例如一维分布函数为

$$
\begin{aligned}
F(t_1,x_1) &= P\{X(t_1)<x_1\} \\
&= P\{U+Vt_1<x_1\} \\
&= \int_{D_1}\int f(u,v)dudv \qquad (1.1.12)
\end{aligned}
$$

其中积分域 D_1 由图 1.1.2 所表示。

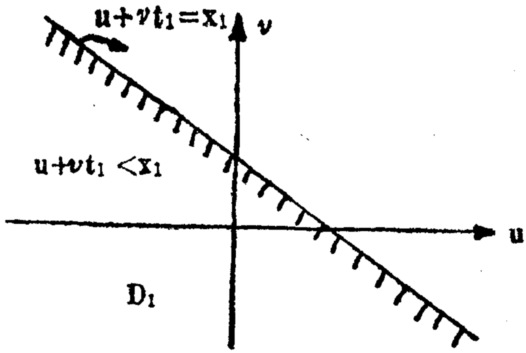


图 1.1.2　例 1.1.1 的一维分布函数的积分域

二维分布函数为

$$
\begin{aligned}
F(t_1,t_2;\ x_1,x_2) &= P\{X(t_1)<x_1, X(t_2)<x_2\} \\
&= P\{U+Vt_1<x_1,\ U+Vt_2<x_2\} \\
&= \int_{D_2}\int f(u,v)dudv
\end{aligned}
$$

其中积分域 D_2 由图 1.1.3 表示。

一般地，n 维分布函数 $F(t_1,t_2,\cdots,t_n;\ x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为

$$
F(t_1,t_2,\cdots,t_n;\ x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X(t_1)<x_1,\ X(t_2)<x_2,\cdots,\ X(t_n)<x_n\}
$$

$$=P\{U+Vt_1<x_1,\cdots,U+Vt_n<x_n\}$$
$$=\int_{D_n}\int f(u,v)dudv$$

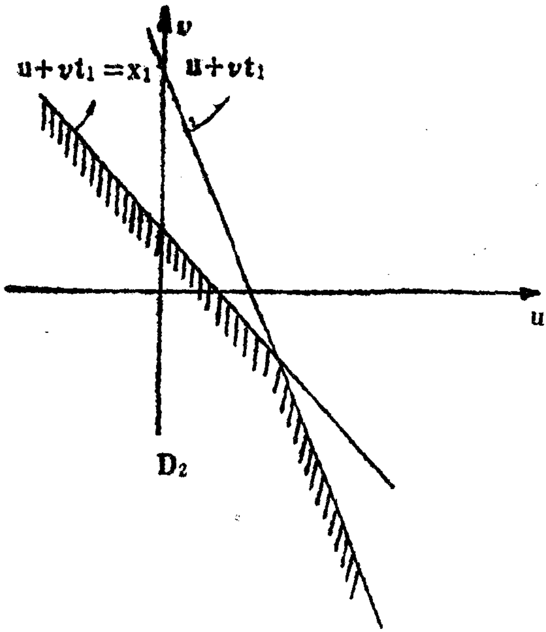


图 1.1.3 例 1.1.1 的二维分布函数的积分域

其中积分域 D_n 为由 $u+vt_i<x_i, i=1,2,\cdots,n$ 所界的区域. 由于可以求出有限维分布函数族

$$\{F(t_1,\cdots,t_n;\ x_1,\cdots,x_n),\ |t_i|<\infty,\ i=1,2,\cdots,\ n,\ n\geqslant 1\}$$

所以，这样给出的随机过程$\{X(t),|t|<\infty\}$就能完全被确定.

例 1.1.4 设样本空间 $\Omega=\{\omega\}$为实数轴上的线段[0,1]，其概率分布是均匀的，时间指标 t 的集合 T 也是区间 [0,1]，现考察随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),\ t\in T\}$，其定义为

$$X(t,\omega)=0, \text{对所有 } t \text{ 及 } \omega \qquad (1.1.13)$$

$$Y(t,\omega)=\begin{cases}1, & 当\ t=\omega\ 时\\ 0, & 当\ t\neq\omega\ 时\end{cases} \tag{1.1.14}$$

利用上述条件，可以求出随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$ 及 $\{Y(t),\ t\in T\}$的有限维分布函数族。

事实上，对任意正整数 n，由（1.1.13）式可知有

$$\begin{aligned}&F_X(t_1,t_2,\cdots,t_n;\ x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=P(X(t_1)<x_1,\ X(t_2)<x_2,\ \cdots,\ X(t_n)<x_n)\\&=\begin{cases}0, & 当\ x_i\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\cdots,n\\ 1, & 其他\end{cases}\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

由(1.1.14)式还有

$$\begin{aligned}&F_Y(t_1,t_2,\cdots,t_n;\ y_1,y_2,\cdots,y_n)\\&=P(Y(t_1)<y_1,\ Y(t_2)<y_2,\cdots,Y(t_n)<y_n)\\&=\begin{cases}0, & 当\ y_i\leqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n\\ 1-\Sigma P(\omega=t_i) & ,\qquad 其他\\ \quad i\in\{k,y_k\leqslant 1,\ k=1.\ 2,\cdots,n\} & \end{cases}\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

然而，由概率的基本性质又知

$$\sum_{i\in\{k,\ y_k\leqslant 1,\ k=1\cdot 2,\cdots,\ n\}} P(\omega=t_i)=0$$

所以（1.1.16）式可简化为

$$\begin{aligned}&F_Y(t_1,t_2,\cdots,t_n;\ y_1,y_2,\cdots,y_n)\\&=\begin{cases}0, & 当\ y_i\leqslant 0, i=1.\ 2,\cdots,n\\ 1, & 其他\end{cases}\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

比较（1.1.17）式和（1.1.15）式可知随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$的有限维分布函数族是相同的。

本书主要讨论实值随机过程。但在某些章节须要讨论复值随机过程时，我们会给以特别的申明并做适当的表示，目的是使读者更容易接受和理解。

§1—2 随机过程的示性函数

在 1.1 节中已经指出，为了完全描述一个随机过程 $\{X(t), t\in T\}$，必须知道它的有限维分布函数族。然而在计算较高维数的分布函数时，往往在计算上带来很大的困难。因此，在实际应用中，通常是利用随机过程的几个主要特征来描述。我们知道，在概率论中为了描述随机变量，通常是用均值、方差和相关系数等示性数来描述。对于随机过程来说，均值、方差及相关系数只不过是时间 t 的函数而已，我们通常称之为均值函数、方差函数及相关函数，有时把这些函数叫做随机过程的示性函数。

定义 1.2.1 设 $\{X(t), t\in T\}$ 为随机过程，如果积分

$$m_X(t)\triangleq E\{X(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,dF(t,x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(t,x)\,dx \qquad (1.2.1)$$

存在，则称 $m_X(t)$ 为该随机过程的**均值函数**，有时简化为 $m(t)$。其中 $F(t,x)$ 和 $f(t,x)$ 分别为该随机过程的一维分布函数和一维密度函数。

定义 1.2.2 设 $\{X(t),t\in T\}$ 为随机过程，如果积分

$$D_X(t)\triangleq E\{[X(t)-m(t)]^2\}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)-m(t)]^2\,dF(t,x) \qquad (1.2.2)$$

存在，则称 $D_X(t)$ 为该随机过程的**方差函数**，有时简记为 $D(t)$。特别地，称

$$\sigma_X(t)\triangleq\sqrt{D_X(t)} \qquad (1.2.3)$$

为随机过程 $\{X(t), t\in T\}$ 的**标准偏差函数**。

定义 1.2.3 设 $\{X(t),t\in T\}$ 为随机过程，如果积分

$$
\begin{aligned}
\Gamma_X(t_1,t_2) &\triangleq E[X(t_1)X(t_2)] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 d^2F(t_1,t_2;\ x_1,x_2)
\end{aligned}
\tag{1.2.4}
$$

存在，则称 $\Gamma_X(t_1,t_2)$ 为该随机过程的**原点自相关函数**。特别地，称 $\Gamma_X(t,t)=E[X(t)^2]$为**二阶原点矩函数**。完全类似，称

$$
\Gamma_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)] \tag{1.2.5}
$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$的**原点互相关函数**。

称积分

$$
\begin{aligned}
B_X(t_1,t_2) &\triangleq E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [x_1-m_X(t_1)][x_2-m_X(t_2)]d^2F(t_1,t_2;\ x_1,x_2) \\
& \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [x_1-m_X(t_1)][x_2-m_X(t_2)]f(t_1,t_2;\ x_1,x_2)dx_1dx_2
\end{aligned}
\tag{1.2.6}
$$

为随机过程 $\{X(t),\ t\in T\}$**的中心自相关函数**。完全类似，称

$$
B_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]\} \tag{1.2.7}
$$

为随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$和$\{Y(t),\ t\in T\}$的**中心互相关函数**。

由（1.2.4）式及（1.2.6）式，可知

$$
B_X(t_1,t_2)=\Gamma_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2) \tag{1.2.8}
$$

比较（1.2.2）式和（1.2.6）式，还有

$$
D_X(t)=B_X(t,t)=\Gamma_X(t,t)-m_X^2(t) \tag{1.2.9}
$$

下面举几个例子来说明如何求随机过程的示性函数。

例 1.2.1 设 $X(t)=X_0+Vt$，$a\leqslant t\leqslant b$，其中 X_0 和 V 是相互独立的服从正态 $N(0,1)$分布的随机变量。

因为 X_0 和 V 是正态分布，所以对任意 $a\leqslant t\leqslant b$，$X(t)$也为